ФГБОУ ВО «Московский педагогический государственный университет»
Математический факультет

На правах рукописи

Поляков Николай Львович

Соответствия Галуа для классов дискретных функций и их применение к математическим проблемам теории коллективного выбора

01.01.09 – Дискретная математика и математическая кибернетика

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физико-математических наук,
профессор М.В. Шамолин

Москва – 2016

Содержание

Введение

Актуальность темы исследования. Диссертация посвящена изучению проблемы агрегирования коллективной системы предпочтений с помощью методов теории замкнутых классов дискретных функций. Проблема агрегирования коллективной системы предпочтений по совокупности индивидуальных систем предпочтений есть центральная задача математической *теории коллективного выбора*. Интерес к этой задаче научная и философская мысль начала проявлять по меньшей мере с конца восемнадцатого века, см. [1]. Впервые систематическое исследование широкого класса формальных процедур агрегирования предпринял К. Эрроу, лауреат Нобелевской премии по экономике 1972 г. В монографии [2] (см. также раннюю версию в [3]) им доказан известный результат, называемый *теорема Эрроу о невозможности* или, иначе, *парадокс Эрроу*. По существу, он состоит в следующем.

Пусть дано конечное множества A (альтернатив) и фиксировано натуральное число n (участников или критериев выбора). Пусть $\mathrm{Ord}(A)$ есть множество всех линейных порядков на множестве A. Тогда, если множество A содержит по крайней мере три элемента, то не существует правила агрегирования, т.е. функции $f\colon (\mathrm{Ord}(A))^n \to \mathrm{Ord}(A)$, которое удовлетворяет *условиям единогласия* и *независимости от посторонних альтернатив* и при этом не является *диктаторским*.

Определим эти условия. Правило агрегирования $f\colon (\mathrm{Ord}(A))^n \to \mathrm{Ord}(A)$

- удовлетворяет *условию единогласия*, если

$$(\forall a, b \in A)\,((\forall i < n)\, a \prec_i b) \ \to a\, f(\pi)\, b$$

  для каждого *профиля* $\pi = (\prec_0, \prec_1, \ldots, \prec_{n-1})$ из $(\mathrm{Ord}(A))^n$;

- удовлетворяет *условию независимости от посторонних альтернатив*, если

$$(\forall a, b \in A)\,((\forall i < n)\, a \prec_i b \leftrightarrow a \prec'_i b) \to (a\, f(\pi)\, b \leftrightarrow a\, f(\pi')\, b))$$

для любых *профилей* $\pi = (\prec_0, \prec_1, \ldots, \prec_{n-1})$ и $\pi' = (\prec'_0, \prec'_1, \ldots, \prec'_{n-1})$ из $(\mathrm{Ord}(A))^n$.

Правило агрегирования f называется диктаторским, если f есть проекция, т.е.

$$(\exists i < n)\,(\forall \prec_0, \prec_1, \ldots, \prec_{n-1} \in \mathrm{Ord}(A))\, f(\prec_0, \prec_1, \ldots, \prec_{n-1}) = \prec_i .$$

Простые доказательства классической теоремы Эрроу (с незначительным усилением) можно найти в [4].

С момента появления статьи [3] теория коллективного выбора переживает период бурного развития. Проблемы, близкие к теореме Эрроу, исследовалась многими учеными как экономистами, так и математиками, среди которых А. Сен (нобелевская премия по экономике 1978 г.), П. Фишборн, П. К. Паттанаик и др. Существенная часть работ посвящена поискам границ применимости принципа невозможности Эрроу. В частности, в работе [5] показано, что теорему Эрроу нельзя распространить на случай бесконечного количества участников; в работах [6–9] и др. исследованы условия эффективности правила большинства, в случае, когда его действие ограничено некоторым подмножеством множества всех возможных профилей (т.н. случай *ограниченной области*). В работах [10–12] и др. предпринят отход от строгого *ординалистского* принципа, т.е. рассмотрены системы предпочтений, представляющие собой частичные порядки. Еще более общие случаи систем предпочтений, представляющих собой произвольные бинарные отношения и функции выбора рассмотрены в работах М. А. Айзермана и Ф. Т. Алескерова (см. [13] и [14–16]).

Большую часть доказанных результатов можно найти в [17, 18]; также заслуживают внимание классические монографии [19], [20] и книга [21]. Однако, несмотря на обилие теорем, основными методами теории коллективного выбора до недавнего времени оставались элементарные комбинаторные рассуждения (особняком здесь стоит топологический подход, см. [22, 23]). По всей видимости, это служит основным препятствием для широких обобщений теоремы Эрроу и систематического изучения условий эффективности процедур агрегирования. В частности, существует не так много исследований, посвященных нетранзитивным (*нерациональным*) системам предпочтений; между тем, прояснение общего случая представляется, несомненно, важным (см. [24]) и мотивированным с социально-психологической точки зрения (см. [25]).

Наиболее значительный результат о нерациональных системах предпочтений получен С. Шелахом в работе [26]. В этой работе в качестве систем предпочтений рассматриваются всевозможные функции выбора, определенные на r-элементных подмножествах множества альтернатив A, где r есть некоторое положительное натуральное число. Множество всех таких функций мы обозначаем символом $\mathfrak{C}_r(A)$. Множество $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{C}_r(A)$ называется симметричным, если вместе с каждой функцией $\mathfrak{d}$ оно содержит все функции $\mathfrak{d}_\sigma$, где σ есть перестановка множества A и $\mathfrak{d}_\sigma(p) = \sigma^{-1}(\mathfrak{d}(\sigma(p)))$ для всех r-элементных подмножеств p множества A.

Правило агрегирования есть функция $f\colon (\mathfrak{C}_r(A))^n \to \mathfrak{C}_r(A)$ для некоторого натурального числа n. Мы называем правило агрегирования

- *вполне локальным*, если

$$(\mathfrak{c}_0(q), \mathfrak{c}_1(q), \ldots, \mathfrak{c}_{n-1}(q)) = (\mathfrak{c}'_0(q), \mathfrak{c}'_1(q), \ldots, \mathfrak{c}'_{n-1}(q)) \to \\ \to f(\mathfrak{c}_0, \mathfrak{c}_1, \ldots, \mathfrak{c}_{n-1})(q) = f(\mathfrak{c}'_0, \mathfrak{c}'_1, \ldots, \mathfrak{c}'_{n-1})(q)$$

  для всех $\mathfrak{c}_0, \mathfrak{c}_1, \ldots, \mathfrak{c}_{n-1}, \mathfrak{c}'_0, \mathfrak{c}'_1, \ldots, \mathfrak{c}'_{n-1} \in \mathfrak{C}_r(A)$ и $q \in [A]^r$;

- *локально квазитривиальным*, если

$$f(\mathfrak{c}_0, \mathfrak{c}_1, \ldots, \mathfrak{c}_{n-1})(q) \in \{\mathfrak{c}_0(q), \mathfrak{c}_1(q), \ldots, \mathfrak{c}_{n-1}(q)\}$$

  для всех $\mathfrak{c}_0, \mathfrak{c}_1, \ldots, \mathfrak{c}_{n-1} \in \mathfrak{C}_r(A)$ и $q \in [A]^r$.

Эти два условия на правило агрегирования обобщают условия единогласия и независимости от посторонних альтернатив.

Правило агрегирования f *сохраняет* множество $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{C}_r(A)$, если

$$f(\mathfrak{c}_0, \mathfrak{c}_1, \ldots, \mathfrak{c}_{n-1}) \in \mathfrak{D}$$

для всех функций $\mathfrak{c}_0, \mathfrak{c}_1, \ldots, \mathfrak{c}_{n-1} \in \mathfrak{D}$.

Множество $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{C}_r(A)$ обладает (общим) *свойством Эрроу*, если не существует сохраняющих его вполне локальных и локально квазитривиальных правил агрегирования, кроме проекций.

Основная теорема работы [26] утверждает, что существуют такие натуральные числа r_1^*, r_2^* (можно положить $r_1^* = r_2^* = 7$), что для каждого конечного множества A и натурального числа r, удовлетворяющего неравенствам $r_1^* \leq r \leq |A| - r_2^*$, любое симметричное непустое собственное подмножество $\mathfrak{D}$ множества $\mathfrak{C}_r(A)$ обладает свойством Эрроу.

При всей важности результата С. Шелаха нельзя не отметить, что он не дает исчерпывающей классификации симметричных множеств r-функций выбора, обладающих свойством Эрроу. В частности, в его область действия не попадает в некотором смысле наиболее интересный случай $r = 2$, и, следовательно, основная теорема работы [26] формально не является обобщением теоремы Эрроу о невозможности. Случай $r = 2$ интересен также тем, что может быть воспринят как задача *теории графов*. Действительно, в этом случае каждую функцию $\mathfrak{c} \in \mathfrak{C}_r(A)$ можно отождествить с полным ориентированным графом (*турниром*), а каждое симметричное множество $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{C}_r(A)$ с множеством турниров, замкнутым относительно автоморфизмов.

Намеченный в работе [26] метод не менее важен, чем сам результат. В общих чертах метод состоит в следующем. Вначале основная теорема частично сводится к своей более слабой версии – аналогичному утверждению для *простого свойства Эрроу*. Определим это понятие. Правило агрегирования f называется

- *простым*, если

$$(\mathfrak{c}_0(p), \mathfrak{c}_1(p), \ldots, \mathfrak{c}_{n-1}(p)) = (\mathfrak{c}_0(q), \mathfrak{c}_1(q), \ldots, \mathfrak{c}_{n-1}(q)) \to \\ f(\mathfrak{c}_0, \mathfrak{c}_1, \ldots, \mathfrak{c}_{n-1})(p) = f(\mathfrak{c}_0, \mathfrak{c}_1, \ldots, \mathfrak{c}_{n-1})(q)$$

  для всех $\mathfrak{c}_0, \mathfrak{c}_1, \ldots, \mathfrak{c}_{n-1} \in \mathfrak{C}_r(A)$ и $p, q \in [A]^r$.

Множество $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{C}_r(A)$ обладает *простым* свойством Эрроу, если не существует сохраняющих его *простых* вполне локальных и локально квазитривиальных правил агрегирования, кроме проекций.

Дальнейшие рассуждения основаны на том факте, что множество $\mathfrak{D}$ обладает простым свойством Эрроу тогда и только тогда, когда каждая *квазитривиальная* (*консервативная*) функция $g\colon A^n \to A$, которая сохраняет $\mathfrak{D}$, совпадает с некоторой проекцией на множестве

$$A^n_{<r} \rightleftharpoons \{\mathbf{a} \in A^n \colon |\operatorname{ran} \mathbf{a}| < r\}.$$

Здесь функция $g\colon A^n \to A$ называется квазитривиальной (консервативной), если удовлетворяет условию $g(\mathbf{a}) \in \operatorname{ran} \mathbf{a}$ для всех n-ок $\mathbf{a} \in A^n$ (об этом термине см. [27, 28]), а отношение сохранения функцией g множества функций $H \subseteq {}^Q A$ (для произвольного множества Q) определяется условием

$$(\forall h_1, h_2, \ldots, h_n \in H)\, g(h_1, h_2, \ldots, h_n) \in H,$$

где последовательность символов $g(h_1, h_2, \ldots, h_n)$ обозначает функцию, которая на любом элементе $q \in Q$ принимает значение $f(h_1(q), h_2(q), \ldots, h_n(q))$.

С учетом этого факта задача классификации множеств $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{C}_r(A)$, обладающих простым свойством Эрроу, становится естественной задачей математической *теории функциональных систем* и может быть решена методами этой теории.

Изложенные обстоятельства подталкивает к совершенствованию предложенного Шелахом метода с целью получения полной классификационной теоремы о симметричных множествах r-функций выбора (при любых конечных значениях r) и иных приложений. Усовершенствованный метод (который мы будем в дальнейшем называть *методом клонов в теории коллективного выбора*) может быть изложен в терминах теории *соответствий Галуа для классов дискретных функций*. Множество всех функций g (любой арности) на множестве A обозначается символом $\mathcal{O}(A)$. Пусть даны множества Q, $\mathbb{H} \subseteq \mathcal{P}({}^{Q}A)$ и $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}(A)$. Множество всех функций $g \in \mathcal{O}(A)$, которые сохраняют каждое множество $H \in \mathbb{H}$, мы будем обозначать символом $\operatorname{pol}\mathbb{H}$, а множество всех множеств $H \subseteq {}^{Q}A$, которые сохраняются каждой функцией $g \in \mathcal{F}$, мы будем обозначать символом $\operatorname{inv}_Q \mathcal{F}$. Пара $(\operatorname{inv}_Q, \operatorname{pol})$ есть соответствие Галуа между булевыми решетками $\mathcal{P}(\mathcal{P}({}^{Q}A))$ и $\mathcal{P}(\bigcup\limits_{n<\omega} {}^{A^n}A)$, причем Галуа-замкнутые множества $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}(A)$ есть *клоны* (о клонах см., напр., [29]). Если множество Q конечно, это соответствие погружается в хорошо известное соответствие Галуа $(\operatorname{inv}, \operatorname{pol})$, порожденное отношением сохранения функцией g предиката P, см. [30].

Легко заметить, что множество $\{\operatorname{pol}\{\mathfrak{D}\} \colon \mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{C}_r(A)$ и $\mathfrak{D}$ симметрично$\}$ состоит из *симметричных* клонов, т.е клонов, которые вместе в каждой функцией g (любой арности n) содержат все функции g_σ, где σ есть перестановка множества A и $g_\sigma(\mathbf{a}) = \sigma^{-1}(g(\sigma \cdot \mathbf{a}))$ для всех n-ок $\mathbf{a} \in A^n$ (такие клоны в работе [31] названы клонами, *замкнутыми относительно всех автоморфизмов*). Таким образом, для решения задачи классификации симметричных множеств $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{C}_r(A)$, обладающих простым свойством Эрроу, достаточно получить явное описание некоторого фрагмента соответствия $(\operatorname{inv}_Q, \operatorname{pol})$ при $Q = [A]^r$, а именно

(a) получить описание множества симметричных квазитривиальных клонов,

(b) для каждого симметричного квазитривиального клона $\mathcal{F}$ получить описание множества $\operatorname{inv}_Q \mathcal{F}$

(далее остается только определить, какие из множеств $\operatorname{inv}_Q \mathcal{F}$, могут содержать непустое симметричное множество $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{C}_r(A)$).

Обе задачи в данном исследовании решены, причем на пути описания множеств $\operatorname{inv}_Q \mathcal{F}$ для симметричных квазитривиальных клонов $\mathcal{F}$ получены важные результаты (названные в данном исследовании *теоремами о сохранении*) об инвариантных множествах трех достаточно широких классов клонов, а именно, о классах клонов, удовлетворяющих определенным ниже условиям Δ^∂, Δ^e_r и Δ^2.

Пусть дан клон $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}(A)$ и натуральное число $r \geq 2$. Будем говорить, что клон $\mathcal{F}$

1. *удовлетворяет условию* Δ^∂, если для любой последовательности $\mathbf{a} \in A^3_3$ и элемента $a \in \operatorname{ran} \mathbf{a}$ существует такая трехместная функция $w \in \mathcal{F}$, что

$$w(\mathbf{a}) = a \text{ и } w(xxy) = w(xyx) = w(yxx) = x \text{ для всех } x, y \in A$$

2. *удовлетворяет условию* Δ^e_r, если существует такое натуральное число $i < r$, что для любой последовательности $\mathbf{a} \in A^r_r$ и элемента $a \in \operatorname{ran} \mathbf{a}$ существует такая r-местная функция $w \in \mathcal{F}$, что

$$w(\mathbf{a}) = a \text{ и } w(\mathbf{x}) = x_i \text{ для всех } \mathbf{x} = x_0 x_1 \dots x_{r-1} \in A^r_{<r};$$

3. *удовлетворяет условию* Δ^2, если для любых последовательностей $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in A^2_2$ с различными областями значений и элементов $a \in \operatorname{ran} \mathbf{a}$ и $b \in \operatorname{ran} \mathbf{b}$ существует такая двухместная функция $w \in \mathcal{F}$, что

$$w(\mathbf{a}) = a, \; w(\mathbf{b}) = b \text{ и } w(xx) = x \text{ для всех } x \in A.$$

Инвариантные множества клонов (не обязательно симметричных и квазитривиальных), удовлетворяющих этим условиям, допускают несложное описание, которое представляет самостоятельный интерес.

Теория замкнутых классов дискретных функций имеет собственную богатую историю. Первым и наиболее известным результатом в этой области была теорема Э. Л. Поста о классификации всех замкнутых классов булевых функций, см. [32] и современное изложение в монографии [33] или [34]. Как известно, непосредственное распространение классификационной теоремы Поста на общий случай дискретных функций (функций k-значной логики) вызывает затруднения из-за результата [35], из которого следует, что для $k \geq 3$ решетка замкнутых классов континуальна и имеет весьма сложную структуру. В разработку методов изучения этой решетки внесли большой вклад отечественные математики С. В. Яблонский, О. Б. Лупанов, В. Б. Кудрявцев, С. С. Марченков. Подробное изложение основных результатов можно найти в [36–39], а также в зарубежных монографиях [30] и [34].

Соответствие Галуа $(\mathrm{inv}, \mathrm{pol})$ для классов дискретных функций, по всей видимости, впервые было обнаружено в [40] и независимо в [41, 42]. Соответствие Галуа успешно применяется для получения классификационных теорем в теории замкнутых классов (см., напр., [43]), в частности, оно иногда позволяет получить простое описание функционально замкнутых систем, удовлетворяющих какому-либо условию, напоминающему условия Δ^{∂}, Δ^{e}_{r} и Δ^{2}, т.е. содержащих некоторую функцию или множество функций специального вида. Примерами таких результатов являются работы [44–46] (теорема 2.2 настоящего исследования, по существу, есть усиление основного результата работы [44]).

Консервативные клоны изучались в работах [27, 28]. Симметричные (замкнутые относительно всех автоморфизмов) клоны, содержащие все константы, описаны в работе [31] (непосредственно воспользоваться результатом этой работы в нашем исследовании невозможно, т.к. квазитривиальные клоны с более чем одноэлементным носителем, напротив, не содержат ни одной константы).

Отметим, что известно не так много примеров приложения теории функциональных систем к другим областям математического знания. Неожиданное применение развитой техники теории Галуа для классов дискретных функций к проблемам агрегирования коллективных систем предпочтений представляется новым привлекательным и перспективным направлением теории коллективного выбора.

Цели и задачи работы. Основной целью работы является развить и усовершенствовать предложенный С. Шелахом метод клонов в теории коллективного выбора и решить следующие задачи.

- Получить характеризацию инвариантных множеств клонов с конечным носителем, удовлетворяющих условиям Δ^∂, Δ_r^e и Δ^2.
- Описать основные типы квазитривиальных клонов.
- Построить полную классификацию симметричных квазитривиальных клонов с конечным носителем.
- Используя разработанный автором подход, обобщить теорему Шелаха о свойстве Эрроу для симметричных классов r-функций выбора на случай произвольного натурального числа r.

Научная новизна. Результаты являются новыми, получены автором самостоятельно. Метод клонов в теории коллективного выбора впервые последовательно представлен как специальный раздел теории функциональных систем. Основные результаты:

- Получена характеризация инвариантных множеств клонов с конечным носителем, удовлетворяющих условиям Δ^∂, Δ_r^e и Δ^2.
- Введены понятия r-клона и его распространения, свободной склейки квазитривиальных клонов и 2-монотонной функции. Введено понятие и получено явное описание класса инъективно устойчивых справа и устойчивых слева отношений эквивалентности на множестве $A^{<\omega}$. С помощью этих понятий определены четыре простых типа квазитривиальных клонов.
- Построена классификация симметричных квазитривиальных клонов с конечным носителем, представляющая каждый из них в виде пересечения четырех клонов простых типов.
- Получена полная классификация симметричных множеств r-функций выбора, обладающих простым и общим свойством Эрроу.

Теоретическая и практическая значимость. Работа имеет теоретический характер. Результаты, изложенные в диссертации, могут быть использованы в теории коллективного выбора для доказательства различных обобщений теоремы Эрроу о невозможности и в теории функциональных систем для построения классификаций замкнутых классов дискретных функций. Также результаты диссертации позволяют исследовать практические задачи агрегирования систем предпочтений и некоторые процедуры принятия коллективных решений.

Степень достоверности и апробация результатов. Результаты прошли апробацию на международных и всероссийских научных конференциях, а также на авторитетных научных семинарах.

Конференции.

- «Информационные технологии и системы – 2012» 35-я конференция молодых ученых и специалистов, 19 – 25 августа 2012, Петрозаводск, Россия.
- ESSLLI Workshop on Logical Models of Group Decision Making, Dusseldorf, 12-16 August 2013
- VII международная конференция по математическому моделированию, 30 июня–4 июля 2014, Якутск, Россия.
- II научная конференция «Управленческие науки в современном мире», 25–26 ноября 2014, Москва, Россия.
- Научная сессия математического факультета МПГУ, 19 – 21 марта 2015,
- Международная научная конференция «Дискретная математика, алгебра и их приложения» (DIMA-2015), 14 – 18 сентября 2015, Минск.

Семинары.

- Научный семинар «Проблемы современных информационно-вычислительных систем» под руководством д. ф.-м. н., проф. В. А. Васенина, механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова, 24 февраля 2015.

- Кафедральный семинар «Теория автоматов» кафедры Математической теории интеллектуальных систем механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова под руководством д. ф.-м. н., академика В.Б. Кудрявцева, 6 мая 2015.

- Научный семинар «Актуальные проблемы геометрии и механики» имени проф. В. В. Трофимова под руководством проф. Д. В. Георгиевского, проф. М. В. Шамолина и проф. С. А. Агафонова, механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова, 11 сентября 2015 года.

- Семинар «Математические модели информационных технологий» департамента анализа данных и искусственного интеллекта и МНУЛ «Интеллектуальные системы и структурный анализ» Высшей школы экономики под руководством С.О. Кузнецова, 29 октября 2015 года.

- Семинар по дискретным математическим моделям кафедры математического моделирования НИУ «МЭИ», 17 декабря 2015 года.

Также в 2012 году в ФГОБУ ВПО «Финансовый университет при правительстве Российской Федерации» был выпущен препринт [47] (серия WP1 «Современная математика и концепции инновационного математического образования»).

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в 7 печатных работах, из них 3 статьи в рецензируемых журналах [48–50] и 4 тезисов докладов [51–54].

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, обзора литературы, 5 глав, заключения и библиографии. Общий объем диссертации 136 страниц, из них 129 страницы текста. Библиография включает 54 наименования на 6 страницах.

Краткое содержание работы

Во Введении обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований, показана практическая значимость полученных результатов, представлены выносимые на защиту научные положения.

В первой главе вводятся основные понятия. Главным объектом дальнейшего изучения является класс соответствий Галуа $(\mathrm{inv}_Q, \mathrm{pol})$ между булевыми решетками $\mathcal{P}(\bigcup\limits_{n<\omega} {}^{A^n}A)$ и $\mathcal{P}(\mathcal{P}({}^{Q}A))$.

Во второй главе доказываются три теоремы, которые характеризуют множества $\mathrm{inv}_Q\,\mathcal{F}$ для клонов $\mathcal{F}$ на конечном множестве A, удовлетворяющих условиям Δ^∂, Δ_r^e и Δ^2.

Формулировки нижеследующих теорем о характеризации множеств $\mathrm{inv}_Q\,\mathcal{F}$ используют следующие обозначения. Для каждых множеств $B \subseteq A$, $P \subseteq Q$, элементов $a, b \in A$, различных элементов $p, q \in P$, перестановки $\sigma \in S_A$ и натурального числа r положим

$$H_0(p, B, P) = {}^{\{p\}}B \downharpoonleft P = \{h \in {}^{P}A \colon h(p) \in B\},$$

$$H_1(p, q, \sigma, P) = \{h \in {}^{P}A \colon h(q) = \sigma(h(p))\},$$

$$H_2(p, q, a, b, P) = \{h \in {}^{P}A \colon h(p) = a \vee h(q) = b\}.$$

и, далее,

$$\mathbb{H}_0 = \{H_0(p, B, Q) \colon p \in Q, B \subseteq A\},$$

$$\mathbb{H}_1 = \{H_1(p, q, \sigma, Q) \colon p, q \in Q,\, p \neq q,\, \sigma \in S_A\},$$

$$\mathbb{H}_1^{\mathrm{Id}} = \{H_1(p, q, \mathrm{Id}_A, Q) \colon p, q \in Q,\, p \neq q\},$$

$$\mathbb{H}_2 = \{H_2(p, q, a, b, Q) \colon p, q \in Q,\, p \neq q,\, a, b \in A\},$$

$$\mathbb{H}_3 = \bigcup_{P \subseteq Q, B \in [A]^2} \{H \downharpoonleft Q \colon H \subseteq {}^P B\},$$

$$\mathbb{H}_4(r) = \bigcup_{P \subseteq Q} \{H \downharpoonleft Q \colon H \subseteq {}^P A \wedge (\forall p \in P)|H(p)| < r\},$$

где для каждого множества функций $G \subseteq {}^S A$ и множества R символ $G \downharpoonleft R$ обозначает множество всех функций $f \in {}^{S \cup R} A$ с условием $f \upharpoonright S \in G$.

∂-функцией называется любая функция $w \in \mathcal{O}(A)$, удовлетворяющая условию $(\forall x, y \in A)\, w(xxy) = w(xyx) = w(yxx) = x$.

Теорема 2.2. *Пусть дан клон $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}(A)$ и множество $H \in \mathrm{inv}_Q \mathcal{F}$, причем выполнено одно из двух условий*

1. *клон $\mathcal{F}$ удовлетворяет условию Δ^∂,*
2. *клон $\mathcal{F}$ содержит хотя бы одну ∂-функцию и $(\forall q \in Q)|H(q)| \leq 2$.*

Тогда существует такое множество $\mathbb{H} \subseteq \mathbb{H}_0 \cup \mathbb{H}_1 \cup \mathbb{H}_2$, что $H = \bigcap \mathbb{H}$.

Теорема 2.6. *Пусть даны натуральное число $r \geq 3$, клон $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}(A)$, который удовлетворяет условию Δ_r^e, и множество $H \in \mathrm{inv}_Q \mathcal{F}$. Тогда существует такое множество $\mathbb{H} \subseteq \mathbb{H}_0 \cup \mathbb{H}_1 \cup \mathbb{H}_4(r)$, что $H = \bigcap \mathbb{H}$.*

Теорема 2.10. *Пусть даны клон $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}(A)$, который удовлетворяет условию Δ^2, и множество $H \in \mathrm{inv}_Q \mathcal{F}$. Тогда существует такое множество $\mathbb{H} \subseteq \mathbb{H}_0 \cup \mathbb{H}_1^{\mathrm{Id}} \cup \mathbb{H}_3$, что $H = \bigcap \mathbb{H}$.*

В третьей главе исследуются квазитривиальные клоны с конечным носителем A. Множество (клон) всех квазитривиальных функций на множестве A обозначается символом $\mathcal{V}(A)$. Клон $\mathcal{F}$ называется квазитривиальным, если состоит только из квазитривиальных функций. Основными результатами третьей главы являются две теоремы о симметричных квазитривиальных клонах. Для их формулировки требуются некоторые новые понятия. Символом $\mathcal{E}(A)$ обозначается клон всех селекторных функций на множестве A. Для каждого множества $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}(A)$ символом $\mathcal{F}_{[n]}$ обозначается множество всех n-местных функций из $\mathcal{F}$.

Ранг клона. Для каждого клона $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}(A)$ определим ранг $\mathrm{r}(\mathcal{F})$ клона $\mathcal{F}$ формулой

$$\mathrm{r}(\mathcal{F}) = \begin{cases} \min\{n < \omega \colon \mathcal{F}_{[n]} \neq \mathcal{E}(A)_{[n]}\}, & \text{если } \mathcal{F} \neq \mathcal{E}(A), \\ \omega, & \text{если } \mathcal{F} = \mathcal{E}(A) \end{cases}$$

Свободная склейка. Пусть дано множество $\mathbb{B} \subseteq \mathcal{P}(A)$ и семейство клонов $\{\mathcal{F}_B\}_{B\in\mathbb{B}}$ такое, что $\mathcal{F}_B \subseteq \mathcal{V}(B)$ для каждого $B \in \mathbb{B}$. Легко проверить, что множество всех функций $f \in \mathcal{V}(A)$, удовлетворяющих условию

$$f \restriction B^{<\omega} \in \mathcal{F}_B$$

для всех $B \in \mathbb{B}$, образует клон.

Будем говорить, что семейство $\{\mathcal{F}_B\}_{B\in\mathbb{B}}$ удовлетворяет *условию склеиваемости*, если

$$\mathcal{F}_B \restriction (B \cap C)^{<\omega} = \mathcal{F}_C \restriction (B \cap C)^{<\omega}$$

для всех $B, C \in \mathbb{B}$.

Если семейство клонов $\{\mathcal{F}_B\}_{B\in\mathbb{B}}$, где $\mathcal{F}_B \subseteq \mathcal{V}(B)$, удовлетворяет условию склеиваемости, то для клона $\mathcal{F} = \{f \in \mathcal{V}(B) \colon (\forall B \in \mathbb{B})\, f \restriction B \in \mathcal{F}_B\}$ и каждого множества $B \in \mathbb{B}$ и выполнено

$$\mathcal{F} \restriction B^{<\omega} = \mathcal{F}_B.$$

Этот клон $\mathcal{F}$ называется *свободной склейкой* семейства $\{\mathcal{F}_B\}_{B\in\mathbb{B}}$.

Если $\mathbb{B} \subseteq [A]^2$, то каждое семейство $\{\mathcal{F}_B\}_{B\in\mathbb{B}}$, где $\mathcal{F}_B \subseteq \mathcal{V}(B)$, удовлетворяет условию склеиваемости. В этом случае каждый клон $\mathcal{F}_B$ эквивалентен некоторому постовскому классу P_B, состоящему из функций, сохраняющих ноль и единицу. Если каждый класс P_B симметричный (т.е. замкнутый относительно двойственности), то свободная склейка семейства $\{\mathcal{F}_B\}_{B\in\mathbb{B}}$ зависит только от семейства $\{P_B\}_{B\in\mathbb{B}}$. Если класс P_B есть один и тот же класс P для всех $B \in [A]^2$, семейство $\{P_B\}_{B\in\mathbb{B}}$ называется P-семейством. Согласно постовской классификации существует всего шесть симметричных классов булевых функций, сохраняющих **0** и **1**, а именно

O_1 – класс с базисом $\{x\}$ (класс всех селекторных функций),

D_1 – класс с базисом $\{\overline{x}y \vee \overline{x}z \vee yz\}$ (класс всех самодвойственных функций, сохраняющих **0** и **1**),

D_2 – класс с базисом $\{xy \vee xz \vee yz\}$ (класс всех монотонных самодвойственных функций),

L_4 – класс с базисом $\{x \oplus y \oplus z\}$ (класс всех линейных самодвойственных функций),

A_4 – класс с базисом $\{xy, x \vee y\}$ (класс всех монотонных функций, сохраняющих **0** и **1**),

T_{01} – класс с базисом $\{x \vee y\overline{z}, xy\}$ (класс всех функций, сохраняющих **0** и **1**).

r-клоны и их распространения. Мы используем обозначение A^n_m для множества $\{\mathbf{a} \in A^n \colon |\operatorname{ran}\mathbf{a}| = m\}$. В естественном смысле будем употреблять обозначения $A^n_{<m} \rightleftharpoons \bigcup\limits_{k<m} A^n_k$, $A^{\leq\omega}_{<m} \rightleftharpoons \bigcup\limits_{n<\omega} A^n_{<m}$, $A^{\leq\omega}_{\geq m} \rightleftharpoons \bigcup\limits_{m\leq n<\omega} A^n_{<m}$ и т.п.

Для любого натурального числа r множество $\mathcal{V}(A) \restriction A^{\leq\omega}_{<r}$ замкнуто относительно композиции. Любое замкнутое относительно композиции подмножество $\mathcal{G}$ множества $\mathcal{V}(A) \restriction A^{\leq\omega}_{<r}$, содержащее все функции из $\mathcal{E}(A) \restriction A^{\leq\omega}_{<r}$, мы

будем называть r-клоном. Это множество вместе с операцией композиции и функциями $e \restriction A^{\le\omega}_{<r}$, где $e \in \mathcal{E}(A)$, есть абстрактный клон (определение абстрактного клона см. [29]). Для каждого r-клона $\mathcal{G}$ символом $\mathcal{G}^{\uparrow}$ обозначим множество всех функций $f \in \mathcal{V}(A)$, для которых $f \restriction A^{\le\omega}_{<r} \in \mathcal{G}$. Множество $\mathcal{G}^{\uparrow}$ есть клон; мы будем называть его *распространением* r-клона $\mathcal{G}$.

Для каждого клона $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{V}(A)$ и натурального числа $r \geq 1$ множество $\mathcal{F} \restriction A^{\le\omega}_{<r}$ будем для краткости обозначать символом $\mathcal{F}_{\langle r\rangle}$. Очевидно, множество $\mathcal{F}_{\langle r\rangle}$ есть r-клон и имеет место включение $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}^{\uparrow}_{\langle r\rangle}$.

Устойчивые справа отношения эквивалентности. Последовательности $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in A^{<\omega}$ мы будем называть *подобными*, если существует такая перестановка $\sigma \in S_A$, что $\mathbf{a} = \sigma \cdot \mathbf{b}$. Отношение подобия мы будем обозначать символом $\mathcal{S}$. Отношение $R \subseteq A^{<\omega} \times A^{<\omega}$ мы будем называть *устойчивым справа*, если

1. $R \subseteq \mathcal{S}$,

2. $\mathbf{a}\, R\, \mathbf{b} \to (\mathbf{a} \cdot \tau)\, R\, (\mathbf{b} \cdot \tau)$ для любых последовательностей $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in A^{<\omega}$, натурального числа n и функции $\tau\colon n \to \operatorname{dom} \mathbf{a}$.

Очевидно, для каждых подобных последовательностей $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in A^{<\omega}$ существует единственная биекция $\sigma_{\mathbf{a},\mathbf{b}}\colon \operatorname{ran} \mathbf{a} \to \operatorname{ran} \mathbf{b}$, для которой $\mathbf{b} = \sigma_{\mathbf{a},\mathbf{b}} \cdot \mathbf{a}$. Для каждого устойчивого справа отношения R обозначим символом $\mathcal{F}_R$ множество всех функций $f \in \mathcal{V}(A)$, для которых

$$f(\mathbf{b}) = \sigma_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(f(\mathbf{a}))$$

для всех таких $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \operatorname{dom} f$, что $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in R$. Это множество является клоном.

Отношение $R \subseteq A^{<\omega} \times A^{<\omega}$ мы будем называть *устойчивым слева*, если

3. $\mathbf{a}\, R\, \mathbf{b} \to (\sigma \cdot \mathbf{a})\, R\, (\sigma \cdot \mathbf{b})$ для любых последовательностей $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in A^{<\omega}$ и перестановки σ множества A.

Устойчивые справа и слева отношения эквивалентности на множестве $A^{<\omega}$ описываются явным образом. Каждое такое отношение есть отношение R° для некоторого отношения R из определенного в главе 3 множества $\mathbb{R}(A)$, где

$$R^\circ = \bigcup_{(\mathbf{a},\mathbf{b})\in R} \bigcup_{m<\omega} \{(\mathbf{a}\cdot\tau, \mathbf{b}\cdot\tau) \colon \tau \in m^{\operatorname{dom}\mathbf{a}}\}$$

2-монотонные функции. Для любого натурального числа n любую n-местную функцию $f \in \mathcal{V}(A)$ будем называть 2-монотонной, если

$$(f(\mathbf{a}) = a \wedge \{i < n \colon a_i = a\} \subseteq \{i < n \colon b_i = b\}) \to f(\mathbf{b}) = b$$

для всех $\mathbf{a} = a_0 a_1 \dots a_{n-1} \in A_2^n$, $\mathbf{b} = b_0 b_1 \dots b_{n-1} \in A^n$, $a \in \operatorname{ran}\mathbf{a}$ и $b \in \operatorname{ran}\mathbf{b}$.

Множество (в действительности, клон) всех 2-монотонных квазитривиальных функций f на множестве A обозначим символом $\mathcal{M}(A)$.

Для каждого клона $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}(A)$ определим параметр $\mathbf{m}(\mathcal{F})$ условием

$$\mathrm{m}(\mathcal{F}) = \begin{cases} \min\{n < \omega \colon \mathcal{F}_{\langle n\rangle} \nsubseteq \mathcal{M}(A)_{\langle n\rangle}\}, & \text{если } \mathcal{F} \nsubseteq \mathcal{M}(A), \\ \omega, & \text{иначе} \end{cases}$$

Теперь можно сформулировать основные теоремы главы 3. Первая из этих теорем утверждает, что любой симметричный квазитривиальный клон удовлетворяет одному из условий Δ^∂, Δ^e_r и Δ^2.

Теорема 3.15. *Пусть $|A| \geq 2$ и дан симметричный клон $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{V}(A)$. Пусть $r = \mathrm{r}(\mathcal{F}) < \omega$ и $m = m(\mathcal{F})$. Тогда*

1. *если $r \geq 4$, то $\mathcal{F}$ удовлетворяет условию Δ^e_r;*
2. *если $r = 3$, то $\mathcal{F}$ удовлетворяет одному из условий Δ^e_3, $\Delta^\partial \wedge \Delta^e_m$;*
3. *если $r = 2$, то либо $\mathcal{F}$ удовлетворяет условию Δ^2, либо*
   - *а. $|A| = 4$ и $\mathcal{F}$ удовлетворяет условию Δ^e_3;*
   - *б. $|A| = 3$ и $\mathcal{F}$ удовлетворяет условию Δ^∂.*

Вторая теорема дает классификацию симметричных квазитривиальных клонов с конечным носителем.

Теорема 3.29 (о классификации симметричных квазитривиальных клонов с конечным носителем). *Пусть дан клон $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{V}(A)$. Тогда клон $\mathcal{F}$ симметричный тогда и только тогда, когда может быть представлен в виде пересечения $\mathcal{F}_0 \cap \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 \cap \mathcal{F}_3$, где*

1. $\mathcal{F}_0 = \mathcal{E}(A)^{\uparrow}_{\langle r \rangle}$ *для некоторого натурального числа* $r \geq 1$,
2. $\mathcal{F}_1 = \mathcal{M}(A)^{\uparrow}_{\langle m \rangle}$ *для некоторого натурального числа* $m \geq 1$,
3. $\mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_{R^{\circ}}$ *для некоторого отношения* $R \in \mathbb{R}(A)$,
4. $\mathcal{F}_3$ *есть свободная склейка* P-*семейства клонов* $\{\mathcal{F}_B\}_{B \in [A]^2}$ *для некоторого постовского класса* $\mathrm{P} \in \{\mathrm{O}_1, \mathrm{D}_1, \mathrm{D}_2, \mathrm{L}_4, \mathrm{A}_4, \mathrm{T}_{01}\}$.

В четвертой главе производится полная классификация симметричных классов r-функций выбора на конечном множестве, обладающих свойством Эрроу. Определим несколько специальных множеств $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{C}_r(A)$.

Предположим вначале, что $|A| = 4$ и $r = 3$. Тогда легко проверить, что для каждой пары различных множеств $p, q \in [A]^3$ существует единственная перестановка σ из группы Клейна $K \subseteq S_A$, для которой имеет место равенство $q = \sigma(p)$. Обозначим такую перестановку символом $\sigma_{p,q}$, а символом $\mathfrak{C}_3^K(A)$ множество всех функций $\mathfrak{c} \in \mathfrak{C}_3(4)$, которые удовлетворяют равенству

$$\mathfrak{c}(q) = \sigma_{p,q}\mathfrak{c}(p) \text{ для всех различных } p, q \in [A]^3.$$

Теперь предположим, что $r = 2$. Каждой функции $\mathfrak{c} \in \mathfrak{C}_2(A)$ поставим в соответствие во взаимно-однозначное соответствие полный ориентированный граф (*турнир*) $\Gamma_{\mathfrak{c}} = (A, E)$, где

$$E = \{(a, b) \in A \times A \colon a \neq b \wedge \mathfrak{c}(\{a, b\}) = b\}.$$

Определим множества $\mathfrak{C}_2^0(A)$, $\mathfrak{C}_2^1(A)$ как множества всех функций $\mathfrak{c} \in \mathfrak{C}_2(A)$, для которых каждая вершина графа $\Gamma_{\mathfrak{c}}$ имеет четную (соответственно, нечетную) *степень захода.*

Теперь мы можем сформулировать теорему.

Теорема 4.8 (о простом свойстве Эрроу) *Для любого конечного множества A и натурального числа r любое непустое собственное симметричное подмножество $\mathfrak{D}$ множества $\mathfrak{C}_r(A)$ не обладает простым свойством Эрроу в этих и только этих случаях:*

(i) $r = 2$, $|A| = 0,\ 1 \pmod 4$ *и* $\mathfrak{D} = \mathfrak{C}_2^0(A)$,

(ii) $r = 2$, $|A| = 0,\ 3 \pmod 4$ *и* $\mathfrak{D} = \mathfrak{C}_2^1(A)$,

(iii) $r = 2$, $|A| = 0 \pmod 4$ *и* $\mathfrak{D} = \mathfrak{C}_2^0(A) \cup \mathfrak{C}_2^1(A)$,

(iv) $r = 3$, $|A| = 4$ *и* $\mathfrak{D} = \mathfrak{C}_3^{\mathrm{K}}(A)$.

В пятой главе теорема 4.8 обобщается на случай *общего свойства Эрроу.* Пусть даны непустые конечные множества A, Q и $H \subseteq {}^{Q}A$. Определим некоторые классы клонов на множестве H.

Для любого натурального числа n функцию $f \in \mathcal{O}(H)_{[n]}$ будем называть

1. *локально квазитривиальной*, если

$$f(h_0 h_1 \dots h_{n-1})(q) \in \{h_0(q), h_1(q), \dots, h_{n-1}(q)\}$$

для всех $h_0, h_1, \dots, h_{n-1} \in H$ и $q \in Q$,

2. *вполне локальной*, если

$$h_0(q)h_1(q)\dots h_{n-1}(q) = h'_0(q)h'_1(q)\dots h'_{n-1}(q) \to$$
$$\to f(h_0 h_1 \dots h_{n-1})(q) = f(h'_0 h'_1 \dots h'_{n-1})(q)$$

для всех $h_0, h_1, \dots, h_{n-1}, h'_0, h'_1, \dots, h'_{n-1} \in H$ и $q \in Q$.

Множество (в действительности, клон) всех локально квазитривиальных функций $f \in \mathcal{O}(H)$ мы будем обозначать символом $\mathcal{LV}(H)$, а множество (в действительности, клон) всех вполне локальных функций $f \in \mathcal{O}(H)$ мы будем обозначать символом $\mathcal{LW}(H)$.

Множество $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{C}_r(A)$ *обладает общим свойством Эрроу*, если каждая вполне локальная и локально квазитривиальная функция $f \in \mathcal{O}(\mathfrak{C}_r(A))$, сохраняющая множество $\mathfrak{D}$, является проекцией, т.е.

$$\operatorname{pol}\mathfrak{D} \cap \mathcal{LV}(\mathfrak{C}_r(A)) \cap \mathcal{LW}(\mathfrak{C}_r(A)) = \mathcal{E}(\mathfrak{C}_r(A))$$

(Здесь множество $\mathfrak{D}$ рассматривается как унарный предикат на множестве $\mathfrak{C}_r(A)$).

В главе 5 доказано, что теорема 4.8 остается верной, если заменить слово «простым» на слово «общим».

Теорема 5.19 (об общем свойстве Эрроу) *Для любого конечного множества A и натурального числа r любое непустое собственное симметричное подмножество $\mathfrak{D}$ множества $\mathfrak{C}_r(A)$ не обладает общим свойством Эрроу в этих и только этих случаях:*

(i) $r = 2$, $|A| = 0,\ 1 \pmod 4$ *и* $\mathfrak{D} = \mathfrak{C}_2^0(A)$,

(ii) $r = 2$, $|A| = 0,\ 3 \pmod 4$ *и* $\mathfrak{D} = \mathfrak{C}_2^1(A)$,

(iii) $r = 2$, $|A| = 0 \pmod 4$ *и* $\mathfrak{D} = \mathfrak{C}_2^0(A) \cup \mathfrak{C}_2^1(A)$,

(iv) $r = 3$, $|A| = 4$ *и* $\mathfrak{D} = \mathfrak{C}_3^{\mathrm{K}}(A)$.

Положения, выносимые на защиту:

1. Построение полной классификации симметричных квазитривиальных клонов с конечным носителем.

2. Построение полной классификации симметричных классов r-функций выбора, обладающих общим свойством Эрроу.

Благодарности. Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю профессору Максиму Владимировичу Шамолину за постановку задачи и многочисленные плодотворные обсуждения результатов, а также заведующему кафедрой Математической теории интеллектуальных систем механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова академику, профессору Кудрявцеву Валерию Борисовичу за поддержку и доброжелательное внимание к работе.

Глава 1

Клоны и соответствия Галуа для классов дискретных функций

В этой главе мы зафиксируем основные определения и обозначения, которые будем использовать ниже.

Для любых множеств Q и A множество всех функций $h\colon Q \to A$ обозначается символом ${}^{Q}\!A$. Ограничением $h \restriction P$ произвольной функции $h \in {}^{Q}\!A$ на множество P называется функция $h \cap (P \times A)$. *Продолжением* любой функции $h \in {}^{Q}\!A$ на множество P мы будем называть любую функцию $g \in {}^{P \cup Q}\!A$ с условием $g \restriction Q = h$. Множество всех продолжений функции $h\colon Q \to A$ на множество P мы будем обозначать символом $h \downharpoonleft P$. Если H есть произвольное множество, состоящее из функций (вообще говоря, с различными областями определения), то символом $H \restriction P$ мы будем обозначать множество $\{h \restriction P\colon h \in H\}$ всех ограничений функций из H на множество P, а символом $H \downharpoonleft P$ множество $\bigcup\limits_{h \in H} h \downharpoonleft P$ всех продолжений функций из H на множество P. Для любой функции $h \in {}^{Q}\!A$ и множества $P \subseteq Q$ символ $h(P)$ обозначает множество $\{h(p)\colon p \in P\}$. Аналогично, для любого множества $H \subseteq {}^{Q}\!A$ и элемента $q \in Q$ символ $H(q)$ обозначает множество $\{h(p)\colon h \in H\}$.

Множество и группа перестановок произвольного множества A обозначается символом S_A. Тождественная перестановка множества A обозначается символом Id_A. Этим же символом мы будем обозначать отношение равенства на множестве A, если символ «$=$» оказывается неудобным. Циклические перестановки будут обозначаться знакосочетаниями вида $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$.

Для каждого натурального числа n и каждого множества A множество всех n-элементных подмножеств множества A обозначается символом $[A]^n$:

$$[A]^n = \{B \subseteq A\colon |B| = n\}.$$

Для любого натурального числа n декартова степень A^n произвольного множества A отождествляется с множеством ${}^nA$ функций $\mathbf{a}\colon n \to A$ (здесь $n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ в соответствии со стандартным определением множества натуральных чисел); поэтому для любой n-ки $\mathbf{a} \in A^{<\omega}$ мы употребляем стандартные обозначения $\operatorname{dom} \mathbf{a}$ и $\operatorname{ran} \mathbf{a}$ для ее области определения и области значений соответственно. Будем использовать обозначение A^n_m для множества $\{\mathbf{a} \in A^n \colon |\operatorname{ran} \mathbf{a}| = m\}$. В естественном смысле будем употреблять обозначения $A^n_{<m} \rightleftharpoons \bigcup\limits_{k<m} A^n_k$, $A^{<\omega}_{<m} \rightleftharpoons \bigcup\limits_{n<\omega} A^n_{<m}$, $A^{<\omega}_{\geq m} \rightleftharpoons \bigcup\limits_{m \leq n<\omega} A^n_{<m}$ и т.п. При явной записи последовательностей мы, как правило, будем опускать служебные символы, т.е. использовать знакосочетания вида abc, $a_1a_2\ldots a_n$ и т.п. Соответственно, конкатенацию последовательностей $\mathbf{a} = a_0a_1\ldots a_{n-1}$ и $\mathbf{b} = b_0b_1\ldots b_{m-1}$ мы обозначаем пустым символом: $\mathbf{ab} = a_0a_1\ldots a_{n-1}b_0b_1\ldots b_{m-1}$. Для последовательностей, состоящих из последовательностей $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ мы сохраним обозначение $(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)$, каждый раз особо это оговаривая.

Для обозначения композиции одноместных функций мы будем использовать символ «$\cdot$». Например, для всякой последовательности $\mathbf{a} = a_0a_1\ldots a_{n-1} \in A^n$ и функции $\sigma\colon A \to A$ запись $\sigma \cdot \mathbf{a}$ обозначает последовательность

$$\sigma(a_0)\sigma(a_1)\ldots\sigma(a_{n-1}).$$

Для каждой n-ки функций $\mathbf{f} = f_0f_1\ldots f_{n-1} \in ({}^QA)^n$ символом $\mathbf{f}^*$ мы обозначаем функцию из множества Q в множество A^n, определенную равенством

$$\mathbf{f}^*(q) = f_0(q)f_1(q)\ldots f_{n-1}(q)$$

для всех $q \in Q$.

Каждая функция $f \in {}^{A^n}\!A$ называется n-местной или n-арной функцией на множестве A, а натуральное число n *арностью* функции f. Множество всех функций произвольной конечной арности на множестве A, т.е. множество $\bigcup\limits_{n<\omega} {}^{A^n}\!A$, обозначается символом $\mathcal{O}(A)$. Для краткости для любого множества

$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}(A)$ и натурального числа n вместо $\mathcal{F} \cap {}^{A^n}\!A$ будем писать $\mathcal{F}_{[n]}$. В частности, вместо ${}^{A^n}\!A$ будем, как правило, писать $\mathcal{O}(A)_{[n]}$.

Функция из множества $\mathcal{O}(A)_{[n]}$, которая ставит в соответствие каждой n-ке $\mathbf{a} = a_0 a_1 \ldots a_{n-1} \in A^n$ элемент a_i для некоторого фиксированного номера $i < n$, называется n-местной i-ой *проекцией* или *селекторной функцией* и обозначается символом e_i^n. Множество всех селекторных функций на множестве A будем обозначать символом $\mathcal{E}(A)$.

Множество $\mathcal{O}(A)$, как правило, рассматривается вместе с частичной операцией *композиции*. Композиция определена на множестве всех кортежей

$$f_0 f_1 f_2 \ldots f_n \in (\mathcal{O}(A))^{<\omega},$$

для которых функция f_0 имеет арность n, а арности всех функций $f_1, f_2, \ldots, f_n$ совпадают. Каждому подходящему кортежу $f_0 f_1 f_2 \ldots f_n$ операция композиции ставит в соответствие функцию $f_0 \cdot (f_1 f_2 \ldots f_n)^*$.

Очевидно, функция $g = f_0 \cdot (f_1 f_2 \ldots f_n)^*$ удовлетворяет условию

$$g(\mathbf{a}) = f_0(f_1(\mathbf{a}) f_2(\mathbf{a}) \ldots f_n(\mathbf{a}))$$

для всех $\mathbf{a} \in \operatorname{dom} f_1$. Как правило, вместо выражений вида $f_0 \cdot (f_1 f_2 \ldots f_n)^*$ мы будем использовать более привычную запись $f_0(f_1, f_2, \ldots, f_n)$.

Клоном на множестве A называется любое множество $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}(A)$, которое содержит все селекторные функции и замкнуто относительно композиции, см. [29]. Эквивалентно можно определить клон на множестве A как любое *функционально* (или *термально*) замкнутое множество $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}(A)$, которое содержит все селекторные функции, см. [33]. Если $\mathcal{F}$ есть клон на множестве A, то множество A называется носителем клона $\mathcal{F}$.

Клоны $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ с носителями A и B соответственно мы будем называть *эквивалентными*, если существуют такие взаимно однозначные функции $\alpha\colon A \to B$ и $\beta\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$, что для каждого натурального числа n и функции $f \in \mathcal{F}_{[n]}$ функция $\alpha(f)$ n-арна и

$$\alpha(f)(\mathbf{b}) = \beta \cdot f(\beta^{-1} \cdot \mathbf{b})$$

для всех $\mathbf{b} \in B^n$.

В теории функционально замкнутых классов часто рассматривают соответствие Галуа, порожденное *отношением сохранения функцией f предиката P*. Пусть даны множество A, натуральные числа n, m, функция $f \in \mathcal{O}(A)_{[n]}$ и предикат $P \subseteq A^m$. Говорят, что функция f *сохраняет предикат* P, а предикат P *сохраняется функцией* f, если для любых n кортежей

$$a_{11}a_{12}\dots a_{1m},\ a_{21}a_{22}\dots a_{2m},\ \dots,\ a_{n1}a_{n2}\dots a_{nm},$$

принадлежащих предикату P, кортеж

$$f(a_{11}a_{21}\dots a_{n1})f(a_{12}a_{22}\dots a_{n2})\dots f(a_{1m}a_{2m}\dots a_{nm})$$

также принадлежит предикату P.

Для каждого множества $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}(A)$ и $\mathbb{P} \subseteq \bigcup\limits_{n<\omega} \mathcal{P}(A^n)$ символом $\operatorname{inv}\mathcal{F}$ обозначается множество всех предикатов, которые сохраняются каждой функцией $f \in \mathcal{F}$, и для каждого множества $\mathbb{P} \subseteq \bigcup\limits_{n<\omega} \mathcal{P}(A^n)$ символом $\operatorname{pol}\mathbb{P}$ обозначается множество всех функций $f \in \mathcal{O}(A)$, которые сохраняют каждый предикат $P \in \mathbb{P}$. Хорошо известно (см. [41, 42]), что пара $(\operatorname{inv}, \operatorname{pol})$ есть соответствие Галуа между булевыми решетками подмножеств множеств $\mathcal{O}(A)$ и $\bigcup\limits_{n<\omega} \mathcal{P}(A^n)$, причем Галуа-замкнутые множества $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}(A)$ суть в точности клоны.

Иногда удобно говорить о клонах в теоретико-модельных терминах. Для этого каждому клону $\mathcal{F}$ можно сопоставить модель $\mathfrak{M}_\mathcal{F}$ некоторого языка L без предикатных символов, для которой множество $\mathcal{F}$ совпадает с множеством интерпретаций функциональных символов языка L (носитель модели $\mathfrak{M}_\mathcal{F}$, очевидно, совпадает с носителем клона $\mathcal{F}$). При необходимости явно обозначить интерпретацию $\mathcal{I}$ функциональных символов языка L, мы будем вместо $\mathfrak{M}_\mathcal{F}$ записывать $\mathfrak{M}_{\mathcal{F},\mathcal{I}}$. С учетом этих обозначений, эквивалентность клонов $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ равносильна изоморфности моделей $\mathfrak{M}_{\mathcal{F},\mathcal{I}}$ и $\mathfrak{M}_{\mathcal{G},\mathcal{J}}$ для некоторых интерпретаций $\mathcal{I}$ и $\mathcal{J}$ функциональных символов некоторого языка L. Кроме того, для любого клона $\mathcal{F}$ n-местный предикат P принадлежит множеству $\operatorname{inv}\mathcal{F}$ тогда и только тогда, когда P есть носитель некоторой подмодели модели $(\mathfrak{M}_\mathcal{F})^n$.

В силу специфики решаемой задачи нам будет также удобно говорить об *отношении сохранения функцией* $f \in \mathcal{O}(A)$ *множества функций* $H \subseteq {}^{Q}A$. Пусть даны произвольные множества A и Q, натуральное число n, функция $f \in \mathcal{O}(A)_{[n]}$ и множество $H \subseteq {}^{Q}A$. Положим

$$f \cdot H = \{f \cdot \mathbf{h}^* \colon \mathbf{h} \in H^n\}.$$

Для каждого множества $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}(A)$ положим

$$\mathcal{F} \cdot H = \bigcup_{f \in \mathcal{F}} f \cdot H.$$

Будем говорить, что функция f (множество $\mathcal{F}$) *сохраняет* множество H, а множество H *сохраняется* функцией f (соответственно, множеством $\mathcal{F}$) если имеет место включение $f \cdot H \subseteq H$ (соответственно, $\mathcal{F} \cdot H \subseteq H$). Не опасаясь разночтений, множество всех функций $f \in \mathcal{O}(A)$, которые сохраняют множество функций $H \subseteq {}^{Q}A$, мы будем обозначать символом $\operatorname{pol} H$. Множество всех множеств $H \subseteq {}^{Q}A$, которые сохраняются функцией f (множеством $\mathcal{F}$) мы будем обозначать символом $\operatorname{inv}_Q f$ (соответственно, $\operatorname{inv}_Q \mathcal{F}$). Очевидно,

$$\operatorname{inv}_Q \mathcal{F} = \bigcap_{f \in \mathcal{F}} \operatorname{inv}_Q f.$$

Несложно проверить, что имеет место следующее предложение.

Предложение 1.1. *Для любых непустых множеств Q и A пара* $(\operatorname{inv}_Q, \operatorname{pol})$ *есть соответствие Галуа между булевыми решетками $\mathcal{P}(\mathcal{P}({}^{Q}A))$ и $\mathcal{P}(\mathcal{O}(A))$, причем каждое Галуа-замкнутое множество $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}(A)$ есть клон.*

Следующее предложение описывает простейшие свойства множеств $\operatorname{inv}_Q \mathcal{F}$.

Предложение 1.2. *Пусть даны множества A, P, Q, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}(A)$. Тогда для любых множеств G, H и отображения $\sigma \colon P \to Q$*

1. *если $G, H \in \operatorname{inv}_Q \mathcal{F}$, то $G \cap H \in \operatorname{inv}_Q \mathcal{F}$;*

2. если $H \in \operatorname{inv}_Q \mathcal{F}$, то $H \upharpoonright P \in \operatorname{inv}_{P\cap Q} \mathcal{F}$ и $H \downharpoonright Q \in \operatorname{inv}_{P\cup Q} \mathcal{F}$;

3. если $H \in \operatorname{inv}_Q \mathcal{F}$, то $H \cdot \sigma = \{h \cdot \sigma \colon h \in H\} \in \operatorname{inv}_P \mathcal{F}$.

Доказательство. Несложной проверкой. □

Заметим, что для любого клона $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}(A)$ множество $\operatorname{inv}_Q \mathcal{F}$ можно определить еще следующим образом. Для каждого натурального числа n, функции $f \in \mathcal{O}(A)_{[n]}$ и множества Q определим функцию $f^Q \colon ({}^Q A)^n \to {}^Q A$ посредством равенства

$$f^Q(\mathbf{f}) = f \cdot \mathbf{f}^*$$

для всех $\mathbf{f} \in ({}^Q A)^n$.

Легко проверить, что для любого клона $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}(A)$ множество $\{f^Q \colon f \in \mathcal{F}\}$ образует клон на множестве ${}^Q A$. Этот клон мы будем обозначать символом $\mathcal{F}^Q$. Имеет место следующее предложение.

Предложение 1.3. *Для любых множеств A, Q, $H \subseteq {}^Q A$ и клона $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}(A)$ множество H принадлежит множеству $\operatorname{inv}_Q \mathcal{F}$ тогда и только тогда, когда ограничение $\mathcal{F}^Q \upharpoonright H^{<\omega}$ есть клон и тогда и только тогда, когда множество H есть одноместный предикат из множества $\operatorname{inv} \mathcal{F}^Q$.*

Доказательство. Несложной проверкой . □

Между отношениями сохранения функцией f предиката P и сохранения функцией f множества функций H имеется непосредственная связь. Действительно, при отождествлении n-ок из A^n и функций $\mathbf{a} \colon n \to A$ каждый предикат $P \subseteq A^n$ отождествляется с некоторым подмножеством множества ${}^n A$, которое, как несложно видеть, сохраняется функцией $f \in \mathcal{O}(A)$ тогда и только тогда, когда этой функцией сохраняется предикат P. С другой стороны, для любого конечного занумерованного множества $Q = \{q_0, q_1, \ldots, q_n\}$ функция $f \in \mathcal{O}(A)$ сохраняет множество $H \subseteq {}^Q A$ тогда и только тогда, когда она сохраняет n-местный предикат $\{h(q_0)h(q_1)\ldots h(q_n) \colon h \in H\}$. Таким образом, любое утверждение о клонах в терминах сохранения функцией f предиката P может быть легко переформулировано в терминах сохранения функцией f множества функций H, и (для клонов на конечном множестве) наоборот .

В завершении этого раздела заметим, что для каждого натурального числа n и клона $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}(A)$, очевидно, выполнено

$$\mathcal{F}_{[n]} \in \operatorname{inv}_{A^n} \mathcal{F}.$$

Из этого немедленно следует, что каждый клон однозначно характеризуется множествами $\operatorname{inv}_\kappa \mathcal{F}$, где кардинал κ меньше $\max\{\omega, |A|^+\}$ (или, если угодно, множеством $\operatorname{inv}_\kappa \mathcal{F}$, где $\kappa = \max\{\omega, |A|\}$). С учетом сделанных замечаний, это влечет известное утверждение (см., напр, [41, 42]) о том, что каждый клон $\mathcal{F}$ с конечным носителем однозначно характеризуется множеством $\operatorname{inv} \mathcal{F}$.

Глава 2

Теоремы о сохранении

На протяжении данного раздела будем считать фиксированными непустые конечные множества A и Q. Цель данного раздела – описать множества $\operatorname{inv}_Q \mathcal{F}$ для клонов $\mathcal{F}$ на множестве A, удовлетворяющих некоторым определенным ниже условиям Δ^∂, Δ^e_r и Δ^2, каждое из которых состоит в том, что клон $\mathcal{F}$ включает некоторое множество функций. Эти результаты родственны основным теоремам работ [44] и [45].

Определение 2.1. *Пусть дан клон $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}(A)$ и натуральное число $r \geq 2$. Будем говорить, что клон $\mathcal{F}$*

1. удовлетворяет условию Δ^∂, *если для любой последовательности $\mathbf{a} \in A_3^3$ и элемента $a \in \operatorname{ran} \mathbf{a}$ существует такая функция $w \in \mathcal{F}_{[3]}$, что*
$$w(\mathbf{a}) = a \text{ и } w(xxy) = w(xyx) = w(yxx) = x \text{ для всех } x, y \in A$$
2. удовлетворяет условию Δ^ℓ, *если для любой последовательности $\mathbf{a} \in A_3^3$ и элемента $a \in \operatorname{ran} \mathbf{a}$ существует такая функция $w \in \mathcal{F}_{[3]}$, что*
$$w(\mathbf{a}) = a \text{ и } w(xxy) = w(xyx) = w(yxx) = y \text{ для всех } x, y \in A$$
3. удовлетворяет условию Δ^e_r, *если существует такое натуральное число $i < r$, что для любой последовательности $\mathbf{a} \in A^r_r$ и элемента $a \in \operatorname{ran} \mathbf{a}$ существует такая функция $w \in \mathcal{F}_{[r]}$, что*
$$w(\mathbf{a}) = a \text{ и } w(\mathbf{x}) = x_i \text{ для всех } \mathbf{x} = x_0 x_1 \ldots x_{r-1} \in A^r_{<r};$$
4. удовлетворяет условию Δ^2, *если для любых последовательностей $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in A^2_2$ с различными областями значений и элементов $a \in \operatorname{ran} \mathbf{a}$ и $b \in \operatorname{ran} \mathbf{b}$ существует такая функция $w \in \mathcal{F}_{[2]}$, что*
$$w(\mathbf{a}) = a, \; w(\mathbf{b}) = b \text{ и } w(xx) = x \text{ для всех } x \in A.$$

Ниже будет использоваться параметр r, который помимо натуральных значений может принимать значение ω. Чтобы не делать специальных оговорок, мы будем считать, что условие Δ^e_ω выполнено для любого клона.

Для формулировки и доказательства теорем из данного раздела нам потребуются следующие определения и обозначения.

Для каждых множеств $B \subseteq A$, $P \subseteq Q$, элементов $a, b \in A$, различных элементов $p, q \in P$, перестановки $\sigma \in S_A$ и натурального числа r положим

$$
\begin{aligned}
&H_0(p, B, P) = {}^{\{p\}}B \downharpoonleft P = \{h \in {}^P\!A \colon h(p) \in B\},\\
&H_1(p, q, \sigma, P) = \{h \in {}^P\!A \colon h(q) = \sigma(h(p))\},\\
&H_2(p, q, a, b, P) = \{h \in {}^P\!A \colon h(p) = a \vee h(q) = b\}.
\end{aligned}
$$

и, далее,

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{H}_0 = \{H_0(p, B, Q) \colon p \in Q, B \subseteq A\},\\
&\mathbb{H}_1 = \{H_1(p, q, \sigma, Q) \colon p, q \in Q,\ p \neq q,\ \sigma \in S_A\},\\
&\mathbb{H}_1^{\mathrm{Id}} = \{H_1(p, q, \mathrm{Id}_A, Q) \colon p, q \in Q,\ p \neq q\},\\
&\mathbb{H}_2 = \{H_2(p, q, a, b, Q) \colon p, q \in Q,\ p \neq q,\ a, b \in A\},\\
&\mathbb{H}_3 = \bigcup_{P \subseteq Q, B \in [A]^2} \{H \downharpoonleft Q \colon H \subseteq {}^P\!B\},\\
&\mathbb{H}_4(r) = \bigcup_{P \subseteq Q} \{H \downharpoonleft Q \colon H \subseteq {}^P\!A \wedge (\forall p \in P)|H(p)| < r\}.
\end{aligned}
$$

Будем говорить, что множество $H \subseteq {}^Q\!A$ *слабо отделяет* p от q *в точке* a, если множество H содержит такие функции h_1 и h_2, что

$$h_1(p) = h_2(p) = a \text{ и } h_1(q) \neq h_2(q).$$

Если множество H слабо отделяет элемент p от элемента q или элемент q от элемента p хотя бы в одной точке, будем просто говорить, что оно *слабо отделяет* элементы p и q.

Будем говорить, что множество H *сильно отделяет* элемент p от элемента q *в точке* a, если для каждого элемента $b \in H(q)$ множество H содержит такую функцию h, что

$$h(p) = a \wedge h(q) = b.$$

Любую функцию $w \in \mathcal{O}(A)_{[3]}$, которая удовлетворяет равенствам

$$w(xxy) = w(xyx) = w(yxx) = x \text{ для всех } x, y \in A,$$

будем называть *∂-функцией.*

Любую функцию $w \in \mathcal{O}(A)_{[3]}$, которая удовлетворяет равенствам

$$w(xxy) = w(xyx) = w(yxx) = y \text{ для всех } x, y \in A,$$

будем называть *ℓ-функцией.*

Теорема 2.2. *Пусть дан клон $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}(A)$ и множество $H \in \operatorname{inv}_Q \mathcal{F}$, причем выполнено одно из двух условий*

1. *клон $\mathcal{F}$ удовлетворяет условию Δ^{∂},*

2. *клон $\mathcal{F}$ содержит хотя бы одну ∂-функцию и $(\forall q \in Q)|H(q)| \leq 2$.*

Тогда существует такое множество $\mathbb{H} \subseteq \mathbb{H}_0 \cup \mathbb{H}_1 \cup \mathbb{H}_2$, что $H = \bigcap \mathbb{H}$.

Доказательство. Если множество H пусто, то теорема верна, поскольку для произвольного $q \in Q$

$$\emptyset = H_0(q, \emptyset, Q) \in \mathbb{H}_0.$$

Если множество Q состоит из единственного элемента q, то теорема также верна, поскольку в этом случае

$$H = H_0(q, H(q), Q) \in \mathbb{H}_0.$$

В дальнейшем будем считать, что $|Q| \geq 2$ и $|H| \geq 1$.

Положим $\mathbb{H} = \{H' \in \mathbb{H}_0 \cup \mathbb{H}_1 \cup \mathbb{H}_2 \colon H \subseteq H'\}$. Очевидно,

$$H \subseteq \bigcap \mathbb{H}.$$

Значит, для доказательства теоремы достаточно доказать обратное включение.

Положим $\mathbb{H}^{(2)} = \{(H \restriction P) \downharpoonleft Q \colon P \in [Q]^2\}$. Для доказательства теоремы достаточно доказать включения

$$\bigcap \mathbb{H} \subseteq \bigcap \mathbb{H}^{(2)} \text{ и } \bigcap \mathbb{H}^{(2)} \subseteq H.$$

Лемма 2.3. *Пусть даны такие элементы $p, q \in Q$ и $a \in A$, что множество H слабо отделяет элемент p от элемента q в точке a. Тогда множество H сильно отделяет элемент p от элемента q в точке a.*

Доказательство. Лемма, очевидно, верна, если $|H(q)| \leq 2$. Пусть, напротив, $|H(q)| \geq 3$. Для произвольного элемента $b \in H(q)$ предположим, что множество H не содержит функции h, которая на элементе p принимает значение a, а на элементе q значение b, и придем к противоречию. Пользуясь условием леммы, выберем такие функции $h_0, h_1, h_2 \in H$ и различные элементы $d, c \in A$, что

$$h_0(p) = h_1(p) = a,\ h_0(q) = c,\ h_1(q) = d,\ h_2(q) = b.$$

По сделанному предположению, элемент b не принадлежит множеству $\{c, d\}$, т.е. $cdb \in A_3^3$. Из условий следует, что существует такая ∂-функция $w \in \mathcal{F}_{[3]}$, что $w(cdb) = b$. Рассмотрим функцию $h = w(h_0, h_1, h_2)$. Она принадлежит множеству H, т.к. $H \in \mathrm{inv}_Q \mathcal{F}$. Легко убедиться в справедливости равенств $f(p) = a$ и $f(q) = b$, противоречие. $\square$

Лемма 2.4. *Пусть дано множество $P = \{p, q\} \in [Q]^2$. Тогда выполнен один из следующих случаев*

1. $H \restriction P = H_0(p, H(p), P) \cap H_0(q, H(q), P)$,
2. $H \restriction P = H_0(p, H(p), P) \cap H_0(q, H(q), P) \cap H_1(p, q, \sigma, P)$ *для некоторой перестановки* $\sigma \in S_A$,
3. $H \restriction P = H_0(p, H(p), P) \cap H_0(q, H(q), P) \cap H_2(p, q, a, b, P)$ *для некоторых элементов* $a, b \in A$.

Доказательство. Пусть множество H не отделяет слабо p и q. Поскольку множество H не отделяет слабо p от q, существует функция $\sigma\colon A \to A$, для которой

$$h(q) = \sigma(h(p))$$

для всех $h \in H$. Очевидно, $\sigma(H(p)) = H(q)$. Если функция σ не инъективна на $H(p)$, то множество H слабо отделяет q от p, что противоречит допущению. Значит функцию $\sigma \restriction H(p)$ есть биекция множеств $H(p)$ и $H(q)$, следовательно, функцию σ можно выбрать взаимно-однозначной на A. Тогда выполнен случай 2.

Пусть множество H слабо отделяет один из элементов p, q от другого по крайней мере в двух различных точках. Без ограничения общности будем считать, что H слабо, а по лемме 2.3 и сильно отделяет p от q хотя бы в двух различных точках. Тогда множество H слабо, а по лемме 2.3 и сильно отделяет q от p в любой точке $b \in H(q)$. Значит, выполнен случай 1.

Пусть неверны предыдущие предположения. Без ограничения общности будем считать, что множество H слабо, а по лемме 2.3 и сильно отделяет p от q в единственной точке $a \in H(p)$. Если множество $H(p)$ одноэлементно, очевидно, имеет место случай 1. Пусть $|H(p)| \geq 2$. Тогда для любого элемента $a' \in H(p) \setminus \{a\}$ и функции $h \in H$, которая принимает значение a' на элементе p, множество H слабо, а по лемме 2.3 и сильно отделяет q от p в точке $b = h(q)$. В рассматриваемом случае такая точка b единственна. Поэтому для каждой функции $h \in H$ имеет место дизъюнкция $h(p) = a \vee h(q) = b$. Значит, выполнен случай 3. □

Теперь легко доказать включение $\bigcap \mathbb{H} \subseteq \bigcap \mathbb{H}^{(2)}$. Действительно, из леммы 2.4 следует, что для каждого множества $P \in [Q]^2$ существует множество множество $\mathbb{H}_P \subseteq \mathbb{H}_0 \cup \mathbb{H}_1 \cup \mathbb{H}_2$, для которого

$$(H \restriction P) \downharpoonleft Q = \bigcap \mathbb{H}_P.$$

В силу очевидного включения $H \subseteq (H \upharpoonright P) \downharpoonleft Q$, множество H есть подмножество любого множества $H' \in \mathbb{H}_P$. Значит, $\mathbb{H}_P \subseteq \mathbb{H}$, откуда

$$\bigcap \mathbb{H}^{(2)} = \bigcap_{P \in [Q]^2} \bigcap \mathbb{H}_P \supseteq \bigcap \mathbb{H}.$$

Теперь докажем включение

$$\bigcap \mathbb{H}^{(2)} \subseteq H.$$

Для этого мы докажем, что для каждого множества $Q' \subseteq Q$, $|Q'| \geq 2$, имеет место включение

$$\left(\bigcap \mathbb{H}^{(2)}\right) \upharpoonright Q' \subseteq H \upharpoonright Q'.$$

Индукция по мощности множества Q'. Если $|Q'| = 2$, включение сразу следует из определения множества $\mathbb{H}^{(2)}$. Пусть теперь $|Q'| \geq 3$, и предположение индукции выполнено.

Пусть f есть произвольная функция из множества $\left(\bigcap \mathbb{H}^{(2)}\right) \upharpoonright Q'$. Надо доказать, что существует функция $h \in H$, для которой $h \upharpoonright Q' = f$. Выберем произвольные различные элементы $p, q \in Q'$. По предположению индукции множество H содержит функции f_p и f_q, которые совпадают с функцией f соответственно на множествах $Q' \setminus \{p\}$ и $Q' \setminus \{q\}$. Кроме того, по определению множества $\mathbb{H}^{(2)}$ существует функция $f_{p,q} \in H$, для которой справедливы равенства $f_{p,q}(p) = f(p)$ и $f_{p,q}(q) = f(q)$. Выберем произвольную ∂-функцию $w \in \mathcal{F}_{[3]}$ и положим $h = w(f_p, f_q, f_{p,q})$. Функция h принадлежит множеству H, т.к. $H \in \mathrm{inv}_Q \mathcal{F}$. Кроме того, имеют место равенства

$$h(p) = w(f_p(p) f_q(p) f_{p,q}(p)) = w(f_p(p) f(p) f(p)) = f(p),$$
$$h(q) = w(f_p(q) f_q(q) f_{p,q}(q)) = w(f(q) f_q(q) f(q)) = f(q),$$
$$h(x) = w(f_p(x) f_q(x) f_{p,q}(x)) = w(f(x) f(x) f_{p,q}(x)) = f(x)$$

для всех элементов $x \in Q' \setminus \{p, q\}$, что окончательно доказывает шаг индукции и теорему. □

Предложение 2.5. *Пусть дан клон $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}(A)$, который удовлетворяет условию Δ^ℓ. Тогда клон $\mathcal{F}$ удовлетворяет условию Δ^e_3.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{a} = a_0a_1a_2$ есть произвольная последовательность из A^3_3, а i есть произвольный принадлежит номер из множества $\{0,1,2\}$. Покажем, что существует функция $w \in \mathcal{F}_{[3]}$, для которой

$$w(\mathbf{a}) = a_i \text{ и } w(\mathbf{x}) = x_0 \text{ для всех } \mathbf{x} = x_0x_1x_2 \in A^3_{<3}.$$

Если $i = 0$, можно положить $w = e^3_0$.

В противном случае пусть $\{j\} = \{1,2\} \setminus \{i\}$. Пользуясь условием Δ^ℓ, выберем две ℓ-функции w_0 и w_1, которые на последовательности $\mathbf{a}$ принимают значения a_0 и a_j соответственно. Легко проверить, что тогда можно положить

$$w = w_0(e^3_0, w_0, w_1).$$

□

Теорема 2.6. *Пусть даны натуральное число $r \geq 3$, клон $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}(A)$, который удовлетворяет условию Δ^e_r, и множество $H \in \operatorname{inv}_Q \mathcal{F}$. Тогда существует такое множество $\mathbb{H} \subseteq \mathbb{H}_0 \cup \mathbb{H}_1 \cup \mathbb{H}_4(r)$, что $H = \bigcap \mathbb{H}$.*

Доказательство. Многие детали доказательства аналогичны деталям доказательства теоремы 2.2, поэтому рассуждения будут менее подробными.

Лемма 2.7. *Пусть даны номер $j < r$, последовательность $\mathbf{a} \in A^r_r$ и элемент $a \in \operatorname{ran} \mathbf{a}$. Тогда существует функция $w' \in \mathcal{F}$, которая на последовательности $\mathbf{a}$ принимает значение a, а на множестве $A^r_{<r}$ совпадает с селекторной функцией e^r_j.*

Доказательство. Пусть i есть некоторый номер, который подтверждает выполнение условия Δ^e_r для клона $\mathcal{F}$, т.е. такой номер $i < r$, что для любой последовательности $\mathbf{a} \in A^r_r$ и элемента $a \in \operatorname{ran} \mathbf{a}$ существует функция $w \in \mathcal{F}$, которая на последовательности $\mathbf{a}$ принимает значение a, а на множестве $A^r_{<r}$ совпадает

с селекторной функцией e_i^r. Достаточно рассмотреть случай $i \neq j$. Обозначим символом τ транспозицию $(i,j) \in S_r$. Выберем такую функцию $w \in \mathcal{F}_{[r]}$, что $w(\mathbf{a} \cdot \tau) = a$ и $w \restriction A^r_{<r} = e_i^r \restriction A^r_{<r}$. Легко убедиться, что можно положить $w' = w(e^r_{\tau(0)}, e^r_{\tau(1)}, \ldots, e^r_{\tau(r-1)})$. □

Также, как в доказательстве теоремы 2.2 отбросим тривиальные случаи $|Q| = 1$ и $|H| = 0$. Обозначим $\mathbb{H} = \{H' \in \mathbb{H}_0 \cup \mathbb{H}_1 \colon H \subseteq H'\}$. Кроме того, положим $Q_{(r)} = \{q \in Q \colon |H(q)| < r\}$ и $H_{(r)} = (H \restriction Q_{(r)}) \downharpoonleft Q$. Очевидно, для доказательства теоремы достаточно доказать включение $H_{(r)} \cap \bigcap \mathbb{H} \subseteq H$.

Докажем теперь леммы, аналогичные леммам 2.3 и 2.4.

Лемма 2.8. *Пусть даны такие элементы $p, q \in Q$ и $a \in A$, что $|H(q)| \geq r$, и множество H слабо отделяет элемент p от элемента q в точке a. Тогда множество H сильно отделяет элемент p от элемента q в точке a.*

Доказательство. Для произвольного элемента $b \in H(q)$ предположим, что множество H не содержит функции h, которая на элементе p принимает значение a, а на элементе q значение b, и придем к противоречию. Выберем такие функции $h_0, h_1, h_2 \in H$ и различные элементы $c, d \in A$, что

$$h_0(p) = h_1(p) = a,\ h_0(q) = c,\ h_1(q) = d,\ h_2(q) = b.$$

По сделанному предположению, элемент b не принадлежит множеству $\{c, d\}$.

Используя неравенство $|H(q)| \geq r$, выберем еще $r-3$ функций $h_3, h_4, \ldots, h_{r-1}$ из H так, чтобы последовательность $\mathbf{b} = h_0(q)h_1(q)h_2(q)\ldots h_{r-1}(q)$ была бы инъективной. Последовательность $\mathbf{a} = h_0(p)h_1(p)h_2(p)\ldots h_{r-1}(p)$ принадлежит множеству $A^r_{<r}$. По лемме 2.7 существует функция $w' \in \mathcal{F}$, для которой выполнены равенства $w'(\mathbf{a}) = h_0(p) = a$ и $w'(\mathbf{b}) = h_2(q) = b$. Рассмотрим функцию $h = w'(h_0, h_1, \ldots, h_{r-1}) \in H$. Легко проверить, что имеют место равенства $h(p) = w'(\mathbf{a}) = a$ и $h(q) = w'(\mathbf{b}) = b$; противоречие. □

Лемма 2.9. *Пусть дано множество $P = \{p, q\} \in Q^{(2)}$, $P \nsubseteq Q_{(r)}$. Тогда выполнен один из следующих случаев*

1. $H \restriction P = H_0(p, H(p), P) \cap H_0(q, H(q), P)$,

2. $H \restriction P = H_0(p, H(p), P) \cap H_0(q, H(q), P) \cap H_1(p, q, \sigma, P)$ *для некоторой перестановки* $\sigma \in S_A$.

Доказательство. Если множество H не отделяет слабо p и q то выполнен случай случай 2, что доказывается также, как в лемме 2.4.

В противном случае покажем, что выполнен случай 1, что докажет лемму. Без ограничения общности будем считать, что $|H(p)| \leq |H(q)|$. Из этого следует, что $|H(q)| \geq r$. Покажем, что без ограничения общности можно считать, что множество H слабо отделяет p от q в некоторой точке $a \in H(p)$. Действительно, если множество H не отделяет слабо p от q, то существует сюръективная функция $\sigma\colon H(p) \to H(q)$, для которой

$$h(q) = \sigma(h(p))$$

для всех $h \in H$. Значит, $|H(p)| = |H(q)|$, и элементы p и q при необходимости можно поменять местами.

Теперь в силу леммы 2.8, достаточно показать, что множество H слабо отделяет p от q в каждой точке $a' \in H(p) \setminus \{a\}$.

Выберем произвольный элемент $a' \in H(p) \setminus \{a\}$. Используя лемму 2.8, выберем такие функции $h_0, h_1, \ldots, h_{r-1}$ из H, что $h_0(p) = a'$, $h_1(p) = h_2(p) = \ldots = h_{r-1}(p) = a$, и последовательность $\mathbf{b} = h_0(q)h_1(q)h_2(q)\ldots h_{r-1}(q)$ инъективна. Поскольку последовательность $\mathbf{a} = h_0(p)h_1(p)h_2(p)\ldots h_{r-1}(p) = a'a\ldots a$ принадлежит множеству $A^r_{<r}$, из леммы 2.7 следует, что клон $\mathcal{F}$ содержит такую функцию w', что $w'(\mathbf{a}) = a'$ и $w'(\mathbf{b}) \neq h_0(q)$. Тогда значения функций h_0 и $h = w'(h_0, h_1, h_2, \ldots, h_{r-1})$ совпадают (и равны a') на элементе p и различны на элементе q. Поскольку функция h принадлежит множеству H, множество H слабо отделяет p от q в точке a'. □

Теперь для доказательства теоремы достаточно для каждого множества

$Q' \subseteq Q$, $|Q'| \geq 2$, доказать включение

$$\left(H_{(r)} \cap \bigcap \mathbb{H}\right) \restriction Q' \subseteq H \restriction Q'.$$

Индукция мощности множества Q'. Если $Q' \subseteq Q_r$, включение очевидно. Если $Q' \nsubseteq Q_r$ и $|Q'| = 2$, включение следует из леммы 2.9. Пусть теперь $|Q'| \geq 3$, $|Q' \setminus Q_r| \geq 1$, и предположение индукции выполнено.

Пусть f есть произвольная функция из множества $\left(H_{(r)} \cap \bigcap \mathbb{H}\right) \restriction Q'$. Надо доказать, что существует функция $h \in H$, для которой $h \restriction Q' = f$. Выберем такие различные элементы $p, q \in Q'$, что $|H(q)| \geq r$. По предположению индукции множество H содержит функции f_p и f_q, которые совпадают с функцией f соответственно на множествах $Q' \setminus \{p\}$ и $Q' \setminus \{q\}$. В частности,

$$f_q(p) = f(p) \text{ и } f_p(q) = f(q).$$

Если имеет место равенство $f_q(q) = f(q)$, положим $h = f_q$.

Пусть теперь $f_q(q) \neq f(q)$. Покажем, что в этом случае множество $\mathbb{H}$ не содержит ни одного элемента вида $H_1(p, q, \sigma, Q)$.

Действительно, если $H_1(p, q, \sigma, Q) \in \mathbb{H}$, то, во-первых, $f \in H_1(p, q, \sigma, Q) \restriction Q' = H_1(p, q, \sigma, Q')$, а во-вторых, $H \subseteq H_1(p, q, \sigma, Q)$ и, следовательно, $f_q \in H_1(p, q, \sigma, Q)$. Значит,

$$f_q(q) = \sigma(f_q(p)) = \sigma(f(p)) = f(q).$$

Таким образом, нет таких перестановок $\sigma \in S_A$, что $H \restriction \{p, q\} \subseteq H_1(p, q, \sigma, \{p, q\})$. Тогда по лемме 2.9

$$H \restriction \{p, q\} = H_0(p, H(p), \{p, q\}) \cap H_0(q, H(q), \{p, q\}).$$

Используя этот факт, выберем $r - 2$ функций f_2, f_3, ..., f_{r-1} из множества H, для которых $f_2(p) = f_3(p) = \ldots = f_{r-1}(p) = f(p)$, а последовательность $\mathbf{b} = f_q(q) f_p(q) f_2(q) f_3(q) \ldots f_{r-1}(q)$ инъективна. Используя лемму 2.7, выберем функцию w из $\mathcal{F}$, которая совпадает с селекторной функцией e_0^r на множестве

$A^r_{<r}$ и принимает значение $f_p(q)$ на последовательности $\mathbf{b}$. Покажем, что можно положить

$$h = w(f_q, f_p, f_2, f_3, \dots, f_{r-1}).$$

Действительно, функция h принадлежит множеству H. Последовательность $\mathbf{a} = f_q(p)f_p(p)f_2(p)f_3(p)\dots f_{r-1}(p)$ принадлежит множеству $A^r_{<r}$. Кроме того, для всех $x \in Q' \setminus \{p, q\}$ верно равенство $f_p(x) = f_q(x) = f(x)$, и, значит последовательность $f_q(x)f_p(x)f_2(x)f_3(x)\dots f_{r-1}(x)$ тоже принадлежит множеству $A^r_{<r}$. Поэтому имеют место равенства

$$\begin{aligned} h(p) &= w(\mathbf{a}) = f_q(p) = f(p), \\ h(q) &= w(\mathbf{b}) = f_p(q) = f(q), \\ h(x) &= w(f_q(x)f_p(x)f_2(x)f_3(x)\dots f_{r-1}(x)) = f(x) \end{aligned}$$

для всех $x \in Q' \setminus \{p, q\}$, что окончательно доказывает шаг индукции и теорему.

□

Теорема 2.10. *Пусть даны клон $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}(A)$, который удовлетворяет условию Δ^2, и множество $H \in \operatorname{inv}_Q \mathcal{F}$. Тогда существует такое множество $\mathbb{H} \subseteq \mathbb{H}_0 \cup \mathbb{H}_1^{\mathrm{Id}} \cup \mathbb{H}_3$, что $H = \bigcap \mathbb{H}$.*

Доказательство. Отбросим тривиальные случаи $H = \emptyset$ и $|A| = 1$ и будем считать, что множество H непусто, а множество A содержит по крайней мере два различных элемента.

Положим $\mathbb{H} = \{H' \in \mathbb{H}_0 \cup \mathbb{H}_1^{\mathrm{Id}} \colon H \subseteq H'\}$. Для каждого множества $B \in [A]^2$ положим $Q_{\langle B\rangle} = \{q \in Q \colon H(q) \in B\}$, $H_{\langle B\rangle} = \big(H \restriction Q_{\langle B\rangle}\big) \downharpoonright Q$ и, далее, $\mathbb{H}_{\langle 2\rangle} = \{H_{\langle B\rangle} \colon B \in [A]^2\}$. Для доказательства теоремы достаточно для каждого множества $Q' \subseteq Q$, $|Q'| \geq 1$, доказать включение

$$\bigcap \big(\mathbb{H} \cup \mathbb{H}_{\langle 2\rangle}\big) \restriction Q' \subseteq H \restriction Q'.$$

Индукция по мощности множества Q'. Если $|Q'| = 1$, включение очевидно. Пусть теперь $|Q'| \geq 2$, и выполнено предположение индукции.

Пусть f есть произвольная функция из множества $\bigcap\left(\mathbb{H}\cup\mathbb{H}_{\langle 2\rangle}\right)\restriction Q'$. Надо доказать, что существует функция $h\in H$, для которой $h\restriction Q'=f$. По предположению индукции для каждого элемента $q\in Q'$ существует функция $f_q\in H$, которая совпадает с функцией f на множестве $Q'\setminus\{q\}$. Зафиксируем некоторое семейство $\{f_q\}_{q\in Q'}$ таких функций f_q. Для любых элементов $q\in Q'$ и $a\in H(q)$ обозначим символом $f_{q,a}$ некоторую функцию из множества ${}^{Q'}\!A$, которая принимает значение a на элементе q и совпадает с функцией f_q (а следовательно, и с функцией f) на множестве $Q'\setminus\{q\}$.

Лемма 2.11. *Для каждого элемента $q\in Q'$ и элемента $a\in H(q)$ имеет место одно одно из двух условий*

1. $f_q(q)=f(q)$,
2. $f_{q,a}\in\bigcap\left(\mathbb{H}\cup\mathbb{H}_{\langle 2\rangle}\right)\restriction Q'$.

Доказательство. Предположим, что не выполнено условие 2. Положим

$$\mathbb{H}'=\{H'\restriction Q'\colon H'\in\mathbb{H}\cup\mathbb{H}_{\langle 2\rangle}\}.$$

Очевидно, $f_{q,a}\notin H''$ для некоторого множества $H''\in\mathbb{H}'$.

Легко проверить, что каждое множество $H''\in\mathbb{H}'$ имеет один из трех видов:

1. $H_0(p,B,Q')$, где $p\in Q'$, $B\subseteq A$;
2. $H_1(p,p',Id_A,Q')$, где $p,p'\in Q'$;
3. $(H\restriction(Q_{\langle C\rangle}\cap Q'))\downharpoonleft Q'$, где $C\in[A]^2$,

причем для каждого $H''\in\mathbb{H}'$ выполнены условия

$$f\in H''\text{ и }H\restriction Q'\subseteq H''.$$

Пусть $f_{q,a}\notin H''$ для некоторого множества $H''\in\mathbb{H}'$ вида 1. Тогда в силу условия $H\restriction Q'\subseteq H''$ имеем

$$f_{q,a}(p)\notin H(p).$$

Противоречие с выбором функции $f_{q,a}$.

Пусть $f_{q,a} \notin H''$ для некоторого множества $H'' \in \mathbb{H}'$ вида 2, т.е

$$f_{q,a}(p) \neq f_{q,a}(p').$$

Из условий $f \in H''$ и $H \upharpoonright Q' \subseteq H''$ имеем

$$f_q(p) = f_q(p') \text{ и } f(p) = f(p')$$

Если $q \notin \{p, p'\}$, получаем противоречие с выбором функции $f_{q,a}$: действительно, $f_{q,a}(q') = f_q(q') = f(q')$ для всех $q' \in Q' \setminus \{q\}$. Пусть, напротив, $q \in \{p, p'\}$. Без ограничения общности положим $p' = q$. Тогда

$$f_q(q) = f_q(p) = f(p) = f(q),$$

значит, имеет место условие 1.

Пусть, наконец, $f_{q,a} \notin H''$ для некоторого множества $H'' \in \mathbb{H}'$ вида 3. Тогда

$$f_{q,a} \upharpoonright (Q_{\langle C \rangle} \cap Q') \notin H \upharpoonright (Q_{\langle C \rangle} \cap Q')$$

Кроме того, из условий $f \in H''$ и $H \upharpoonright Q' \subseteq H''$ имеем

$$f_q \upharpoonright (Q_{\langle C \rangle} \cap Q') \in H \upharpoonright (Q_{\langle C \rangle} \cap Q') \text{ и}$$
$$f \upharpoonright (Q_{\langle C \rangle} \cap Q') \in H \upharpoonright (Q_{\langle C \rangle} \cap Q')$$

Если $q \notin Q_{\langle C \rangle}$, получаем противоречие с выбором функции $f_{q,a}$: действительно, в этом случае функции f_q и $f_{q,a}$ совпадают на множестве $Q_{\langle C \rangle} \cap Q'$.

Пусть теперь $q \in Q_{\langle C \rangle}$. Тогда, в частности, $a \in C$. Поскольку $|C| = 2$, существует единственная функция $g\colon (Q_{\langle C \rangle} \cap Q') \to C$, которая совпадает с функцией $f_{q,a}$ на множестве $(Q_{\langle C \rangle} \cap Q') \setminus \{q\}$, но не равна функции $f_{q,a} \upharpoonright Q_{\langle C \rangle} \cap Q'$. Значит,

$$g = f_q \upharpoonright (Q_{\langle C \rangle} \cap Q') = f \upharpoonright (Q_{\langle C \rangle} \cap Q'),$$

т.е. $f_q(q) = f(q)$, вновь выполнено условие 1.

$\square$

Продолжим доказательство шага индукции. Если для некоторого элемента $q \in Q'$ функция f_q принимает на элементе q значение $f(q)$, положим $h = f_q$. Далее до конца доказательства будем рассуждать в предположении

$$(\forall q \in Q')\, f_q(q) \neq f(q).$$

По лемме 2.11 для каждого элемента $q \in Q'$ и элемента $a \in H(q)$ имеет место

$$f_{q,a} \in \bigcap \left(\mathbb{H} \cup \mathbb{H}_{\langle 2 \rangle}\right) \restriction Q'.$$

Теперь по предположению индукции для любых различных $p, q \in Q'$ и $a \in H(q)$ множество H содержит функцию $f_{p,q,a}$, которая совпадает с функцией $f_{q,a}$ на множестве $Q' \setminus \{p\}$.

Обозначим множество $\{w \in \mathcal{F}_{[2]} \colon (\forall x \in A) w(xx) = x\}$ символом $\mathcal{F}_e$.

Случай 1: $\operatorname{ran} f(p) f_p(p) \neq \operatorname{ran} f(q) f_q(q)$ *для некоторых различных элементов* $p, q \in Q'$.

Выберем произвольные такие элементы p и q.

Тогда можно положить $h = w_0(f_q, f_p)$, где функция $w_0 \in \mathcal{F}_e$ такова, что:

$$w_0(f(p) f_p(p)) = f(p) \text{ и } w_0(f_q(q) f(q)) = f(q)$$

Случай 2: $H(p) \neq H(q)$ *для некоторых элементов* $p, q \in Q'$.

Выберем произвольные такие элементы p и q. Без ограничения общности будем считать, что множество $H(p) \setminus H(q)$ не пусто. Выберем элемент $a \in H(p) \setminus H(q)$. Тогда можно положить $h = w_0(f_q, w_1(f_p, f_{q,p,a}))$, где функции $w_0, w_1 \in \mathcal{F}_e$ таковы, что

$$w_0(f(p)a) = f(p),\ w_0(f_q(q) f(q)) = f(q),$$

$$w_1(f_p(p)a) = a,\ w_1(f(q) f_{q,p,a}(q)) = f(q).$$

Случай 3: случаи 1-2 не выполнены.

Обозначим множество $H(q)$ для некоторого (любого) элемента $q \in Q'$ символом C.

Подслучай 3.1: $|C| = 1$

Противоречит предположению $(\forall q \in Q')\, f_q(q) \neq f(q)$.

Подслучай 3.2: $|C| = 2$ влечет $Q' \subseteq Q_{\langle C\rangle}$. Из последнего сразу следует, что $f \in H \upharpoonright Q'$.

Подслучай 3.3: $|C| \geq 3$ *и существуют различные элементы* $p, q \in Q'$*, для которых* $f(p) = f(q)$.

Выберем произвольные такие элементы p и q и обозначим символом a элемент $f(p)$. Из предположения $(\forall q \in Q')\, f_q(q) \neq f(q)$ и невыполненности случая *1* следует, что $f_p(p) = f_q(q) = b$ для некоторого элемента $b \in A \setminus \{a\}$. Выберем элемент $c \in C \setminus \{a, b\}$. Тогда можно положить $h = w_0(f_q, w_1(f_p, f_{q,p,c}))$ где функции $w_0, w_1 \in \mathcal{F}_e$ таковы, что

$$w_0(ac) = w_0(ba) = a,\ w_1(bc) = c \text{ и } w_1(af_{q,p,c}(q)) = a.$$

Подслучай 3.4: $|C| \geq 3$*, и подслучаи 3.1, 3.2 и 3.3 не выполнены.*

Пусть сначала множество Q' состоит ровно из двух элементов p и q. Пусть $f(p) = a$ и $f(q) = b$. Тогда $b \neq a$ из невыполненности подслучая *3.3*. Из предположения $(\forall q \in Q')\, f_q(q) \neq f(q)$ и невыполненности случая *1* следует, что $f_q(q) = a$ и $f_p(p) = b$.

Далее, из невыполненности подслучая *3.1* следует, что существует такая функция $h' \in H$, что $h'(p) \neq h'(q)$. Пусть $h'(p) = c$ и $h'(q) = d \neq c$.

Положим $I = \{x \in C\colon (\forall h \in H)\, h(p) = x \to h(q) = x\}$. Покажем, что $|I| \leq 1$. Действительно, пусть $x \neq d$. Предположим, что $x \in I$, и выберем такую функцию $h'' \in H$, что $h''(p) = x$ и такую функцию $w \in \mathcal{F}_e$, что $w(cx) = x$ и $w(dx) = d$. Тогда функция $w(h', h'') \in H$ принимает значение x на элементе p и значение d на элементе q, противоречие. Значит, множество I либо пусто, либо состоит из одного элемента d.

Пользуясь этим, выберем такие элементы $c, d \in A$ и функцию $h' \in H$, что $h'(p) = c \neq d = h'(q)$ и $c \neq b$.

Тогда можно положить $h = w_0(f_q, w_1(f_p, h'))$, где функции $w_0, w_1 \in \mathcal{F}_e$

таковы, что

$$w_0(ac) = a,\ w_0(ab) = b,\ w_1(bc) = c,\ w_1(bd) = b,$$

Пусть теперь $|Q'| \geq 3$. Выберем различные элементы $p, q, r \in Q'$. Пусть $f(p) = a$, $f(q) = b$ и $f(r) = c$. Функции $f_{p,b}$ и $f_{q,c}$ принадлежат множеству $\bigcap \left(\mathbb{H} \cup \mathbb{H}_{\langle 2\rangle}\right) \restriction Q'$ и удовлетворяют условиям подслучая *3.2*. Поэтому существуют функции $f^*_{p,b}, f^*_{q,c} \in H$, которые на всем множестве Q' соответственно совпадают с функциями $f_{p,b}$ и $f_{q,c}$. Тогда можно положить $h = w_0(f^*_{p,b}, f^*_{q,c})$, где функция $w_0 \in \mathcal{F}_e$ такова, что

$$w_0(ba) = a,\ w_0(bc) = b.$$

$\square$

Глава 3

Квазитривиальные клоны

В первой части данной главы доказываются некоторые свойства квазитривиальных клонов. С помощью этих свойств во второй части этой главы устанавливается исчерпывающая характеристика симметричных квазитривиальных клонов. На протяжении данного раздела будем считать фиксированными конечное непустое множество A.

3.1. Некоторые свойства квазитривиальных клонов

Легко проверить, что множество всех функций $f \in \mathcal{O}(A)$, удовлетворяющие условию

$$f(\mathbf{a}) \in \operatorname{ran} \mathbf{a}$$

для всех $\mathbf{a} \in \operatorname{dom} f$, содержит все проекции и замкнуто относительно композиции, т.е. образует клон. Будем обозначать этот клон $\mathcal{V}(A)$.

Определение 3.1. *Любая функция $f \in \mathcal{V}(A)$, называется* квазитривиальной. *Любой клон $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{V}(A)$, называется* квазитривиальным.

Квазитривиальные функции на множестве $\{0, 1\}$ это в точности функции, *сохраняющие* $\mathbf{0}$ *и* $\mathbf{1}$. Множество всех таких функций обозначено Постом символом C_4, см. [32]; в более современной литературе этот класс обычно обозначается T_{01}. В работах [32], [33] можно найти исчерпывающую классификацию всех функционально замкнутых классов булевых функций. В частности, из нее видно, что каждый постовский класс, содержащийся в классе T_{01} есть клон. Таким образом, каждый клон с двухэлементным носителем квазитривиален тогда и только тогда, когда он эквивалентен некоторому подклону клона T_{01}. Не опасаясь недоразумений, мы будем называть *булевым* каждый квазитривиальный клон с двухэлементным носителем.

Классификация квазитривиальных клонов с произвольным конечным носителем, по всей видимости, представляет собой достаточно сложную задачу. В частности, как будет показано ниже, она, по существу, включает в себя классификацию конечных групп. Ниже мы отметим некоторые специфические свойства квазитривиальных клонов и опишем некоторые их классы.

Отметим, что класс множеств квазитривиальных функций легко охарактеризовать с помощью соответствия Галуа для классов дискретных функций.

Предложение 3.2. *Множество $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}(A)$ состоит из квазитривиальных функций тогда и только тогда, когда каждый одноместный предикат на множестве A принадлежит множеству $\operatorname{inv} \mathcal{F}$.*

Доказательство. Несложной проверкой. □

Предложение 3.2 влечет, что для каждого клона $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{V}(A)$ и множества $B \subseteq A$ множество

$$\mathcal{F} \restriction B^{<\omega}$$

есть (квазитривиальный) клон.

Далее мы опишем несколько типов квазитривиальных клонов и операций над ними.

Свободная склейка. Сначала определим операцию, в некотором смысле обратную ограничению клона $\mathcal{F}$ на множество $B^{<\omega}$. Пусть дано множество $\mathbb{B} \subseteq \mathcal{P}(A)$ и семейство клонов $\{\mathcal{F}_B\}_{B \in \mathbb{B}}$, такое, что $\mathcal{F}_B \subseteq \mathcal{V}(B)$ для каждого $B \in \mathbb{B}$. Легко проверить, что множество всех функций $f \in \mathcal{V}(A)$, удовлетворяющих условию

$$f \restriction B^{<\omega} \in \mathcal{F}_B$$

для всех $B \in \mathbb{B}$, образует клон.

Будем говорить, что семейство $\{\mathcal{F}_B\}_{B \in \mathbb{B}}$ удовлетворяет *условию склеиваемости*, если для всех $B, C \in \mathbb{B}$

$$\mathcal{F}_B \restriction (B \cap C)^{<\omega} = \mathcal{F}_C \restriction (B \cap C)^{<\omega}.$$

Пусть $\mathcal{F} = \{f \in \mathcal{V}(B)\colon (\forall B \in \mathbb{B})\, f \restriction B \in \mathcal{F}_B\}$. Тогда, если семейство клонов $\{\mathcal{F}_B\}_{B\in\mathbb{B}}$, где $\mathcal{F}_B \subseteq \mathcal{V}(B)$, удовлетворяет условию склеиваемости, то для всех $B \in \mathbb{B}$ выполнено

$$\mathcal{F} \restriction B^{<\omega} = \mathcal{F}_B.$$

Клон $\mathcal{F}$ мы будем называть *свободной склейкой* семейства $\{\mathcal{F}_B\}_{B\in\mathbb{B}}$.

Заметим, что если $\mathbb{B} \subseteq [A]^2$, то каждое семейство $\{\mathcal{F}_B\}_{B\in\mathbb{B}}$, где $\mathcal{F}_B \subseteq \mathcal{V}(B)$, удовлетворяет условию склеиваемости. Действительно, если $B, C \in [A]^2$ и $B \neq C$, то $|B \cap C| \leq 1$, и для любой функции $f \in \mathcal{V}(A)$

$$f(x, x, \ldots, x) = x.$$

С помощью операции свободной склейки и постовской классификации замкнутых классов можно описать все квазитривиальные клоны, удовлетворяющие условию Δ^2.

Теорема 3.3. *Если $|A| \geq 2$, то любой клон $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{V}(A)$ удовлетворяет условию Δ^2 тогда и только тогда, когда $\mathcal{F}$ есть свободная склейка некоторого семейства булевых клонов, эквивалентных подклонам клона T_{01}.*

Доказательство. В одну сторону теорема очевидна. Действительно, пусть $\mathcal{F}$ есть свободная склейка некоторого семейства булевых клонов. Тогда для любых последовательностей $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in A^2_2$, где $\operatorname{ran}\mathbf{a} \neq \operatorname{ran}\mathbf{b}$, и различных номеров $i, j \in \{0, 1\}$ клон $\mathcal{F}$ содержит функцию w, которая совпадает с проекцией e^2_i на множестве $(\operatorname{ran}\mathbf{a})^2$ и с проекцией e^2_j на множестве $(\operatorname{ran}\mathbf{b})^2$. Это немедленно влечет условие Δ^2.

Пусть теперь клон $\mathcal{F}$ удовлетворяет условию Δ^2. Обозначим символом $\mathcal{G}$ свободную склейку семейства $\{\mathcal{F} \restriction B^{<\omega}\}_{B\in[A]^2}$. Очевидно,

$$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}.$$

Для доказательства теоремы достаточно доказать, что для каждого натурального числа $n \geq 2$ имеет место включение

$$\mathcal{G}_{[n]} \subseteq \mathcal{F}_{[n]}$$

(для $n = 0, 1$ включение очевидно).

Вспомним, что $\mathcal{F}_{[n]} \in \operatorname{inv}_{A^n} \mathcal{F}$. Заметим, что условие $H \in \mathbb{H}_1^{\mathrm{Id}}$ не выполнено ни для одного множества $H \supseteq F_{[n]}$. Тогда по теореме 2.10 имеем

$$\mathcal{F}_{[n]} = \bigcap\{H \in \mathbb{H}_0 \cup \mathbb{H}_3 \colon \mathcal{F}_{[n]} \subseteq H\}.$$

Пусть f есть произвольная функция из $\mathcal{G}_{[n]}$. Достаточно показать, что

$$\mathcal{F}_{[n]} \subseteq H \to f \in H$$

для всех множеств $H \in \mathbb{H}_0 \cup \mathbb{H}_3$.

Пусть $\mathcal{F}_{[n]} \subseteq H$. С помощью тривиальных рассуждений имеем:

1. если $H \in \mathbb{H}_0$, то

$$\{f \in \mathcal{O}(A)_{[n]} \colon f(\mathbf{a}) \in \operatorname{ran} \mathbf{a}\} \subseteq H,$$

для некоторого $\mathbf{a} \in A^n$ и $\operatorname{ran} \mathbf{a} \subseteq B \subseteq A$;

2. если $H \in \mathbb{H}_3$, то

$$\{f \in \mathcal{O}(A)_{[n]} \colon f \restriction B^n \in \mathcal{F}_{[n]} \restriction B^n\} \subseteq H$$

для некоторого $B \in [A]^2$.

Очевидно, $f \in H$ в обоих случаях. $\square$

r-клоны и их распространения. Легко заметить, что для любых натуральных чисел n, r, кортежа функций $\mathbf{f} \in (\mathcal{V}(A)_{[n]})^{<\omega}$ и последовательности $\mathbf{a} \in A^n_{<r}$ выполнено

$$\mathbf{f}^*(\mathbf{a}) \in A^{<\omega}_{<r}.$$

Поэтому множество $\mathcal{V}(A) \restriction A^{<\omega}_{<r}$ замкнуто относительно композиции. Сформулируем это утверждение более строго. Обозначим для краткости символом $\mathcal{V}(A)_{\langle r\rangle}$ множество $\mathcal{V}(A) \restriction A^{<\omega}_{<r}$. Для каждой функции $g \in \mathcal{V}(A)_{\langle r\rangle}$ естественным

образом определена ее арность. Тогда для каждого натурального числа $r \geq 1$ и кортежа $g_0g_1g_2\dots g_n \in (\mathcal{V}(A)_{\langle r\rangle})^{<\omega}$, для которого функция g_0 имеет арность n, а функции $g_1, g_2, \dots, g_n$ имеют одну и ту же арность m, существует единственная функция $g(g_1, g_2, \dots, g_n) \in \mathcal{V}(A)_{\langle r\rangle}$, удовлетворяющая условию

$$g(g_1, g_2, \dots, g_n)(\mathbf{a}) = g(g_1(\mathbf{a}), g_2(\mathbf{a}), \dots, g_n(\mathbf{a}))$$

для всех $\mathbf{a} \in A^m_{<r}$.

Этим равенством определяется частичная операция композиции из множества $(\mathcal{V}(A)_{\langle r\rangle})^{<\omega}$ в множество $\mathcal{V}(A)_{\langle r\rangle}$, которая каждому кортежу $g_0g_1g_2\dots g_n$ функций из множества $\mathcal{V}(A)$ подходящих арностей ставит в соответствие функцию $g_0(g_1, g_2, \dots, g_n)$. При этом для любых функций $f_0, f_1, f_2 \dots f_n \in \mathcal{V}(A)$ если

$$g_0 = f_0 \restriction A^{<\omega}_{<r},\ g_1 = f_1 \restriction A^{<\omega}_{<r},\ g_2 = f_2 \restriction A^{<\omega}_{<r},\ \dots,\ g_n = f_n \restriction A^{<\omega}_{<r},$$

то функция $g_0(g_1, g_2, \dots, g_n)$ определена тогда и только тогда, когда определена функция $f_0(f_1, f_2, \dots, f_n)$, и, если обе эти функции определены, то

$$g_0(g_1, g_2, \dots, g_n) = f_0(f_1, f_2, \dots, f_n) \restriction A^{<\omega}_{<r}.$$

Любое замкнутое относительно композиции подмножество $\mathcal{G}$ множества $\mathcal{V}(A) \restriction A^{<\omega}_{<r}$, содержащее все функции из $\mathcal{E}(A) \restriction A^{<\omega}_{<r}$, мы будем называть r-клоном. Заметим, что это множество вместе с операцией композиции и функциями $e \restriction A^{<\omega}_{<r}$, где $e \in \mathcal{E}(A)$, есть абстрактный клон (определение абстрактного клона см. [29]). Для каждого r-клона $\mathcal{G}$ символом $\mathcal{G}^{\uparrow}$ обозначим множество всех функций $f \in \mathcal{V}(A)$, для которых $f \restriction A^{<\omega}_{<r} \in \mathcal{G}$. В силу сделанных замечаний, множество $\mathcal{G}^{\uparrow}$ есть клон; мы будем называть его *распространением* r-клона $\mathcal{G}$.

Для каждого клона $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{V}(A)$ и натурального числа $r \geq 1$ множество $\mathcal{F} \restriction A^{<\omega}_{<r}$ будем для краткости обозначать символом $\mathcal{F}_{\langle r\rangle}$. Очевидно, множество $\mathcal{F}_{\langle r\rangle}$ есть r-клон и имеет место включение $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}^{\uparrow}_{\langle r\rangle}$.

Связанная склейка. Пусть дан клон $\mathrm{P} \subseteq \mathrm{T}_{01}$. Каждое семейство клонов $\{\mathcal{F}_B\}_{B\in[A]^2}$, для которого носитель каждого клона $\mathcal{F}_B$ есть B, и клон $\mathcal{F}_B$ эквивалентен клону P, будем называть P-семейством. Пусть дано P-семейство $\{\mathcal{F}_B\}_{B\in[A]^2}$ и такое семейство $\{\sigma_B\}_{B\in[A]^2}$ биекций $\sigma_B\colon B\to\{0,1\}$, что для каждого клона $\mathcal{F}_B$ существует взаимно однозначное отображение $\alpha_B\colon \mathrm{P}\to\mathcal{F}_B$, для которого

$$\alpha_B(f)(\mathbf{x})=\sigma_B^{-1}(f(\sigma_B\cdot\mathbf{x}))$$

для всех $f\in\mathrm{P}$ и $\mathbf{x}\in B^n$, где n есть арность f.

Для каждого натурального числа n и функции $f\in\mathrm{P}_{[n]}$ существует единственная функция $f^+\in\mathcal{V}(A)_{\langle 3\rangle}$, для которой

$$f^+(\mathbf{x})=\sigma_{\operatorname{ran}\mathbf{x}}^{-1}(f(\sigma_{\operatorname{ran}\mathbf{x}}\cdot\mathbf{x}))$$

для всех $\mathbf{x}\in A_2^n$.

Можно проверить, что множество функций $\mathcal{G}=\{f^+\colon f\in\mathrm{P}\}$ есть 3-клон, причем для каждого $B\in[A]^2$ выполнено $\mathcal{G}\restriction B^{<\omega}=\mathcal{F}_B$. Такой 3-клон $\mathcal{G}$ мы будем называть связанной склейкой P-семейства $\{\mathcal{F}_B\}_{B\in[A]^2}$ (по семейству $\{\sigma_B\}_{B\in[A]^2}$).

Пусть клон P состоит только из самодвойственных функций. Тогда, как несложно заметить, связанная склейка $\mathcal{G}$ P-семейства $\{\mathcal{F}_B\}_{B\in[A]^2}$ не зависит от семейства $\{\sigma_B\}_{B\in[A]^2}$ и, следовательно, определяется только клоном P. В этом случае мы будем обозначать 3-клон $\mathcal{G}$ символом $\mathrm{P}(A)$.

Как известно (см. [33]), существует всего четыре постовских класса P самодвойственных функций, сохраняющих ноль и единицу. Следуя обозначениям Поста, будем обозначать их символами O_1, D_1, D_2 и L_4. Они, соответственно, порождаются функциями x, $\overline{x}y\vee\overline{x}z\vee yz$, $xy\vee yz\vee xz$ и $x\oplus y\oplus z$. Следовательно, если $|A|\geq 2$, то определены всего четыре 3-клона вида $\mathrm{P}(A)$, причем, 3-клон $\mathrm{O}_1(A)$ есть $\mathcal{E}(A)_{\langle 3\rangle}$.

Определим очень важный в теории квазитривиальных клонов числовой параметр $\mathrm{r}(\mathcal{F})$ клона $\mathcal{F}$, который мы будем называть *рангом* клона $\mathcal{F}$.

Определение 3.4. *Для каждого клона $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}(A)$ положим*

$$\mathrm{r}(\mathcal{F}) = \begin{cases} \min\{n < \omega \colon \mathcal{F}_{[n]} \neq \mathcal{E}(A)_{[n]}\}, & \textit{если } \mathcal{F} \neq \mathcal{E}(A), \\ \omega, & \textit{если } \mathcal{F} = \mathcal{E}(A) \end{cases}$$

Легко проверить, что $\mathrm{r}(\mathcal{F}) \geq 2$ для всякого клона $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{V}(A)$.

Теорема 3.5. *Пусть дан клон $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{V}(A)$ ранга $r \geq 3$. Тогда*

1. $\mathcal{F}_{\langle 3\rangle} = \mathrm{P}(A)$ *для некоторого класса* $\mathrm{P} \in \{\mathrm{O}_1, \mathrm{D}_1, \mathrm{D}_2, \mathrm{L}_4\}$*;*

2. *если* $r \geq 4$*, то* $\mathcal{F}_{\langle r\rangle} = \mathcal{E}(A)_{\langle r\rangle}$.

Доказательство. Вначале докажем лемму.

Лемма 3.6. *Пусть дана последовательность $\mathbf{a} = a_0 a_1 \ldots a_{n-1} \in A^n_{<r}$, функция $f \in \mathcal{F}_{[n]}$ и функция $\sigma \colon A \to A$. Тогда $f(\sigma \cdot \mathbf{a}) = \sigma(f(\mathbf{a}))$.*

Доказательство. Сначала заметим, что лемма верна для селекторных функций f. Пусть, далее, $\mathbf{b} = (b_0, b_1, \ldots, b_{t-1})$ есть некоторая инъективная последовательность всех различных элементов из $\operatorname{ran} \mathbf{a}$. Положим $\tau = \mathbf{b}^{-1}\mathbf{a}$. Рассмотрим функцию $f' = f\left(e^t_{\tau(0)}, e^t_{\tau(1)}, \ldots, e^t_{\tau(n-1)}\right) \in \mathcal{F}_{[t]}$. Поскольку $t < r$, из условия теоремы следует, что f' есть селекторная функция. Тогда имеем

$$\begin{aligned}\sigma(f(\mathbf{a})) =& \sigma(f'(\mathbf{b})) = f'(\sigma \cdot \mathbf{b}) = f(e^t_{\tau(0)}(\sigma \cdot \mathbf{b}), e^t_{\tau(1)}(\sigma \cdot \mathbf{b}), \ldots, e^t_{\tau(n-1)}(\sigma \cdot \mathbf{b})) = \\ =& f\left(\sigma\left(b_{\tau(0)}\right), \sigma\left(b_{\tau(1)}\right), \ldots, \sigma\left(b_{\tau(n-1)}\right)\right) = f(\sigma \cdot \mathbf{b} \cdot \tau) = f(\sigma \cdot \mathbf{a}).\end{aligned}$$

□

Без ограничения общности будем считать, что множество A содержит подмножество $2 = \{0, 1\}$. Тогда клон $\mathcal{F} \restriction 2^{<\omega}$ есть постовский класс, содержащийся в классе T_{01}. Обозначим его символом P.

Рассмотрим функцию $\sigma \colon A \to A$, для которой $\sigma(0) = 1$ и $\sigma(1) = 0$. Тогда из леммы 3.6 следует, что каждая функция $g \in \mathrm{P}$ самодвойственная. Значит, $\mathrm{P} \in \{\mathrm{O}_1, \mathrm{D}_1, \mathrm{D}_2, \mathrm{L}_4\}$. Кроме того, из той же леммы 3.6 следует, что

$$f \restriction A^{\omega}_{<3} = (f \restriction 2^{<\omega})^+$$

для любой функции $f \in \mathcal{F}$. Это доказывает пункт 1.

Пусть теперь $r \geq 4$. Для доказательства пункта 2, заметим, что если $\mathrm{P} \neq \mathrm{O}_1$, то класс P содержат неселекторные функции от трех переменных, что, конечно, остается верным и для клона $\mathcal{F}$. Следовательно, в рассматриваемом случае класс P состоит только из селекторных функций. Пусть n есть произвольное натуральное число и f есть произвольная функция из $\mathcal{F}_{[n]}$. Пусть i есть такой номер, что $f \restriction 2^n = e_i^n$ (здесь символом e_i^n обозначена i-ая n-местная проекция из класса P). Для каждой последовательности $\mathbf{a} \in A^n_{<r}$ выберем функцию $\sigma\colon A \to A$, для которой $\sigma(a_i) = 1$ и $\sigma(x) = 0$ для всех $x \in A \setminus \{a_i\}$. По лемме 3.6 имеем

$$\sigma(f(\mathbf{a})) = f(\sigma \cdot \mathbf{a}) = (f \restriction 2^n)(\sigma \cdot \mathbf{a}) = 1,$$

откуда $f(\mathbf{a}) = a_i$. Следовательно, $f \restriction A^n_{<r} \in \mathcal{E}(A)_{\langle r \rangle}$, пункт 2 доказан. □

Следствие 3.7. *Для любого клона $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{V}(A)$ выполнено одно из двух условий*

1. $\mathbf{r}(\mathcal{F}) = \omega$
2. $\mathbf{r}(\mathcal{F}) \leq \max\{3, |A|\}$.

Для каждого клона $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{V}(A)$ ранга $r \geq 3$ класс P из теоремы 3.5 будем обозначать символом $\mathrm{P}_{\mathcal{F}}$.

Устойчивые справа отношения эквивалентности. Бинарное отношение R на множестве $A^{<\omega}$ мы будем называть *нормальным*, если

$$\mathbf{a} \, R \, \mathbf{b} \to \operatorname{dom} \mathbf{a} = \operatorname{dom} \mathbf{b}$$

для всех $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in A^{<\omega}$. Последовательности $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in A^{<\omega}$ мы будем называть *подобными*, если существует такая перестановка $\sigma \in S_A$, что $\mathbf{a} = \sigma \cdot \mathbf{b}$. Отношение подобия мы будем обозначать символом $\mathcal{S}$. Очевидно, отношение $\mathcal{S}$ нормальное.

Определение 3.8. *Бинарное отношение R на множестве $A^{<\omega}$ мы будем называть* устойчивым справа, *если*

1. $R \subseteq \mathcal{S}$,

2. $\mathbf{a}\,R\,\mathbf{b} \;\to\; (\mathbf{a}\cdot\tau)\,R\,(\mathbf{b}\cdot\tau)$ *для любых последовательностей* $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in A^{<\omega}$, *натурального числа* n *и функции* $\tau\colon n \to \operatorname{dom}\mathbf{a}$.

Очевидно, для каждых подобных последовательностей $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in A^{<\omega}$ существует единственная биекция $\sigma_{\mathbf{a},\mathbf{b}}\colon \operatorname{ran}\mathbf{a} \to \operatorname{ran}\mathbf{b}$, для которой $\mathbf{b} = \sigma_{\mathbf{a},\mathbf{b}}\cdot\mathbf{a}$. Для каждого устойчивого справа отношения R обозначим символом $\mathcal{F}_R$ множество всех функций $f \in \mathcal{V}(A)$, для которых

$$f(\mathbf{b}) = \sigma_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(f(\mathbf{a}))$$

для всех таких $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \operatorname{dom} f$, что $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in R$.

Предложение 3.9. *Для каждого устойчивого справа отношения* R *на множестве* $A^{<\omega}$ *множество* $\mathcal{F}_R$ *есть клон.*

Доказательство. Очевидно, каждая селекторная функция принадлежит множеству $\mathcal{F}_R$. Остается показать, что множество $\mathcal{F}_R$ замкнуто относительно композиции. Пусть даны натуральные числа n и m, n-местная функция f, m-местные функции f_0, f_1, …, f_{n-1} из $\mathcal{F}_R$ и пара $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ из $R \cap (A^m \times A^m)$. Положим $h = f(f_0, f_1, \ldots, f_{n-1})$. Выберем любую такую функцию $\tau\colon m \to n$, что

$$f_i(\mathbf{a}) = a_{\tau(i)}.$$

Тогда

$$h(\mathbf{a}) = f(\mathbf{a}\cdot\tau) \;\text{ и }\; h(\mathbf{b}) = f(\sigma_{\mathbf{a},\mathbf{b}}\cdot\mathbf{a}\cdot\tau) = f(\mathbf{b}\cdot\tau),$$

откуда

$$h(\mathbf{b}) = \sigma_{\mathbf{a}\cdot\tau,\mathbf{b}\cdot\tau}(h(\mathbf{a}))$$

Остается заметить, что $\sigma_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(a) = \sigma_{\mathbf{a}\cdot\tau,\mathbf{b}\cdot\tau}(a)$ для всех $a \in \operatorname{ran}(\mathbf{a}\cdot\tau)$. □

Покажем, что квазитривиальные клоны с условием Δ_r^e частично сводятся к клонам вида $\mathcal{F}_R$.

Теорема 3.10. *Пусть дано натуральное число $r \geq 3$ и клон $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{V}(A)$, удовлетворяющий условию Δ_r^e. Тогда*

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\langle r\rangle}^{\uparrow} \cap \mathcal{F}_R$$

для некоторого устойчивого справа отношения эквивалентности R.

Доказательство. Положим

$$R = \{(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in A^{<\omega} \times A^{<\omega} \colon \mathbf{a}\, \mathcal{S}\, \mathbf{b} \wedge (\forall f \in \mathcal{F}_{[\operatorname{dom} \mathbf{a}]})\, f(\mathbf{b}) = \sigma_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(f(\mathbf{a}))\}.$$

Очевидно, R есть отношение эквивалентности.

Допустим, $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in R$ и $(\mathbf{a}\cdot\tau, \mathbf{b}\cdot\tau) \notin R$ для некоторого натурального числа n функции $\tau\colon n \to \operatorname{dom} \mathbf{a}$. Значит, существует функция $f \in \mathcal{F}_{[n]}$, для которой

$$f(\mathbf{b} \cdot \tau) \neq \sigma_{\mathbf{a}\cdot\tau,\mathbf{b}\cdot\tau}(f(\mathbf{a} \cdot \tau))$$

Положим $h = f(e^n_{\tau(0)}, e^n_{\tau(1)}, \ldots, e^n_{\tau(n-1)})$. Тогда

$$h(\mathbf{b}) \neq \sigma_{\mathbf{a}\cdot\tau,\mathbf{b}\cdot\tau}(h(\mathbf{a})) = \sigma_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(h(\mathbf{a}));$$

противоречие. Значит, отношение R устойчиво справа.

Теперь очевидно включение

$$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}_{\langle r\rangle}^{\uparrow} \cap \mathcal{F}_R.$$

Для каждого натурального числа n докажем, что

$$(\mathcal{F}_{\langle r\rangle}^{\uparrow} \cap \mathcal{F}_R)_{[n]} \subseteq \mathcal{F}_{[n]}.$$

Пусть f есть произвольная функция из $(\mathcal{F}_{\langle r\rangle}^{\uparrow} \cap \mathcal{F}_R)_{[n]}$. Рассуждая так же, как в доказательстве теоремы 3.3 (и используя теорему 2.6 вместо 2.10), заключаем, что достаточно доказать условие

$$\mathcal{F}_{[n]} \subseteq H \to f \in H$$

для любого множества $H \in \mathbb{H}_0 \cup \mathbb{H}_1 \cup \mathbb{H}_4(r)$.

Пусть $\mathcal{F}_{[n]} \subseteq H$. Для случая $H \in \mathbb{H}_0$ рассуждаем также, как в доказательстве теоремы 3.3. Случай $H \in \mathbb{H}_4(r)$ тривиально влечет включение $\mathcal{F}^{\uparrow}_{\langle r \rangle} \subseteq H$, откуда немедленно $f \in H$.

Пусть $H \in \mathbb{H}_1$. Значит, для некоторых последовательностей $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in A^n$ и перестановки $\sigma \in S_A$

$$H = \{f \in \mathcal{O}(A) \colon f(\mathbf{b}) = \sigma f(\mathbf{a})\} \text{ и } (\forall g \in \mathcal{F}_{[n]})\, g(\mathbf{b}) = \sigma g(\mathbf{a}).$$

Последовательно выбирая в качестве функций $g \in \mathcal{F}_{[n]}$ все проекции, имеем

$$b_0 = \sigma(a_0), b_1 = \sigma(a_1), \ldots, b_{n-1} = \sigma(a_{n-1});$$

т.е. $\mathbf{b} = \sigma \cdot \mathbf{a}$. Значит, $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in R$. Теперь условие $f \in H$ очевидно.

□

Для каждого клона $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}(A)$ отношение

$$\{(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in A^{<\omega} \times A^{<\omega} \colon \mathbf{a}\, \mathcal{S}\, \mathbf{b} \wedge (\forall f \in \mathcal{F}_{[\operatorname{dom} \mathbf{a}]})\, f(\mathbf{b}) = \sigma_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(f(\mathbf{a}))\}.$$

мы будем в дальнейшем обозначать символом $R_{\mathcal{F}}$.

Замечание 3.11. *Каждую конечную группу можно естественным образом связать с некоторым клоном вида $\mathcal{F}_R$. Пусть G есть некоторая группа перестановок множества $n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$. На множестве n^n_n определим отношение*

$$R^0_G = \{(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in n^n_n \times n^n_n \colon \mathbf{a}^{-1} \cdot \mathbf{b} \in G\}$$

и положим

$$R_G = \bigcup_{(\mathbf{a},\mathbf{b}) \in R^0_G} \bigcup_{m<\omega} \{(\mathbf{a} \cdot \tau, \mathbf{b} \cdot \tau) \colon \tau \in m^{\operatorname{dom} \mathbf{a}}\}.$$

Легко проверить, что отношение R_G устойчиво справа. Поэтому определен клон $\mathcal{F}_{R_G}$. Можно показать, что если группы $G, G' \subseteq S_n$ различны, то и соответствующие клоны $\mathcal{F}_{R_G}$ и $\mathcal{F}_{R_{G'}}$ различны.

2-монотонные функции. Для любого натурального числа n любую функцию $f \in \mathcal{V}(A)_{[n]}$ будем называть 2-монотонной, если

$$(f(\mathbf{a}) = a \wedge \{i < n \colon a_i = a\} \subseteq \{i < n \colon b_i = b\}) \to f(\mathbf{b}) = b$$

для всех $\mathbf{a} = a_0 a_1 \dots a_{n-1} \in A_2^n$, $\mathbf{b} = b_0 b_1 \dots b_{n-1} \in A^n$, $a \in \operatorname{ran} \mathbf{a}$ и $b \in \operatorname{ran} \mathbf{b}$.

Множество всех 2-монотонных функций $f \in \mathcal{V}(A)$ обозначим символом $\mathcal{M}(A)$.

Предложение 3.12. *Множество $\mathcal{M}(A)$ содержит все проекции и замкнуто относительно композиции, т.е. есть клон.*

Доказательство. Несложной проверкой. □

Из определения 2-монотонной функции немедленно следует, что $\mathrm{r}(\mathcal{F}) \geq 3$ для любого клона $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{M}(A)$. В частности, для любого клона $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{M}(A)$ определен постовский класс $\mathrm{P}_{\mathcal{F}}$.

Теорема 3.13. *Пусть дан клон $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{M}(A)$. Тогда*

1. *либо $\mathcal{F} = \mathcal{E}(A)$, либо $\mathrm{P}_{\mathcal{F}} = \mathrm{D}_2$;*

2. *если клон $\mathcal{F}$ удовлетворяет условию Δ^∂, то $\mathcal{F} = \mathcal{M}(A) \cap \mathcal{F}_R$ для некоторого устойчивого справа отношения эквивалентности R.*

Доказательство. Положим $r = \mathrm{r}(\mathcal{F})$. Допустим, что $4 \leq r < \omega$. Значит, $r \leq |A|$ по следствию 3.7. Кроме того, по теореме 3.5 ограничения всех функций из $f \in \mathcal{F}_{[r]}$ на множество $A^r_{<r}$ совпадают с ограничениями проекций. Значит, существует функция $f \in \mathcal{F}_{[r]}$ и номер $i < r$, для которых

$$f \restriction A^r_{<r} = e^r_i \restriction A^r_{<r} \text{ и } f(\mathbf{a}) \neq a_i$$

для некоторой последовательности $\mathbf{a} = a_0 a_1 \dots a_{r-1} \in A^r_r$ (иначе ранг клона $\mathcal{F}$ больше r). Очевидно, $f \notin \mathcal{M}(A)$; противоречие с условием.

Значит, либо $r = \omega$, т.е. $\mathcal{F} = \mathcal{E}(A)$, либо $r = 3$.

Пусть $r = 3$. Тогда по теореме 3.5 $\mathcal{F}_{\langle 3\rangle} = \mathrm{P}(A)$ для некоторого класса $\mathrm{P} \in \{\mathrm{O}_1, \mathrm{D}_1, \mathrm{D}_2, \mathrm{L}_4\}$. Постовские классы D_1 и L_4 содержат некоторую ℓ-функцию w (см. [33]), которая очевидно, не 2-монотонна (следовательно, не 2-монотонна и функция $w^+ \in \mathcal{F}$); противоречие с условием. Значит $\mathrm{P} \in \{\mathrm{O}_1, \mathrm{D}_2\}$.

Если $\mathrm{P} = \mathrm{O}_1$, приходим к противоречию с условием так же, как в случае $r \geq 4$. Остается случай $\mathrm{P} = \mathrm{D}_2$, откуда следует пункт 1.

Пусть клон $\mathcal{F}$ удовлетворяет условию Δ^∂. Повторяя рассуждения доказательства теоремы 3.10, получаем включение

$$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}_{R_\mathcal{F}},$$

причем $R_\mathcal{F}$ есть устойчивое справа отношение эквивалентности.

Пусть n есть произвольное натуральное число и f есть произвольная функция из $(\mathcal{M}(A) \cap \mathcal{F}_R)_{[n]}$. Вновь рассуждая также, как в доказательствах теорем 3.10 и 3.3 (и используя теорему 2.2 вместо теорем 2.10 и 2.6), заключаем, что достаточно доказать условие

$$\mathcal{F}_{[n]} \subseteq H \to f \in H$$

для любого множества $H \in \mathbb{H}_0 \cup \mathbb{H}_1 \cup \mathbb{H}_2$.

Для случаев $H \in \mathbb{H}_0$ и $H \in \mathbb{H}_1$ опять воспроизводим рассуждения из доказательств теорем 3.3 и 3.10.

Пусть $H \in \mathbb{H}_2$, т.е. $H = \{f \in \mathcal{O}(A)\colon f(\mathbf{a}) = a \vee f(\mathbf{b}) = b\}$ для некоторых $\mathbf{a} = a_0a_1\ldots a_{n-1}, \mathbf{b} = b_0b_1\ldots b_{n-1} \in A^n$, $a \in \operatorname{ran}\mathbf{a}$, $b \in \operatorname{ran}\mathbf{b}$. Покажем, что из условия $\mathcal{F}_{[n]} \subseteq H$ следует, что

$$I_\mathbf{a} \cup I_\mathbf{b} = n,$$

где

$$I_\mathbf{a} = \{i < n\colon a_i = a\} \text{ и } I_\mathbf{b} = \{i < n\colon b_i = b\}.$$

Действительно, в противном случае выберем номер $i \in n \setminus (I_\mathbf{a} \cup I_\mathbf{b})$. Тогда $e_i^n(\mathbf{a}) \neq a$ и $e_i^n(\mathbf{b}) \neq b$, противоречие.

Теперь покажем, что $\mathcal{M}(A) \subseteq H$.

Пусть последовательность $\mathbf{c} = c_0 c_1 \ldots c_{n-1} \in \{a, b\}^n$ такова, что для любого номера $i < n$

$$c_i = \begin{cases} a, & \text{если } i \in I_{\mathbf{a}} \\ b & \text{иначе} \end{cases}$$

Тогда для любой функции $f \in \mathcal{M}(A)$ имеем

$$f(\mathbf{c}) = a \to f(\mathbf{a}) = a$$

$$f(\mathbf{c}) = b \to f(\mathbf{b}) = b.$$

□

3.2. Классификация симметричных квазитривиальных клонов

На протяжении этого параграфа вновь фиксировано некоторое конечное непустое множество A. Для каждого натурального числа n, функции $f \in \mathcal{V}(A)_{[n]}$ и перестановки $\sigma \in S_A$ символом f_σ обозначим функцию, определенную равенством

$$f_\sigma(\mathbf{x}) = \sigma(f(\sigma \cdot \mathbf{x}))$$

для всех $\mathbf{x} \in A^n$.

Определение 3.14. *Клон $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}(A)$ называется симметричным, если*

$$f \in \mathcal{F} \to f_\sigma \in \mathcal{F}$$

для каждой функции $f \in \mathcal{F}$ и перестановки $\sigma \in S_A$.

Для каждого клона $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}(A)$ определим параметр $\mathbf{m}(\mathcal{F})$ условием

$$\mathrm{m}(\mathcal{F}) = \begin{cases} \min\{n < \omega \colon \mathcal{F}_{\langle n \rangle} \nsubseteq \mathcal{M}(A)_{\langle n \rangle}\}, & \text{если } \mathcal{F} \nsubseteq \mathcal{M}(A), \\ \omega, & \text{иначе} \end{cases}$$

Очевидно, либо $\mathbf{m}(\mathcal{F}) = \omega$, либо $2 \le \mathbf{m}(\mathcal{F}) \le |A|$ для каждого клона $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{V}(A)$. Кроме того, если $\mathrm{r}(\mathcal{F}) \ge 3$ и $\mathrm{P}(\mathcal{F}) = D_2$, то $\mathbf{m}(\mathcal{F}) \ge 3$.

Теорема 3.15. *Пусть $|A| \ge 2$ и дан симметричный клон $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{V}(A)$. Пусть $r = \mathrm{r}(\mathcal{F}) < \omega$ и $m = m(\mathcal{F})$. Тогда*

1. *если $r \ge 4$, то $\mathcal{F}$ удовлетворяет условию Δ^e_r;*
2. *если $r = 3$, то $\mathcal{F}$ удовлетворяет одному из условий Δ^e_3, $\Delta^\partial \wedge \Delta^e_m$;*
3. *если $r = 2$, то либо $\mathcal{F}$ удовлетворяет условию Δ^2, либо*
   - *а. $|A| = 4$ и $\mathcal{F}$ удовлетворяет условию Δ^e_3;*
   - *б. $|A| = 3$ и $\mathcal{F}$ удовлетворяет условию Δ^∂.*

Доказательство. Сначала докажем вспомогательное утверждение.

Лемма 3.16. *Если для некоторого натурального числа t клон $\mathcal{F}$ содержит функцию $f \notin \mathcal{E}(A)_{[t]}$, для которой $f \restriction A^t_{<t} \in \mathcal{E}(A) \restriction A^t_{<t}$, то клон $\mathcal{F}$ удовлетворяет условию Δ^e_t. Если клон $\mathcal{F}$ содержит ∂-функцию, то клон $\mathcal{F}$ удовлетворяет условию Δ^∂. Если клон $\mathcal{F}$ содержит ℓ-функцию, то клон $\mathcal{F}$ удовлетворяет условию Δ^ℓ.*

Доказательство. Пусть w есть такая функция из множества $\mathcal{F}_{[t]} \setminus \mathcal{E}(A)$, что $w \restriction A^t_{<t} = e^t_i \restriction A^t_{<t}$ для некоторого номера $i < r$. Тогда существует последовательность $\mathbf{a} = a_0 a_1 \ldots a_{t-1} \in A^t_t$ и номер $j \in t \setminus \{i\}$, для которых $w(\mathbf{a}) = a_i$. Обозначим символом σ транспозицию $(a_j, a_k) \in S_A$, а символом τ транспозицию $(j, k) \in S_t$. Легко проверить, что для каждого номера $k \in t \setminus \{i, j\}$ функция $w^k = w_\sigma\left(e^t_{\tau(0)} e^t_{\tau(1)} \ldots e^t_{\tau(t-1)}\right) \in \mathcal{F}$ принимает значение a_k на последовательности $\mathbf{a}$ и совпадает с проекцией e^t_i на множестве $A^t_{<t}$. Положим $w^i = e^t_i$ и $w^j = w$. Теперь для всех $k < t$ имеем

$$w^k(\mathbf{a}) = a_k \text{ и } w^k \restriction A^t_{<t} = e^t_i \restriction A^t_{<t}.$$

Пусть $\mathbf{b}$ есть произвольная последовательность из A^t_t и σ – любая перестановка множества A, для которой $\sigma\mathbf{b} = \mathbf{a}$. Тогда для любого $k < t$

$$w^k_\sigma(\mathbf{b}) = b_k \text{ и } w^k_\sigma \restriction A^t_{<t} = e^t_i \restriction A^t_{<t};$$

условие Δ^e_t.

Пусть теперь w есть некоторая ∂-функция из $\mathcal{F}$ и $\mathbf{a} = a_0a_1a_2$ – произвольная последовательность из A^3_3. Пусть i – такой номер из $\{0, 1, 2\}$, что $w(\mathbf{a}) = a_i$ и j – произвольный номер из $3 \setminus \{i\}$. Обозначим символом σ транспозицию $(a_i, a_j) \in S_A$, а символом τ транспозицию $(i, j) \in S_3$. Легко проверить, что функция $w^j = w_\sigma\left(e^3_{\tau(0)}e^3_{\tau(1)}e^3_{\tau(2)}\right)$ является ∂-функцией и принимает значение a_j на последовательности $\mathbf{a}$.

Если клон $\mathcal{F}$ содержит некоторую ℓ-функцию, рассуждения аналогичны.

□

Пусть $r \geq 4$. Тогда по теореме 3.5 ограничения всех функций $f \in \mathcal{F}_{[r]}$ на множество $A^r_{<r}$ совпадают с ограничениями проекций. Остается выбрать любую функцию $w \in \mathcal{F}_{[r]} \setminus \mathcal{E}(A)$ и воспользоваться леммой 3.16.

Пусть $r = 3$. Если $\mathrm{P}_\mathcal{F} = \mathrm{O}_1$, рассуждения такие же, как в случае $r \geq 4$. Если $\mathrm{P}_\mathcal{F} \in \{\mathrm{L}_4, \mathrm{D}_1\}$, клон $\mathcal{F}$ содержит ℓ-функцию. По лемме 3.16 клон $\mathcal{F}$ удовлетворяет условию Δ^ℓ. По предложению 2.5 клон $\mathcal{F}$ удовлетворяет условию Δ^e_3. В оставшемся случае $\mathrm{P}_\mathcal{F} = \mathrm{D}_2$ клон $\mathcal{F}$ содержит ∂-функцию, значит, по лемме 3.16 удовлетворяет условию Δ^∂.

Покажем, что в последнем случае выполняется условие Δ^e_m. Можно считать, что $m \leq |A|$. Тогда для некоторого натурального числа $n \geq m$ существуют функция $g \in \mathcal{F}_{[n]}$, последовательности $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) \in A^n_2$, $\mathbf{b} = (b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}) \in A^n_m$ и элементы $a \in \operatorname{ran}\mathbf{a}$, $b \in \operatorname{ran}\mathbf{b}$, для которых нарушено условие 2-монотонности. Поскольку все функции $h \in \mathrm{D}_2$ монотонны, можно считать, что $\{i < n \colon a_i = a\} = \{i < n \colon b_i = b\}$. Тогда с помощью отождествления переменных легко найти функцию $g \in \mathcal{F}$, для которой существуют такой номер $i < m$ и такие последовательности $\mathbf{c} = (c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}) \in (\operatorname{ran}\mathbf{a})^m_2$

и $\mathbf{d} = (d_0, d_1, \ldots, d_{n-1}) \in (\operatorname{ran} \mathbf{b})^m_m$, что $\{i < m \colon c_i = a\} = \{i\}$, $d_i \neq b$, $g(\mathbf{c}) = a$ и $g(\mathbf{d}) = b$.

Легко проверить, что $g \restriction A^m_2 = e^m_i \restriction A^m_2$. Тогда $g \restriction A^m_{<m} = e^m_i \restriction A^m_{<m}$ в силу включения $\mathcal{F}_{\langle m\rangle} \subseteq \mathcal{M}_{\langle m\rangle}$. Остается воспользоваться леммой 3.16.

Перед рассмотрением случая $r = 2$ докажем несколько вспомогательных утверждений.

Для каждой пары последовательностей $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in A^2_2 \times A^2_2$ следующим образом определим последовательность $\mathrm{t}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in 2 \cup 2^2 \cup \{2\}$, которую будем называть *типом* пары $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Пусть $\mathbf{a} = a_0 a_1$ и $\mathbf{b} = b_0 b_1$. Тогда для всех $i, j \in \{0, 1\}$

$$\mathrm{t}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \begin{cases} 0, & \text{если } a_0 = b_0 \text{ и } a_1 = b_1 \\ 1, & \text{если } a_0 = b_1 \text{ и } a_1 = b_0 \\ ij, & \text{если } a_i = b_j \text{ и } a_{1-i} \neq b_{1-j} \\ 2, & \text{если } \operatorname{ran} \mathbf{a} \cap \operatorname{ran} \mathbf{b} = \emptyset \end{cases}$$

Очевидно, тип определен для каждой пары $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in A^2_2 \times A^2_2$.

Для каждого номера $i \in \{0, 1\}$ обозначим символом $\rhd_i$ бинарное отношение на множестве A^2_2, которое определяется формулой

$$\mathbf{a} \rhd_i \mathbf{b} \leftrightarrow \big((\forall f \in \mathcal{F}_{[2]})\, f(\mathbf{a}) = a_i \to f(\mathbf{b}) = b_i\big)$$

для всех $\mathbf{a} = a_0 a_1, \mathbf{b} = b_0 b_1 \in A^2_2$.

Для каждой последовательности $\mathbf{a} = a_0 a_1 \in A^2_2$ символом $\overline{\mathbf{a}}$ обозначим последовательность $a_1 a_0$.

Лемма 3.17. *Отношение $\rhd_i$ рефлексивно и транзитивно. Кроме того, для каждого номера $i \in \{0, 1\}$, последовательностей $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a}', \mathbf{b}' \in A^2_2$ и перестановки $\sigma \in S_A$*

1. $\mathbf{a} \rhd_i \mathbf{b} \to \sigma \cdot \mathbf{a} \rhd_i \sigma \cdot \mathbf{b}$,

2. $\mathbf{a} \rhd_i \mathbf{b} \to \overline{\mathbf{a}} \rhd_{1-i} \overline{\mathbf{b}}$,

3. $\mathbf{a} \rhd_i \mathbf{b} \to \mathbf{b} \rhd_{1-i} \mathbf{a}$,

4. $t(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = t(\mathbf{a}', \mathbf{b}') \to (\mathbf{a} \rhd_i \mathbf{b} \to \mathbf{a}' \rhd_i \mathbf{b}')$.

Доказательство. Сводится к формальной проверке. Пункт 4 немедленно следует из пункта 1 . □

Лемма 3.18. *Возможны только следующие случаи.*

1. $(\forall i < 2)\,(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in A_2^2)\,\mathbf{x} \rhd_i \mathbf{y}$,

2. $(\forall i < 2)\,(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in A_2^2)\,\mathbf{x} \rhd_i \mathbf{y} \leftrightarrow \mathrm{t}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$,

3. $(\forall i < 2)\,(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in A_2^2)\,\mathbf{x} \rhd_i \mathbf{y} \leftrightarrow \mathrm{t}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \{0, 1\}$,

4. $|A| = 4 \wedge (\forall i < 2)\,(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in A_2^2)\,\mathbf{x} \rhd_i \mathbf{y} \leftrightarrow \mathrm{t}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \{0, 1, 2\}$,

5. $|A| = 3 \wedge (\forall i < 2)\,(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in A_2^2)\,\mathbf{x} \rhd_i \mathbf{y} \leftrightarrow \mathrm{t}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \{0, 01, 10\}$.

Доказательство. Пусть i есть произвольный номер из $\{0, 1\}$.

Пусть отношению $\rhd_i$ принадлежит некоторая (а значит, по пункту 4 леммы 3.17, любая) пара $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in A_2^2$ типа 00. Пусть $\mathbf{a} = a_0 a_1$ и $\mathbf{b} = a_0 b_1$. Тогда имеем

(a) $a_0 a_1 \rhd_i a_0 b_1$ (условие),

(b) $a_0 b_1 \rhd_{1-i} a_0 a_1$ из (a) по пункту 2 леммы 3.17,

(c) $b_1 a_0 \rhd_i a_1 a_0$ из (b) по пункту 3 леммы 3.17,

(d) $a_0 b_1 \rhd_i a_1 b_1$ из (c) по пункту 4 леммы 3.17,

(e) $a_0 a_1 \rhd_i a_1 b_1$ из (a) и (c) по транзитивности,

(f) $a_1 b_1 \rhd_i b_1 a_0$ из (e) по пункту 4 леммы 3.17,

(g) $a_0 a_1 \rhd_i b_1 a_0$ из (a) и (f) по транзитивности,

(h) $a_0 b_1 \rhd_i a_1 a_0$ из (g) по пункту 4 леммы 3.17,

(i) $a_0 a_1 \rhd_i a_1 a_0$ из (a) и (h) по транзитивности.

Заметим, что последовательности из пп. $(c), (e), (g), (i)$ имеют тип 11, 10, 01 и 1. Вспомнив про рефлексивность отношения $\rhd_i$ и пункт 4 леммы 3.17, имеем

$$\mathbf{x} \rhd_i \mathbf{y} \text{ для всех таких } (\mathbf{x}, \mathbf{y}), \text{ что } t(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \neq 2.$$

Если $|A| = 3$, все доказано. Если $|A| \geq 4$, выберем $c \in A \setminus \{a_0, a_1, b_1\}$ и продолжаем.

(j) $a_0b_1 \rhd_i b_1c$ из (e) по пункту 4 леммы 3.17,

(k) $a_0a_1 \rhd_i b_1c$ из (a) и (j) по транзитивности.

Последовательности из п. (k) имеют тип 2. Значит, в рассмотренной ситуации реализуется случай 1.

Если отношению $\rhd_i$ принадлежит некоторая пара типа 11, рассуждения аналогичны. Далее будем считать, что ни одна пара типа 00 или 11 отношению $\rhd_i$ не принадлежит.

Пусть отношению $\rhd_i$ принадлежит некоторая (а значит, любая) пара $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in A_2^2$ типа 01. Пусть $\mathbf{a} = a_0a_1$ и $\mathbf{b} = a_1b_1$. Тогда имеем

(a') $a_0a_1 \rhd_i a_1b_1$ (условие),

(b') $a_1b_1 \rhd_i b_1a_0$ из (a') по пункту 4 леммы 3.17,

(c') $a_0a_1 \rhd_i b_1a_0$ из (a') и (b') по транзитивности.

Значит, $\mathbf{x} \rhd_i \mathbf{y}$ для всех пар $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ типа 10.

Если $\mathbf{x} \rhd_i \mathbf{y}$ для некоторой пары $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ типа 1, то имеем

(d') $a_1a_0 \rhd_i a_0a_1$ (предположение),

(e') $a_1a_0 \rhd_i a_1b_1$ из (a') и (d') по транзитивности.

Значит, отношению $\rhd_i$ принадлежит некоторая пара типа 00; противоречие.

Таким образом, отношению $\rhd_i$ принадлежат все пары типа $0, 01, 10$ и не принадлежат пары типа $1, 00, 11$. Если $|A| = 3$ реализуется случай 5. Если $|A| \geq 4$, выберем $c \in A \setminus \{a_0, a_1, b_1\}$ и продолжаем.

(f') $a_1b_1 \rhd_i b_1c$ из (a') по пункту 4 леммы 3.17,

(g') $a_0a_1 \rhd_i b_1c$ из (a') и (f') по транзитивности,

(h') $b_1c \rhd_i a_1a_0$ из (g') по пункту 4 леммы 3.17,

(i') $a_0a_1 \rhd_i a_1a_0$ из (a') и (h') по транзитивности.

Пара из п. (i') имеет тип 1, противоречие.

Если отношению $\rhd_i$ принадлежит некоторая пара типа 10, рассуждения аналогичны. Далее будем считать, что отношение $\rhd_i$ содержит только пары типов $0, 1, 2$.

Пусть отношению $\rhd_i$ принадлежит некоторая (а значит, любая) пара $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in A_2^2$ типа 2. Пусть $\mathbf{a} = a_0 a_1$ и $\mathbf{b} = b_0 b_1$. Тогда имеем

(a'') $a_0 a_1 \rhd_i b_0 b_1$ (условие),

(b'') $b_0 b_1 \rhd_i a_1 a_0$ из (a'') по пункту 4 леммы 3.17,

(c'') $a_0 a_1 \rhd_i a_1 a_0$ из (a'') и (b'') по транзитивности.

Пара из пункта (c'') имеет тип 1. Если $|A| = 4$, имеем случай 4. Если $|A| \geq 5$ выберем $c \in A \setminus \{a_0, a_1, b_0, b_1\}$ и продолжим.

(d'') $b_0 b_1 \rhd_i c a_0$ из (a'') по пункту 4 леммы 3.17,

(e'') $a_0 a_1 \rhd_i c a_0$ из (a'') и (d'') по транзитивности.

Пара из пункта (e'') имеет тип 01, противоречие.

Далее будем считать, что отношение $\rhd_i$ содержит только пары типов $0, 1$. Отсюда по пункту 4 леммы 3.17 следует, что имеет место один из случаев 2, 3.

$\square$

Продолжим доказательство теоремы. Пусть $r = 2$. Рассмотрим случаи из леммы 3.18. Случай 1 влечет условие $r \geq 3$; противоречие. Случаи 2 и 3 приводят к условию Δ^2 для клона $\mathcal{F}$.

Пусть имеет место случай 4. Выберем любое множество $B \in [A]^3$. Легко видеть, что клон $\mathcal{F} \restriction B^{<\omega}$ удовлетворяет условию Δ^2. Тогда из теоремы 3.3 легко вывести, что клон $\mathcal{F} \restriction B^{<\omega}$ содержит трехместную функцию w, для которой

$$w \restriction B^3_{<3} = e^3_0 \restriction B^3_{<3} \text{ и } w(\mathbf{a}) = a_1$$

для некоторой последовательности $\mathbf{a} = a_0 a_1 a_2 \in B^3_3$.

Для каждой последовательности $\mathbf{b} \in A^3_2 \setminus B^3_2$ существует подобная ей последовательность $\mathbf{c} \in B^3_2$. Без ограничения общности будем считать, что $\mathbf{b} = b_0 b_0 b_1$ и $\mathbf{c} = c_0 c_0 c_1$. Положим $w' = w(e^2_0, e^2_0, e^2_1)$. Поскольку для любого номера $i < 2$

выполнено $b_0b_1 \rhd_i c_0c_1$, имеем

$$w(b_0b_0b_1) = b_0 \leftrightarrow w'(b_0b_1) = b_0 \leftrightarrow w'(c_0c_1) = c_0 \leftrightarrow w(c_0c_0c_1),$$

значит, функция w совпадает с функцией e_0^3 на всем множестве $A^3_{<3}$. Остается воспользоваться леммой 3.16.

Пусть, наконец, имеет место случай 5. Легко заметить, что каждая неселекторная двухместная функция $f \in \mathcal{F}$ однозначно определяется своим значением на некоторой (любой) паре $\mathbf{a} \in A^2_2$. Пусть $A = \{a, b, c\}$. Тогда ровно две неселекторные двухместные функции u и v из клона $\mathcal{F}$ выглядят следующим образом.

u	a	b	c
a	a	b	a
b	b	b	c
c	a	c	c

v	a	b	c
a	a	a	c
b	a	b	b
c	c	b	c

Записывая для наглядности x, y, z вместо e_0^3, e_1^3, e_2^3 соответственно, рассмотрим функцию

$$w = v(v(u(x, y), u(x, z)), u(y, z)).$$

Можно проверить, что w есть ∂-функция (для этого удобно заметить, что обе функции u и w коммутативны и $u(x, y) = x \leftrightarrow v(x, y) = y$). Остается воспользоваться леммой 3.16. $\square$

По существу из доказанных теорем легко вытекает классификация симметричных квазитривиальных клонов с конечным носителем. Для ее завершения надо описать все 3-клоны $\mathcal{F}_{\langle 3 \rangle}$ и все устойчивые справа отношений эквивалентности $R_{\mathcal{F}}$ для симметричных квазитривиальных клонов $\mathcal{F}$.

Постовский класс $\mathcal{M}(2)$ есть класс всех монотонных булевых функций из T_{01}. Этот класс порождается функциями $x \vee y$ и $x \wedge y$ и имеет обозначение A_4 у Поста (M_{01} в работе [33]).

Предложение 3.19. *Пусть дан симметричный клон $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{V}(A)$. Тогда*

$$\mathcal{F}_{\langle 3\rangle} = (\mathcal{H} \cap \mathcal{F}_{R_\mathcal{F}})_{\langle 3\rangle},$$

где $\mathcal{H}$ есть свободная склейка P*-семейства $\{\mathcal{F}_B\}_{B\in[A]^2}$ для некоторого постовского класса $P \in \{\mathrm{O}_1, \mathrm{D}_1, \mathrm{D}_2, \mathrm{L}_4, \mathrm{A}_4, \mathrm{T}_{01}\}$.*

Доказательство. Очевидно, для каждого симметричного клона $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{V}(A)$ семейство $\{\mathcal{G} \restriction B^{<\omega}\}_{B\in[A]^2}$ есть P-семейство для некоторого симметричного постовского класса $\mathrm{P} \subseteq T_{01}$. Обозначим этот постовский класс символом $\mathrm{P}^0_\mathcal{G}$. Из постовской классификации (см. [33]) следует, что $\mathrm{P}^0_\mathcal{G}$ есть один из классов $\mathrm{O}_1, \mathrm{D}_1, \mathrm{D}_2, \mathrm{L}_4, \mathrm{A}_4, \mathrm{T}_{01}$.

Обозначим свободную склейку $\mathrm{P}^0_\mathcal{F}$-семейства $\{\mathcal{F}_B\}_{B\in[A]^2}$ символом $\mathcal{H}$.

Непосредственной проверкой несложно установить, что клон $\mathcal{H} \cap \mathcal{F}_{R_\mathcal{F}}$ симметричный, причем

$$\mathrm{P}^0_{\mathcal{H}\cap\mathcal{F}_{R_\mathcal{F}}} = \mathrm{P}^0_\mathcal{F} \text{ и } R_{\mathcal{H}\cap\mathcal{F}_{R_\mathcal{F}}} = R_\mathcal{F}.$$

Далее будем пользоваться обозначениями теоремы 3.15. По лемме 3.17 имеем, что во всех случаях $\rhd_0 = \rhd_1$, значит,

$$\rhd_0 = R_\mathcal{F} \cap (A^2_2 \times A^2_2).$$

Случай 1 леммы 3.18 влечет условия $\mathrm{r}(\mathcal{F}) \geq 3$ и $\mathrm{r}(\mathcal{H} \cap \mathcal{F}_{R_\mathcal{F}}) \geq 3$. Значит, по теореме 3.5,

$$\mathcal{F}_{\langle 3\rangle} = \mathrm{P}^0_\mathcal{F}(A) = (\mathcal{H} \cap \mathcal{F}_{R_\mathcal{F}})_{\langle 3\rangle}.$$

Случаи 2 и 3 влекут условие Δ^2 для клонов $\mathcal{F}$ и $\mathcal{H} \cap \mathcal{F}_{R_\mathcal{F}}$. Тогда по теореме 3.3 они равны свободной склейке $\mathrm{P}^0_\mathcal{F}$-семейства $\{\mathcal{F} \restriction B^{<\omega}\}_{B\in[A]^2}$.

Пусть имеем место случай 4. Также, как в конце доказательства теоремы 3.15, можно показать, что для любого симметричного клона $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{V}(A)$, где $|A| = 4$, удовлетворяющего условию

$$\{(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in A^2_2 \times A^2_2 \colon t(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \{0, 1, 2\}\} \subseteq R_\mathcal{G},$$

каждая функция $g \in \mathcal{G}_{\langle 3 \rangle}$ однозначно определяется ограничением $g \restriction B^{<\omega}$, где B есть произвольное трехэлементное подмножество множества A, причем для любого множества $B \in [A]^3$ клон $\mathcal{G} \restriction B^{<\omega}$ есть свободная склейка $\mathrm{P}^0_{\mathcal{G}}$-семейства $\{\mathcal{G} \restriction C^{<\omega}\}_{C \in [B]^2}$. Значит для каждого такого клона $\mathcal{G}$ 3-клон $\mathcal{G}_{\langle 3 \rangle}$ однозначно определяется постовским классом $P^0_{\mathcal{F}}$.

Вновь имеем равенство $\mathcal{F}_{\langle 3 \rangle} = (\mathcal{G} \cap \mathcal{F}_{R_{\mathcal{F}}})_{\langle 3 \rangle}$.

Пусть, наконец, имеем место случай 4. Тогда опять можно заметить, что для любого симметричного клона $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{V}(A)$, где $|A| = 3$, удовлетворяющего условию

$$\{(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in A^2_2 \times A^2_2 \colon t(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \{0, 01, 10\}\} \subseteq R_{\mathcal{G}},$$

каждая функция $g \in \mathcal{G}_{\langle 3 \rangle}$ однозначно определяется ограничением $g \restriction B^{<\omega}$, где B есть произвольное множество из $[A]^2$. Вновь имеем, что для каждого такого клона $\mathcal{G}$ 3-клон $\mathcal{G}_{\langle 3 \rangle}$ однозначно определяется постовским классом $P^0_{\mathcal{F}}$, что окончательно доказывает предложение. □

Теперь обратимся к отношениям $R_{\mathcal{F}}$ для симметричных квазитривиальных клонов $\mathcal{F}$.

Бинарное отношение R на множестве $A^{<\omega}$ мы будем называть *устойчивым слева*, если

> $\mathbf{a}\, R\, \mathbf{b} \;\to\; (\sigma \cdot \mathbf{a})\, R\, (\sigma \cdot \mathbf{b})$ для любых последовательностей $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in A^{<\omega}$ и перестановки $\sigma \in S_A$.

Предложение 3.20. *Для любого симметричного клона $\mathcal{F} \in \mathcal{V}(A)$ отношение $R_{\mathcal{F}}$ устойчиво слева.*

Доказательство. Элементарной проверкой. □

Бинарное отношение R на множестве $A^{<\omega}$ мы будем называть *инъективно устойчивым справа*, если

1. $R \subseteq \bigcup\limits_{n \leq |A|} (A^n_n \times A^n_n)$,

2. $\mathbf{a}\,R\,\mathbf{b} \to (\mathbf{a}\cdot\tau)\,R\,(\mathbf{b}\cdot\tau)$ для любых последовательностей $\mathbf{a},\mathbf{b}\in A^{<\omega}$, натурального числа $n<\operatorname{dom}\mathbf{a}$ и инъекции $\tau\colon n\to\operatorname{dom}\mathbf{a}$.

Для каждого нормального бинарного отношения R на множестве $A^{<\omega}$ положим

$$R^{\circ} = \bigcup_{(\mathbf{a},\mathbf{b})\in R}\ \bigcup_{m<\omega}\{(\mathbf{a}\cdot\tau,\mathbf{b}\cdot\tau)\colon \tau\in m^{\operatorname{dom}\mathbf{a}}\} \text{ и}$$

$$R_{\circ} = R\cap\bigcup_{n\le|A|}(A^n_n\times A^n_n).$$

Предложение 3.21. *Пусть R есть устойчивое справа бинарное отношение на множестве $A^{<\omega}$. Тогда*

1. *отношение $R_{\circ}$ инъективно устойчиво справа,*

2. *если отношение R симметрично (есть отношение эквивалентности), то и отношение $R_{\circ}$ симметрично (есть отношение эквивалентности),*

3. *$(R_{\circ})^{\circ} = R$.*

Доказательство. Неочевидным может показаться только пункт 3. Но он легко следует из следующего тривиально проверяемого факта:

Для любых натуральных чисел n,k и последовательности $\mathbf{a}\in A^n_k$ существуют функции $\tau^-_{\mathbf{a}}\colon k\to n$ и $\tau^+_{\mathbf{a}}\colon n\to k$, для которых

$$\mathbf{a}\cdot\tau^-_{\mathbf{a}}\in A^k_k \text{ и } \mathbf{a}\cdot\tau^-_{\mathbf{a}}\cdot\tau^+_{\mathbf{a}} = \mathbf{a}$$

. ☐

Предложение 3.22. *Пусть R есть инъективно устойчивое справа бинарное отношение на множестве $A^{<\omega}$. Тогда*

1. *отношение R° устойчиво справа,*

2. *если отношение R симметрично (есть отношение эквивалентности), то и отношение R° симметрично (есть отношение эквивалентности).*

Доказательство. Неочевидным может показаться только то, что операция $^\circ$ сохраняет транзитивность. Докажем это.

Пусть отношение R транзитивно и пары $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ и $(\mathbf{b}, \mathbf{c})$ принадлежат отношению R°. Положим $n = \operatorname{dom} \mathbf{a}$. Тогда для некоторого натурального числа m существуют последовательности $\mathbf{a}', \mathbf{b}', \mathbf{b}'', \mathbf{d}'' \in A^m_m$ и функции $\tau', \tau''\colon n \to m$, для которых

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' \cdot \tau',\ \mathbf{b} = \mathbf{b}' \cdot \tau' = \mathbf{b}'' \cdot \tau'',\ \mathbf{c} = \mathbf{c}'' \cdot \tau'' \text{ и } (\mathbf{a}', \mathbf{b}'), (\mathbf{b}'', \mathbf{c}'') \in R$$

Воспользуемся обозначениями из доказательства предложения 3.21. Поскольку $\operatorname{ran} \mathbf{b} \subseteq \operatorname{ran} \mathbf{b}' \cap \operatorname{ran} \mathbf{b}''$, существуют функции $\tau_0, \tau_1\colon |\operatorname{ran} \mathbf{b}| \to m$, для которых

$$\mathbf{b} \cdot \tau_{\mathbf{b}}^- = \mathbf{b}' \cdot \tau_0 = \mathbf{b}'' \cdot \tau_1.$$

Таким образом,

$$\mathbf{b}' \cdot \tau' = \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \tau_{\mathbf{b}}^- \cdot \tau_{\mathbf{b}}^+ = \mathbf{b}' \cdot \tau_0 \cdot \tau_{\mathbf{b}}^+ \text{ и } \mathbf{b}'' \cdot \tau'' = \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \tau_{\mathbf{b}}^- \cdot \tau_{\mathbf{b}}^+ = \mathbf{b}'' \cdot \tau_1 \cdot \tau_{\mathbf{b}}^+$$

Поскольку последовательности $\mathbf{b}', \mathbf{b}''$ инъективны, имеем

$$\tau' = \tau_0 \cdot \tau_{\mathbf{b}}^+ \text{ и } \tau'' = \tau_1 \cdot \tau_{\mathbf{b}}^+.$$

Из инъективности последовательностей $\mathbf{b}' \cdot \tau_0$ и $\mathbf{b}'' \cdot \tau_1$ следует инъективность последовательностей $\mathbf{a}' \cdot \tau_0$ и $\mathbf{c}'' \cdot \tau_1$. Значит,

$$\mathbf{a}' \cdot \tau_0 \ R\ \mathbf{b}' \cdot \tau_0 = \mathbf{b}'' \cdot \tau_1 \ R\ \mathbf{c}'' \cdot \tau_1$$

в силу того, что отношение R инъективно устойчивое справа. Тогда

$$\mathbf{a}' \cdot \tau_0 \ R\ \mathbf{c}'' \cdot \tau_1$$

по транзитивности. Окончательно,

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' \cdot \tau' = \mathbf{a}' \cdot \tau_0 \cdot \tau_{\mathbf{b}}^+ \ R^\circ\ \mathbf{c}'' \cdot \tau_1 \cdot \tau_{\mathbf{b}}^+ = \mathbf{c}'' \cdot \tau'' = \mathbf{c}$$

в силу того, что отношение R° инъективно устойчивое справа. $\square$

Теперь изучение симметричных устойчивых справа отношений эквивалентности сведено к изучению симметричных инъективно устойчивых отношений эквивалентности.

Для каждого натурального числа $n \geq 1$ символом Alt_n обозначим *знакопеременную группу перестановок* множества $n = \{\, 0, 1, \ldots, n-1 \,\}$, а символом K *четверную группу Клейна* перестановок множества $4 = \{0, 1, 2, 3\}$.

Для любого натурального числа m и последовательности $\mathbf{a} \in A^m_m$ символом $\mathbf{a}^+$ обозначим произвольное продолжение $\mathbf{a}$ до перестановки множества A; если $|A| = m+1$, такое продолжение однозначно.

Для каждого натурального числа m, $1 \leq m \leq |A|$, определим множество бинарных отношений $R(A, m)$.

Определение 3.23. *Для каждого натурального числа m, $1 \leq m \leq |A|$, положим,*

1. $\mathrm{Id}(A, m) \rightleftharpoons \mathrm{Id}_{A^m_m}$,
2. $\mathrm{Tot}(A, m) \rightleftharpoons A^m_m \times A^m_m$,
3. $\mathrm{Ran}(A, m) \rightleftharpoons \{(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in A^m_m \times A^m_m \colon\ \mathrm{ran}\, \mathbf{a} = \mathrm{ran}\, \mathbf{b}\}$,
4. $\mathrm{Alt}(A, m) \rightleftharpoons \{(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in A^m_m \times A^m_m \colon (\mathrm{ran}\, \mathbf{a} = \mathrm{ran}\, \mathbf{b}) \wedge (\mathbf{a}^{-1}\mathbf{b} \in Alt_m)\}$;
5. $\mathrm{Alt}^+(A, m) \rightleftharpoons \{(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in A^m_m \times A^m_m \colon (\mathbf{a}^+, \mathbf{b}^+) \in \mathrm{Alt}(A, m+1)\}$,
   если $|A| = m+1$, и не определено иначе;
6. $\mathrm{Pm}(A) \rightleftharpoons \{(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in A^m_m \times A^m_m \colon (\mathrm{ran}\, \mathbf{a} = \mathrm{ran}\, \mathbf{b}) \vee (\mathrm{ran}\, \mathbf{a} = A \setminus \mathrm{ran}\, \mathbf{b})\}$,
   если $|A| = 2m$, и не определено иначе;
7. $\mathrm{Kl}(A) \rightleftharpoons \{(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in A^4_4 \times A^4_4 \colon (\mathrm{ran}\, \mathbf{a} = \mathrm{ran}\, \mathbf{b}) \wedge (\mathbf{a}^{-1}\mathbf{b} \in K)\}$,
   если $m = 4$, и не определено иначе;
8. $\mathrm{Kl}^+(A) \rightleftharpoons \{(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in A^3_3 \times A^3_3 \colon (\mathbf{a}^+, \mathbf{b}^+) \in \mathrm{Kl}(A)\}$,
   если $m = 3$ и $|A| = 4$, и не определено иначе;

Множество $R(A,m)$ есть множество всех определенных отношений из пунктов 1 – 8.

Для каждого бинарного отношения R на множестве $A^{<\omega}$ положим

$$R_k \rightleftharpoons R \cap (A_k^k \times A_k^k).$$

Определим теперь множество бинарных отношений $\mathbb{R}(A)$.

Определение 3.24. *Для каждого натурального числа m, $1 \leq m \leq |A|$, обозначим символом $\mathbb{R}(A,m)$ любое множество отношений $R \in \bigcup\limits_{n \leq |A|} (A_n^n \times A_n^n)$, удовлетворяющих условиям:*

1. *$R_k = \mathrm{Tot}(A,k)$ для всех $k \leq m$;*
2. *если $m < |A|$, то $R_{m+1} \in R(A, m+1) \setminus \{\mathrm{Tot}(A, m+1)\}$;*
3. *выполнен один из следующих случаев:*
   - *а. $R_k = \mathrm{Id}(A,k)$ для всех $k \in \{m+2, m+3, \ldots, |A|\}$;*
   - *б. $|A| = m+2 \wedge R_{m+1} = \mathrm{Alt}^+(A, m+1) \wedge R_{m+2} = \mathrm{Alt}(A, m+2)$;*
   - *в. $|A| = 4 \wedge m = 2 \wedge R_3 = \mathrm{Kl}^+(A) \wedge\ R_4 = \mathrm{Kl}(A)$;*
   - *г. $|A| = 4 \wedge m = 1 \wedge R_2 = \mathrm{Pm}(A) \wedge R_3 = \mathrm{Kl}^+(A) \wedge\ R_4 \in \{\,\mathrm{Kl}(A), \mathrm{Id}(A,4)\}$.*

Множество $\mathbb{R}(A)$ есть $\bigcup\limits_{1 \leq m \leq |A|} \mathbb{R}(A,m)$.

Теорема 3.25. *Для каждого бинарного отношения $R \subseteq \bigcup\limits_{n<\omega} (A_n^n \times A_n^n)$ следующие условия эквивалентны.*

1. *R есть инъективно устойчивое справа и устойчивое слева отношение эквивалентности.*
2. *$R \in \mathbb{R}(A)$.*

Доказательство. Импликация 2 → 1 доказывается несложной проверкой (удобно заметить, что для любых $\mathbf{a} \in n_n^n$, $\mathbf{b}, \tau \in n_{n-1}^{n-1}$, $\eta \in (n-1)_{n-1}^{n-1}$ выполнены равенства $(\mathbf{a} \cdot \tau)^+ = \mathbf{a} \cdot \tau^+$ и $(\mathbf{b} \cdot \eta)^+ = \mathbf{b}^+ \cdot \eta^+$).

Доказательству импликации 1 → 2 предпошлем три вспомогательных утверждения, первое из которых будет использоваться и в дальнейшем.

Пусть даны конечное множество B и натуральное число m. Для любых множеств $p, q \in [B]^m$ мощность k их пересечения удовлетворяет неравенствам

$$2m - |B| \leq k \leq m.$$

Обозначим

$\mathrm{Id}^*(B, m) \rightleftharpoons \mathrm{Id}_{[B]^m}$;

$\mathrm{Tot}^*(B, m) \rightleftharpoons [B]^m \times [B]^m$;

$\mathrm{Pm}^*(B) \rightleftharpoons \{(p, q) \in [B]^m \times [B]^m \colon p = q \vee p = B \setminus q\}$,
если $|A| = 2m$, и не определено иначе;

$W(B, m, k) \rightleftharpoons \{(p, q) \in [B]^m \times [B]^m \colon |p \cap q| = k\}$,
если $2m - n \leq k \leq m$, и не определено иначе.

Лемма 3.26. *Пусть дано конечное непустое множество B и натуральные числа m и k, удовлетворяющие неравенствам $2m - |B| \leq k \leq m$. Пусть отношение W есть транзитивное замыкание отношения $W(B, m, k)$. Тогда имеет место один из следующих случаев.*

1. $W = \mathrm{Tot}^*(B, m)$.

2. $k = m$ *и* $W = \mathrm{Id}^*(B, m)$.

3. $k = 0$, $|B| = 2m$ *и* $W = \mathrm{Pm}^*(B)$.

Доказательство. Легко заметить, что отношение W рефлексивно. Тогда случаи $k = m$ и $k = 0 \wedge |B| = 2m$ очевидны. Далее будем считать, что выполнены

условия
$$k < m \text{ и } (k \neq 0 \vee |B| \neq 2m).$$

Убедимся, что достаточно рассмотреть случай $k = m-1$. Для этого достаточно показать, что, если $k \neq m-1$, то для любой пары $(p,q) \in W(B,m,m-1)$ существует такое множество $s \in [B]^m$, что $(s,q),(s,p) \in W(B,m,k)$.

Если $k \neq 0$, выберем некоторое $(k-1)$-элементное множество $u \subseteq p \cap q$. Множество $B \setminus (p \cup q)$ содержит $|B| - m - 1$ элемент. Неравенства из условия гарантируют существование $(m-k-1)$-элементного множества $v \subseteq B \setminus (p \cup q)$. Остается положить $s = u \cup v \cup (p \triangle q)$.

Если $k = 0$, то существование искомого множества s немеделенно следует из неравенство $|B \setminus (p \cup q)| \geq m$, которое, в свою очередь, вытекает из условия $|B| \neq 2m$.

Теперь докажем лемму в случае $k = m-1$. Пусть даны произвольные различные множества $p, q \in [B]^r$. Положим $|p \setminus q| = l$, $p \setminus q = \{a_0, a_1, \ldots, a_{l-1}\}$ и $q \setminus p = \{b_0, b_1, \ldots, b_{l-1}\}$. Рассмотрим последовательность $\{p_i\}_{i<l}$, где $p_0 = p$ и $p_{i+1} = (p_i \setminus \{a_i\}) \cup \{b_i\}$ для всех $i < l-1$. Пары соседних членов этой последовательности принадлежат отношению $W(B,m,m-1)$, откуда $p = p_0 \, W \, p_{l-1} = q$ по транзитивности. Таким образом, $W = \mathrm{Tot}^*(B,m)$. $\square$

Отношение *быть нормальной погруппой* обозначается символом $\trianglelefteq$. Носитель перестановки $\sigma \in S_n$, т.е. множество $\{i < n \colon \sigma(i) \neq i\}$ обозначим символом $\operatorname{supp} \sigma$, а подгруппу группы S_n, включающую все перестановки, имеющие одну и ту же неподвижную точку $i < n$ – символом $\mathrm{St}(n,i)$. Очевидно, $\mathrm{St}(n,i) \cong \mathbb{S}_{n-1}$.

Лемма 3.27. *Пусть даны натуральные числа i и n, $1 \leq i < n < \omega$ и такая подгруппа G группы S_n, что для любой перестановки $\tau \in \mathrm{St}(n,i)$ множество $\tau G \tau^{-1} \subseteq G$. Тогда либо $G \trianglelefteq \mathrm{St}(n,i)$, либо $G \trianglelefteq S_n$.*

Доказательство. Случай $n = 2$ тривиален; в дальнейшем считаем, что $n \geq 3$. Очевидно, если $G \subseteq \mathrm{St}(n,i)$, то $G \trianglelefteq \mathrm{St}(n,i)$. Пусть имеет место противоположный случай. Покажем, во-первых, что множество $G \setminus \mathrm{St}(n,i)$ содержит либо цикл, либо произведение непересекающихся транспозиций.

Выберем перестановку $\gamma \in G \setminus \mathrm{St}(n,i)$ так, что в представлении γ в виде непересекающихся циклов $\gamma = \gamma_0\gamma_1 \dots \gamma_k$, где $i \in \operatorname{supp}\gamma_0$, порядок цикла γ_0 минимален. Перестановка $\widetilde{\gamma} = \gamma_1\gamma_2 \dots \gamma_k$ сопряжена с перестановкой $\widetilde{\gamma}^{-1}$ с помощью такой перестановки $\tau \in \mathrm{St}(n,i)$, что $\operatorname{supp}\tau \subseteq \operatorname{supp}\widetilde{\gamma}$.

Поэтому $\gamma_0^2 = \gamma\tau\gamma\tau^{-1} \in G$.

Порядок s цикла γ_0 не может быть четным числом большим 2, т.к. в этом случае перестановка γ_0^2 принадлежит множеству $G \setminus \mathrm{St}(n,i)$ и равна произведению непересекающихся циклов порядка $\frac{m}{2}$, и, следовательно, γ не удовлетворяет условию минимальности. Поэтому, если $s > 2$, то множество $G \setminus \mathrm{St}(n,i)$ содержит цикл γ_0^2.

Рассмотрим случай $s = 2$. Если $n \le 5$, то $|\operatorname{supp}\widetilde{\gamma}| \le 3$ и, следовательно, перестановка $\widetilde{\gamma}$ есть либо транспозиция (а перестановка γ произведение непересекающихся транспозиций), либо цикл третьего порядка, откуда следует, что $\gamma_0 = \gamma^3 \in G \setminus \mathrm{St}(n,i)$.

Пусть $n > 5$. Равенство $s = 2$ влечет условие $\gamma^2 = \widetilde{\gamma}^2 \in G \cap \mathrm{St}(n,i)$. Группа $G' = G \cap \mathrm{St}(n,i)$ нормальна в $\mathrm{St}(n,i) \cong S_{n-1}$ и не изоморфна четверной группой Клейна. Если $G' = \langle e \rangle$, то $\gamma^2 = e$, и, следовательно, γ есть произведение непересекающихся транспозиций. В прочих случаях группа G' содержит либо $\widetilde{\gamma}^{-1}$, либо $\widetilde{\gamma}^{-1}\delta$ для любой транспозиции δ и, следовательно, множество $G \setminus \mathrm{St}(n,i)$ содержит либо транспозицию $\gamma_0 = \gamma\widetilde{\gamma}^{-1}$, либо произведение непересекающихся транспозиций $\gamma_0\delta = \gamma\widetilde{\gamma}^{-1}\delta$.

Покажем теперь, что группа G включает либо множество G_0 всех циклов ζ_0 третьего порядка, для которых $i \in \operatorname{supp}\zeta_0$, либо множество G_1 всех произведений непересекающихся транспозиций ζ_1, для которых $\operatorname{supp}\zeta_1 = n$.

Действительно, поскольку для любого $q \in \{0,1\}$ все элементы множества G_q попарно сопряжены посредством некоторых перестановок из $\mathrm{St}(n,i)$, достаточно показать, что группа G непусто пересекается по крайней мере с одним из них. Допустим, что $G \cap G_1 = \emptyset$ и докажем, что $G \setminus \mathrm{St}(n, i)$ содержит цикл ζ_0 третьего порядка. Если для некоторых $j, k < n$ множество $G \setminus \mathrm{St}(n, i)$ содержит цикл $\gamma = (i, j, k, \ldots)$, то можно положить $\zeta_0 = (i, k, j) = (j, k)\gamma^{-1}(j, k)\gamma$. Если же $G \setminus \mathrm{St}(n, i)$ содержит такое произведение непересекающихся транспозиций δ, что $\operatorname{supp} \delta \neq n$, то можно положить $\zeta_0 = (i, j, k) = \delta(j, k)\delta(j, k)$, где $\delta(i) = j$ и $k \notin \operatorname{supp} \delta$.

Покажем далее, что группы $\langle G_0 \rangle$ и $\langle G_1 \rangle$ нормальны в $\mathbb{S}_n$. Поскольку каждое из множеств G_0 и G_1 замкнуто относительно сопряжений посредством перестановок из $\mathrm{St}(n, i)$, для этого достаточно показать, что для каждого индекса $q \in \{0, 1\}$, каждой перестановки $\zeta \in G_q$ и каждой транспозиции $(i, l) \in S_n$ перестановка $(i, l)\zeta(i, l)$ принадлежит группе $\langle G_q \rangle$.

Пусть $\zeta = (i, j, k) \in G_0$. Если $l \in \{j, k\}$, то $(i, l)\zeta(i, l) = (i, k, j) \in G_0$. Иначе $(i, l)\zeta(i, l) = (l, j, k) = \zeta(i, k, l) \in \langle G_0 \rangle$.

Если же $\zeta \in G_1$, то $(i, l)\zeta(i, l) = (j, t)\zeta(j, t) \in G_1$, где $t = \zeta(i)$.

Таким образом, группа G содержит неединичную подгруппу, нормальную в S_n. Для окончания доказательства остается заметить, что группа S_n не содержит подгрупп, промежуточных по включению между неединичными нормальными подгруппами. $\square$

Пусть $|A| = n$. Без ограничения общности будем считать, что

$$A = n = \{0, 1, \ldots, n-1\}.$$

Лемма 3.28. *Пусть дано инъективно устойчивое справа и устойчивое слева отношение эквивалентности R и натуральное число m, $1 \leq m \leq n$. Тогда $R_m \in R(n, m)$.*

Доказательство. Рассмотрим несколько случаев.

Случай 1: $m = n$. Тогда отношение R_m есть конгруэнция группы S_n, откуда $R_m \in \{\mathrm{Tot}(n, n), \mathrm{Alt}(n, n), \mathrm{Id}(n, n)\}$ или $n = 4$ и $R_m = \mathrm{Kl}(n)$. Утверждение леммы выполнено.

В дальнейшем считаем, что $m < n$. Ограничение отношения R_m на множество $m^m_m \subset n^m_m$ будем обозначать символом R^-_m.

Перед рассмотрением других случаев докажем следующие факты 1 – 5.

1. *$R^-_m \in \{\mathrm{Tot}(m,m), \mathrm{Alt}(m,m), \mathrm{Id}(m,m)\}$ или $m = 4$ и $R^-_m = \mathrm{Kl}(m)$.*

   Следует из случая 1.

2. *Для любых последовательностей $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in n^m_m$ с одинаковыми областями значений выпролнено $\mathbf{a}\, R_m\, \mathbf{b} \leftrightarrow \mathbf{e}\, R^-_m \mathbf{a}^{-1}\mathbf{b}$, где $\mathbf{e} = 01\ldots(m-1)$.*

   Легко следует из устойчивости слева отношения R.

3. *Если $R_m \subseteq \mathrm{Ran}(n,m)$, то $R_m \in \{\mathrm{Ran}(n,m), \mathrm{Alt}(n,m), \mathrm{Id}(n,m)\}$ или $m = 4$ и $R_m = \mathrm{K}(n)$.*

   Следует из фактов 1 и 2.

4. *Если $R^-_m = \mathrm{Tot}(m,m)$, то $\mathrm{Ran}(n,m) \subseteq R_m$.*

   Следует из факта 2.

5. *Если $\mathrm{Ran}(n,m) \subseteq R_m$, то $R_m \in \{\mathrm{Tot}(n,m), \mathrm{Ran}(n,m)\}$ или $n = 2m$ и $R_m = \mathrm{Pm}(n)$.*

   Доказательство. Рассмотрим отношение

   $R^*_m = \{(p,q) \in [n]^m \times [n]^m \colon (\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in n^m_m)\,(\mathrm{ran}\,\mathbf{a} = p \wedge \mathrm{ran}\,\mathbf{b} = q) \to \mathbf{b}\, R_m\, \mathbf{c}\}$.

   Если $\mathrm{Ran}(n,m) \subseteq R_m$, то

   $$\mathbf{a}\, R_m\, \mathbf{b} \leftrightarrow \mathrm{ran}\,\mathbf{a}\, R^*_m\, \mathrm{ran}\,\mathbf{b}$$

   для всех $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in n^m_m$.

   Значит, достаточно показать, что

   $$R^*_m \in \{\mathrm{Id}^*(A,m), \mathrm{Tot}^*(A,m), \mathrm{Pm}^*(A,m)\}.$$

Заметим, что отношение R_m^* не пусто (оно рефлексивно в силу включения $\mathrm{Ran}(n,m) \subseteq R_m$), транзитивно (что следует из транзитивности отношения R) и обладает следующим свойством

$$(p,q) \in R_m^* \to (\forall p', q' \in [n]^m)\, |p' \cap q'| = |p \cap q| \to (p', q') \in R_m^*$$

(что следует из устойчивости слева отношения R).

Значит, для любого натурального числа k имеет место следующее утверждение: если существуют пара $(p,q) \in R_m^*$ множеств p и q с мощностью пересечения k, то отношение R_m^* содержит транзитивное замыкание каждого отношения $W(n,m,k)$. Остается применить лемму 3.26. Факт доказан.

Случай 2: $n \geq m+2$. В виду фактов 3 и 5, достаточно доказать, что

$$R_m \setminus \mathrm{Ran}(n,m) \neq \emptyset \to \mathrm{Ran}(n,m) \subseteq R_m.$$

Пусть для некоторых $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in n_m^m$ имеет место $\mathbf{a}\, R_m\, \mathbf{b} \wedge \mathrm{ran}\, \mathbf{a} \neq \mathrm{ran}\, \mathbf{b}$.

В начале докажем утверждение в предположении $|\mathrm{ran}\, \mathbf{b} \setminus \mathrm{ran}\, \mathbf{a}| \geq 2$. Выберем два различных элемента $a, b \in \mathrm{ran}\, b \setminus \mathrm{ran}\, a$. Тогда, очевидно, $\mathbf{a} = (a,b) \cdot \mathbf{a}$, откуда

$$\mathbf{a}\ R_m\ (a,b) \cdot \mathbf{b},$$

и, по симметричности и транзитивности,

$$(a,b) \cdot \mathbf{b}\ R_m\ \mathbf{b}.$$

По факту 2 имеем

$$\mathbf{e}\, R_m^-\, \mathbf{b}^{-1} \cdot (a,b) \cdot \mathbf{b}.$$

Перестановка $\mathbf{b}^{-1} \cdot (a,b) \cdot \mathbf{b}$ есть некоторая транспозиция в группе S_m. Тогда из факта 1 следует, что $R^- = \mathrm{Tot}(m,m)$ (ни одно другое из возможных отношений R^- не содержит пары $(\mathbf{e}, \sigma)$, где σ – транспозиция). Теперь $\mathrm{Ran}(n,m) \subseteq R_m$ по факту 4.

Пусть теперь $|\operatorname{ran}\mathbf{b}\setminus\operatorname{ran}\mathbf{a}|=1$. Достаточно доказать, что существуют и некоторые последовательности $\mathbf{c},\mathbf{d}\in n_m^m$, для которых

$$\mathbf{c}\ R_m\ \mathbf{d}\ \text{и}\ |\operatorname{ran}\mathbf{d}\setminus\operatorname{ran}\mathbf{c}|\geq 2$$

Выберем такие натуральные числа i, a, b, s, что

$$i<m\wedge a=\mathbf{b}(i)\notin\operatorname{ran}\mathbf{a}\wedge b\in\operatorname{ran}\mathbf{a}\setminus\operatorname{ran}\mathbf{b}\wedge s\in n\setminus(\operatorname{ran}\mathbf{a}\cup\operatorname{ran}\mathbf{b}).$$

Положим $\mathbf{c}=(a,s)\cdot\mathbf{b}$. Очевидно, $(a,s)\cdot\mathbf{a}=\mathbf{a}$, откуда

$$\mathbf{c}\,R_m\,\mathbf{a}\ \text{и}\ \{a,b\}\cap\operatorname{ran}\mathbf{c}=\emptyset.$$

Выберем номер $j\in m\setminus\{i\}$, для которого $b\in\{\mathbf{a}(i),\mathbf{a}(j)\}$ (если $\mathbf{a}^{-1}(b)\neq i$, то $j=\mathbf{a}^{-1}(b)$, иначе j – любой элемент множества $m\setminus\{i\}$).
Положим $\mathbf{d}=(t,b)\cdot\mathbf{b}\cdot(i,j)$, где $\{\,t\,\}=\{\mathbf{a}(i),\mathbf{a}(j)\}\setminus\{\,b\,\}$.
Тогда имеем $\mathbf{a}=(t,b)\cdot\mathbf{a}\cdot(i,j)$, откуда

$$\mathbf{a}\,R_m\,\mathbf{d}\ \text{и}\ \{a,b\}\subseteq\operatorname{ran}\mathbf{d}$$

(последнее вытекает из того, что $t\in\operatorname{ran}\mathbf{b}$). Окончательно,

$$\mathbf{c}\,R_m\,\mathbf{d}\ \text{и}\ \{a,b\}\subseteq\operatorname{ran}\mathbf{d}\setminus\operatorname{ran}\mathbf{c},$$

что заканчивает разбор данного случая.

Случай 3: $n=m+1$. Для каждой функции $\mathbf{a}\in n_n^n$ обозначим символом $\mathbf{a}^-$ ее ограничение на $n-1$. Очевидно

$$(\mathbf{a}^+)^-=\mathbf{a}\ \text{и}\ (\mathbf{b}^-)^+=\mathbf{b}$$

для всех $\mathbf{a}\in n_{n-1}^{n-1}$ и $\mathbf{b}\in n_n^n$.

Следующим образом определим отношение R_m^+ на n_n^n.

$$\mathbf{a}\,R_m^+\,\mathbf{b}\leftrightarrow\mathbf{a}^-\,R_m\,\mathbf{b}^-$$

Стандартные рассуждения приводят к тому, что существует подгруппа G группы S_n, для которой

$$\tau \cdot G \cdot \tau^{-1} \subseteq G$$

для всех перестановок $\tau \in \mathrm{St}(n, n)$, и

$$\mathbf{a}\, R_m\, \mathbf{b} \leftrightarrow \mathbf{a}^+\, R_m^+\, \mathbf{b}^+ \leftrightarrow \mathbf{a}^+ \cdot (\mathbf{b}^+)^{-1} \in G$$

для всех $a, b \in n_{n-1}^{n-1}$.

По лемме 3.27 каждая такая группа G нормальна либо в S_n либо в $\mathrm{St}(n, n)$. Второй вариант приводит к утверждению

$$R_m \in \{\mathrm{Tot}(n, n-1), \mathrm{Id}(n, n-1), \mathrm{Alt}(n, n-1)\} \text{ или } n = 5 \wedge R_m = \mathrm{Kl}(5)$$

, а первый добавляет еще возможности

$$R_m = \mathrm{Alt}^+(n, n-1) \text{ и } n = 4 \wedge R_m = \mathrm{Kl}^+(4)$$

. □

Окончательное доказательство теоремы может быть сведено к перебору случаев, которые возможны для отношений R_k по лемме 3.28. Для этого удобно заметить, что "в большинстве случаев" отношение R_k не содержит пар последовательностей с различными областями значений. При этом во всех случаях кроме $R_k = \mathrm{Id}(n, k)$ и $R_k = \mathrm{Kl}^+(n)$ отношение R_k содержит такую пару последовательностей $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, что $\mathrm{ran}\,\mathbf{a}\cdot\tau \neq \mathrm{ran}\,\mathbf{b}\cdot\tau$ для некоторой инъекции $\tau\colon k-1 \to k$. Действительно, если $R_k \in \{\mathrm{Tot}(n, k), \mathrm{Alt}(n, k), \mathrm{Alt}^+(n, k)\}$, можно положить

$$\mathbf{a} = 0, 1, 2, \ldots, \ \ \mathbf{b} = 1, 2, 0, \ldots \ \text{ и } \tau = 123\ldots$$

а в случае $R_k \in \{\mathrm{Kl}(n), \mathrm{Pm}(n)\}$ годится любая пара различных последовательностей из R_k.

Заметим, что при этом будет также выполнено $\mathrm{ran}\,\mathbf{a} \cdot \tau \neq n \setminus \mathrm{ran}\,\mathbf{b} \cdot \tau$, что исключает возможность $R_{k-1} = \mathrm{Pm}(n)$.

Таким образом, имеет место следующий факт.

Если $R_k \neq \mathrm{Id}(n,k)$ *и* $R_k \neq \mathrm{Kl}^+(n)$*, то отношение* R_{k-1} *может быть только одним из отношений* $\mathrm{Tot}(n,k-1)$*,* $\mathrm{Alt}^+(n,k-1)$ *и* $\mathrm{Kl}^+(n)$*.*

Если $R_k = \mathrm{Id}(n,k)$ для всех $k \leq n$, теорема верна. В противном случае положим $k_0 = \max\{k < n\colon R_k \neq \mathrm{Id}(n,k)\}$. Пусть $R_{k_0} \neq \mathrm{Kl}^+(n)$. Если $k_0 \neq n$, теорема сразу следует из доказанного факта. В противном случае все возможности для R_{n-1}, кроме описанных в определении 3.24 легко исключить, обратив внимание на равенство $R_{n-1} = R_n^-$. Далее вновь по доказанному факту имеем $R_l = \mathrm{Tot}(n,l)$ для всех $l \leq n-2$.

Несложное рассмотрение случая $R_{k_0} = \mathrm{Kl}^+(n)$ окончательно доказывает теорему. □

Теперь мы полностью готовы сформулировать и доказать основную классификационную теорему.

Теорема 3.29 (**о классификации симметричных квазитривиальных клонов с конечным носителем**). *Пусть дан клон* $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{V}(A)$*. Тогда клон* $\mathcal{F}$ *симметричный тогда и только тогда, когда может быть представлен в виде пересечения* $\mathcal{F}_0 \cap \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 \cap \mathcal{F}_3$*, где*

1. $\mathcal{F}_0 = \mathcal{E}(A)^{\uparrow}_{\langle r\rangle}$ *для некоторого натурального числа* $r \geq 1$*,*

2. $\mathcal{F}_1 = \mathcal{M}(A)^{\uparrow}_{\langle m\rangle}$ *для некоторого натурального числа* $m \geq 1$*,*

3. $\mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_{R^\circ}$ *для некоторого отношения* $R \in \mathbb{R}(A)$*,*

4. $\mathcal{F}_3$ *есть свободная склейка* P*-семейства клонов* $\{\mathcal{F}_B\}_{B\in[A]^2}$ *для некоторого постовского класса* $\mathrm{P} \in \{\mathrm{O}_1, \mathrm{D}_1, \mathrm{D}_2, \mathrm{L}_4, \mathrm{A}_4, \mathrm{T}_{01}\}$*.*

Доказательство. Легко проверить, что каждый из клонов $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3$ симметричен. Это доказывает теорему в одну сторону.

Заметим, что клон $\mathcal{V}(A)$ можно представить как $\mathcal{E}(A)^{\uparrow}_{\langle 1\rangle}$, $\mathcal{M}(A)^{\uparrow}_{\langle 1\rangle}$, $\mathcal{F}_{R^\circ}$ для отношения R, для которого $R_k = \mathrm{Id}(A,k)$ для всех $k \leq n$, и, наконец, как свободную склейку T_{01}-семейства клонов $\{\mathcal{F}_B\}_{B\in[A]^2}$. Поэтому каждое пересечение менее чем четырех клонов $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3$ указанного типа может быть заменено полным. Далее остается рассмотреть случаи теоремы 3.15 и воспользоваться доказанными результатами.

Если $\mathrm{r}(\mathcal{F}) \geq 4$, теорема следует из теорем 3.15, 3.5, 3.10, предложения 3.20 и теоремы 3.25.

Если $\mathrm{r}(\mathcal{F}) = 3$ надо дополнительно использовать теорему 3.13 и предложение 3.19.

Наконец, если $\mathrm{r}(\mathcal{F}) = 3$, нужна еще теорема 3.3. $\square$

Глава 4

Простое свойство Эрроу для симметричных множеств функций выбора

В этой главе будет доказана дана исчерпывающая классификация симметричных множеств r-функций выбора, обладающих свойством Эрроу.

На протяжении этой главы мы будем считать фиксированным конечное непустое множество A и натуральное число r. Во избежание рассмотрения тривиальных случаев, мы будем считать, что $|A| \geq 3$ и $2 \leq r \leq |A|$. Множество функций выбора на множестве A обозначается символом $\mathfrak{C}(A)$. Ограничение множества $\mathfrak{C}(A)$ на множество $[A]^r$ обозначается символом $\mathfrak{C}_r(A)$:

$$\mathfrak{C}_r(A) = \{\mathfrak{c} \in {}^{[A]^r}\!A \colon (\forall p \in [A]^r)\, \mathfrak{c}(p) \in p\}.$$

Каждую функцию $\mathfrak{c} \in \mathfrak{C}_r(A)$ мы называем r-функцией выбора.

Для каждой перестановки $\sigma \in S_A$ и функции $\mathfrak{c} \in \mathfrak{C}_r(A)$ функция c_σ определяется равенством

$$\mathfrak{c}_\sigma(p) = \sigma^{-1}(\mathfrak{c}(\sigma(p)))$$

для всех $p \in [A]^r$.

Множество $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{C}_r(A)$ называется *симметричным*, если вместе с каждой функцией $\mathfrak{c}$ оно содержит функцию $\mathfrak{c}_\sigma$ для любой перестановки $\sigma \in S_A$.

Сразу определим несколько специальных множеств $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{C}_r(A)$.

Предположим вначале, что $|A| = 4$ и $r = 3$. Тогда легко проверить, что для каждой пары различных множеств $p, q \in [A]^3$ существует единственная перестановка σ из группы Клейна $K \subseteq S_A$, для которой имеет место равенство $q = \sigma(p)$. Обозначим такую перестановку символом $\sigma_{p,q}$, а символом $\mathfrak{C}_3^K(A)$ множество всех функций $\mathfrak{c} \in \mathfrak{C}_3(4)$, которые удовлетворяют равенству

$$\mathfrak{c}(q) = \sigma_{p,q}\mathfrak{c}(p) \text{ для всех различных } p, q \in [A]^3.$$

Предложение 4.1. *Если $|A| = 4$, то множество $\mathfrak{C}_3^K(A)$ есть собственное непустое симметричное подмножество множества $\mathfrak{C}_3(A)$.*

Доказательство. Несложной проверкой. $\square$

Теперь предположим, что $r = 2$. Заметим, что 2-функции выбора можно следующим образом наглядно полными ориентированными графами. Каждой функции $\mathfrak{c} \in \mathfrak{C}_2(A)$ поставим в соответствие во взаимно-однозначное соответствие полный ориентированный граф (*турнир*) $\Gamma_{\mathfrak{c}} = (A, E)$, где

$$E = \{(a, b) \in A \times A \colon a \neq b \wedge \mathfrak{c}(\{a, b\}) = b\}.$$

Любое симметричное множество $\mathfrak{D}$ таким образом может быть представлено, как некоторое множество турниров, замкнутое относительно изоморфизмов.

Определим множества $\mathfrak{C}_2^0(A)$, $\mathfrak{C}_2^1(A)$ как множества всех функций $\mathfrak{c} \in \mathfrak{C}_2(A)$, для которых каждая вершина графа $\Gamma_{\mathfrak{c}}$ имеет четную (соответственно, нечетную) *степень захода*.

Более формально эти множества можно определить так. Для каждой функции $\mathfrak{c} \in \mathfrak{C}_2(A)$, элемента $a \in A$ и номера $i \in \{0, 1\}$ положим

$$\begin{aligned}
Z_a^{\mathfrak{c}} &= \{b \in A \setminus \{a\} \colon \mathfrak{c}(\{a, b\}) = a\}, \\
W_i^{\mathfrak{c}} &= \{a \in A \colon |Z_a^{\mathfrak{c}}| = i \pmod 2\}, \\
\mathfrak{C}_2^i(A) &= \{\mathfrak{c} \in \mathfrak{C}_2(A) \colon W_{(1-i)}^{\mathfrak{c}} = \emptyset\}.
\end{aligned}$$

Теорема 4.2. *Каждое из множеств $\mathfrak{C}_2^0(A)$, $\mathfrak{C}_1^0(A)$, $\mathfrak{C}_2^0(A) \cup \mathfrak{C}_2^1(A)$ симметрично. При этом*

1. $\mathfrak{C}_2^0(A) \neq \emptyset \leftrightarrow n = 0, 1 \pmod 4$;

2. $\mathfrak{C}_2^1(A) \neq \emptyset \leftrightarrow n = 0, 3 \pmod 4$;

3. $\mathfrak{C}_2^0(A) \cup \mathfrak{C}_2^1(A) \neq \mathfrak{C}_2(A)$.

Доказательство. Симметричность множеств $\mathfrak{C}_2^0(A)$, $\mathfrak{C}_1^0(A)$, $\mathfrak{C}_2^0(A) \cup \mathfrak{C}_2^1(A)$ очевидна. Будем доказывать остальные утверждения.

Пусть $|A| = n$. Без ограничения общности будем считать, что множество A есть $n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Докажем лемму.

Лемма 4.3. *Для любой функции* $\mathfrak{c} \in \mathfrak{C}_2(n)$

$$|W_0^{\mathfrak{c}}| = \frac{n(n+1)}{2} \pmod 2 \ \text{ и } |W_1^{\mathfrak{c}}| = \frac{n(n-1)}{2} \pmod 2.$$

Доказательство. Пусть $\mathfrak{c}$ – произвольная функция из $\mathfrak{C}_2(n)$. Для каждого натурального числа $k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$, $2 \le k \le n$, ограничение функции $\mathfrak{c}$ на множество $[k]^2$ обозначим символом $\mathfrak{c}_{(k)}$. Легко видеть, что для каждого натурального числа k, $3 \le k \le n$, выполнено

$$W_0^{\mathfrak{c}(k)} \setminus \{k\} = (W_0^{\mathfrak{c}(k-1)} \cap Z_k^{\mathfrak{c}(k)}) \cup (W_1^{\mathfrak{c}(k-1)} \cap \overline{Z_k^{\mathfrak{c}(k)}}),$$

откуда имеем $|W_0^{\mathfrak{c}(k)} \setminus \{k\}| =$

$$= |W_0^{\mathfrak{c}(k-1)}| - |W_0^{\mathfrak{c}(k-1)} \cap \overline{Z_k^{\mathfrak{c}(k)}}| + |W_1^{\mathfrak{c}(k-1)} \cap \overline{Z_k^{\mathfrak{c}(k)}}| = |W_0^{\mathfrak{c}(k-1)}| + |\overline{Z_k^{\mathfrak{c}(k)}}| \pmod 2.$$

Кроме того,

$$k \in W_0^{\mathfrak{c}(k)} \leftrightarrow |Z_k^{\mathfrak{c}(k)}| = 0 \pmod 2.$$

Отсюда

$$|W_0^{\mathfrak{c}(k)}| = |W_0^{\mathfrak{c}(k-1)}| + |\overline{Z_k^{\mathfrak{c}(k)}}| + |Z_k^{\mathfrak{c}(k)}| + 1 = |W_0^{\mathfrak{c}(k-1)}| + k \pmod 2.$$

Теперь, поскольку $|W_0^{\mathfrak{c}(2)}| = 1$, после очевидных преобразований получаем равенство $|W_0^k| = \frac{k(k+1)}{2} \pmod 2$, что при $k = n$ дает первое из доказываемых равенств. Второе следует из первого. $\square$

Теперь докажем теорему. Пусть $n = 2 \pmod 4$. Тогда для любой функции $\mathfrak{c} \in \mathfrak{C}_2(n)$ множества $W_0^{\mathfrak{c}}$, $W_1^{\mathfrak{c}}$ непусты, поскольку согласно доказанному факту $|W_0^{\mathfrak{c}}| = |W_1^{\mathfrak{c}}| = 1 \pmod 2$. Следовательно, $\mathfrak{C}_2^0(n) = \mathfrak{C}_2^1(n) = \emptyset$.

Аналогично, если $n = 1 \pmod 4$, то $\mathfrak{C}_2^1(n) = \emptyset$, а если $n = 3 \pmod 4$, то $\mathfrak{C}_2^0(n) = \emptyset$, что доказывает пункты 1 и 2 в одну сторону и пункт 3 при $n = 2 \pmod 4$.

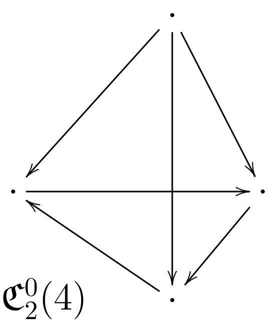
Вновь рассмотрим случай $n = 1 \pmod 4$. Выберем произвольную функцию $\mathfrak{c} \in \mathfrak{C}_2(n-1)$ и следующим образом продолжим ее на множество $[n]^2$. Положим $\mathfrak{c}^+(p) = \mathfrak{c}(p)$ для всех множеств $p \in [n-1]^2$ и $\mathfrak{c}^+(\{x, n\}) = n \leftrightarrow x \in W_0^{\mathfrak{c}}$ для всех $x \in (n-1)$. Тогда, очевидно, $W_1^{\mathfrak{c}^+} \setminus \{n\} = \emptyset$. Кроме того, по лемме 4.2 выполнено $|Z_n^{\mathfrak{c}^+}| = |W_0^{\mathfrak{c}}| = 0 \pmod 2$, т.е. $n \in W_0^{\mathfrak{c}^+}$. Таким образом, $W_1^{\mathfrak{c}^+} = \emptyset$, и, следовательно, $\mathfrak{c}^+ \in \mathfrak{C}_2^0(n)$.

Аналогично доказывается непустота множества $\mathfrak{C}_2^1(n)$ в случае $n = 3 \pmod 4$ и непустота обоих, если $n = 0 \pmod 4$.

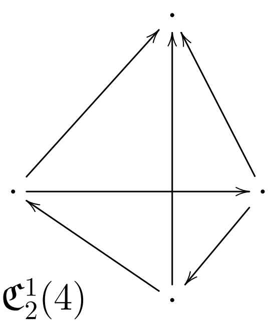
Это доказывает пункты 1 и 2 в другую сторону.

Теперь остается заметить, что, если $n \neq 2 \pmod 4$, то выбрав произвольную функцию $\mathfrak{c}$ из непустого множества $\mathfrak{C}_2^i(n)$ и переопределив ее на произвольном множестве $p \in [n]^2$, получим функцию $\mathfrak{c}' \in \mathfrak{C}_2(A) \setminus (\mathfrak{C}_2^0(A) \cup \mathfrak{C}_2^1(A))$, что окончательно доказывает пункт 3. $\square$

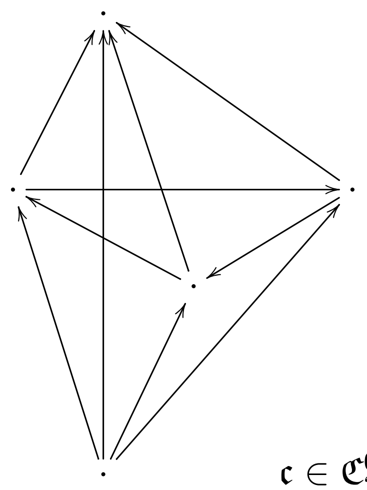
На рисунке изображены представители классов турниров, соответствующих множествам $\mathfrak{C}_2^0(4)$, $\mathfrak{C}_2^1(4)$ и $\mathfrak{C}_2^0(5)$.



$\mathfrak{c} \in \mathfrak{C}_2^0(4)$



$\mathfrak{c} \in \mathfrak{C}_2^1(4)$



$\mathfrak{c} \in \mathfrak{C}_2^0(5)$

Определение 4.4. *Множество $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{C}(A)$ обладает простым свойством Эрроу, если для каждого натурального числа $n \geq 1$ каждая n-местная квазитривиальная функция, которая сохраняет множество $\mathfrak{D}$, совпадает с проекцией на множестве $A^n_{\leq r}$, т.е.*

$$(\mathrm{pol}\,\mathfrak{D} \cap \mathcal{V}(A))_{\langle r+1\rangle} = \mathcal{E}(A)_{\langle r+1\rangle}.$$

Предложение 4.5. *Если $|A| = 4$, то множество $\mathfrak{C}_3^K(A)$ не обладает простым свойством Эрроу.*

При любом значении $|A|$ множества $\mathfrak{C}_2^0(A)$, $\mathfrak{C}_1^0(A)$, $\mathfrak{C}_2^0(A) \cup \mathfrak{C}_2^1(A)$ не обладают простым свойством Эрроу.

Доказательство. Пусть вначале $|A| = 4$. Положим $A = \{a, b, c, d\}$. Тогда явно построим множество $\mathfrak{C}_3^K(A)$ и какую-нибудь неселекторную функцию w из клона $\mathcal{F}_{R^\circ}$, где R есть устойчивое слева и инъективно устойчивое справа отношение, для которого $R_3 = \mathrm{Kl}^+(A)$ (это несложно сделать, поскольку легко заметить, что каждая функция $\mathfrak{c} \in \mathfrak{C}_3^K(A)$ однозначно определяется своим значение на любом трехэлементном подмножестве множества A, а структура двухместных функций из клона $\mathcal{F}_{R^\circ}$ по сути описана в конце доказательства теоремы 3.15). Элементы множества $\mathfrak{C}_3^K(A)$ обозначим символами $\mathfrak{c}_0$, $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}_3$. Легко убедиться, что функция w сохраняет множество $\mathfrak{C}_3^K(A)$.

Вместо непосредственной проверки можно было использовать свойства четверной группы Клейна.

q	$\mathfrak{c}_0(q)$	$\mathfrak{c}_1(q)$	$\mathfrak{c}_2(q)$
$\{a,b,c\}$	a	b	c
$\{a,b,d\}$	b	a	d
$\{a,c,d\}$	c	d	a
$\{b,c,d\}$	d	c	b

w	a	b	c	d
a	a	a	c	d
b	b	b	c	d
c	a	b	c	c
d	a	b	d	d

w	$\mathfrak{c}_0$	$\mathfrak{c}_1$	$\mathfrak{c}_2$
$\mathfrak{c}_0$	$\mathfrak{c}_0$	$\mathfrak{c}_0$	$\mathfrak{c}_2$
$\mathfrak{c}_1$	$\mathfrak{c}_1$	$\mathfrak{c}_1$	$\mathfrak{c}_2$
$\mathfrak{c}_2$	$\mathfrak{c}_0$	$\mathfrak{c}_1$	$\mathfrak{c}_2$

Теперь покажем, что каждое из множеств $\mathfrak{C}_2^0(A)$, $\mathfrak{C}_1^0(A)$, $\mathfrak{C}_2^0(A) \cup \mathfrak{C}_2^1(A)$ сохраняется любой ℓ-функцией.

Для каждого элемента $a \in A$ обозначим символом χ_a характеристическую функцию подмножества $\{a\}$ множества A:

$$\chi_a(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = a \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

Очевидно, функция $\mathfrak{c} \in \mathfrak{C}_2(A)$ принадлежит множеству $\mathfrak{C}_2^i(A)$ тогда и только тогда, когда

$$\sum_{x \in A \setminus \{a\}} \chi_a(\mathfrak{c}(\{x,a\})) = i \pmod 2$$

для всех $a \in A$.

Пусть h есть любая ℓ-функция. Обозначим символом ℓ функцию из постовского класса L_4, заданную равенством

$$\ell(x,y,z) = x + y + z \pmod 2$$

для всех $x, y, z \in 2^3$. Легко видеть, что для всех последовательностей $\mathbf{a} \in A_2^3$ и элементов $a \in \operatorname{ran} \mathbf{a}$

$$h(\mathbf{a}) = a \leftrightarrow \chi_a(h(\mathbf{a})) = 1 \leftrightarrow \ell(\chi_a \cdot \mathbf{a}) = 1.$$

Пусть даны натуральные числа $\delta_0, \delta_1, \delta_2 \in \{0,1\}$ и функции $\mathfrak{c}_0 \in \mathfrak{C}_2^{\delta_0}(A)$, $\mathfrak{c}_1 \in \mathfrak{C}_2^{\delta_1}(A)$, $\mathfrak{c}_2 \in \mathfrak{C}_2^{\delta_2}(A)$. Тогда для любого элемента $a \in A$ имеем

$$\sum_{x \in A\setminus\{a\}} \chi_a(h(\mathfrak{c}_0(\{x,a\})\mathfrak{c}_1(\{x,a\})\mathfrak{c}_2(\{x,a\}))) =$$

$$= \sum_{x \in A\setminus\{a\}} \ell(\chi_a \cdot \mathfrak{c}_0(\{x,a\})\mathfrak{c}_1(\{x,a\})\mathfrak{c}_2(\{x,a\})) =$$

$$= \sum_{x \in A\setminus\{a\}} \sum_{i<2} \chi_a(\mathfrak{c}_i(\{x,a\})) = \sum_{i<2} \sum_{x \in A\setminus\{a\}} \chi_a(\mathfrak{c}_i(\{x,a\}) = \delta_0 + \delta_1 + \delta_2 \pmod 2.$$

Обозначив правую часть последнего равенства символом δ, заключаем, что функция $h(\mathfrak{c}_0\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2)$ принадлежит множеству $\mathfrak{C}_2^{\delta}(A)$, откуда следует, что функция h сохраняет множество $\mathfrak{C}_2^0(A) \cup \mathfrak{C}_2^1(A)$. Если же все числа δ_i, $i < 2$, равны (т.е. все функции $\mathfrak{c}_i$, $i < n$, принадлежат одному и тому же множеству $\mathfrak{C}_2^{\delta_0}(A)$), то $\delta = \delta_0$. Значит, что функция h сохраняет множество $\mathfrak{C}_2^{\delta_0}(A)$. $\square$

Далее мы покажем, что других нетривиальных случаев нарушения свойства Эрроу нет. Для этого изучим некоторые свойства симметричных множеств r-функций выбора. Случай $|A| = r$ не вызывают интереса, поскольку в этом случае каждое такое множество либо пусто, либо совпадает с множеством $\mathfrak{C}_2(A)$. Поэтому нижеследующая теорема будет сформулирована для случая $r < |A|$, который в силу договоренностей начала раздела влечет условие $|A| \geq 3$.

Напомним, что мы говорим, что множество $H \subseteq {}^{Q}A$ слабо отделяет p от q в точке a, если множество H содержит такие функции h_1 и h_2, что

$$h_1(p) = h_2(p) = a \text{ и } h_1(q) \neq h_2(q).$$

Теорема 4.6. *Пусть $|A| \geq 3$ и $2 \leq r < |A|$. Пусть дано непустое симметричное множество $\mathfrak{D}$ r-функций выбора на множестве A. Тогда возможны только следующие случаи.*

1. *$|A| = 3$ и $\mathfrak{D} = \mathfrak{C}_2^1(A)$;*

2. *$|A| = 4$, $r = 3$ и $\mathfrak{D} = \mathfrak{C}_3^K(A)$;*

3. *Множество $\mathfrak{D}$ слабо отделяет каждое множество $p \in [A]^r$ от каждого другого множества $q \in [A]^r$ по крайней мере в двух различных точках.*

Доказательство. Для удобства случай $|A| = 3$ рассмотрим отдельно. Легко видеть, что в этом случае множество $\mathfrak{C}_2(A)$ содержит все два собственных непустых подмножества: $\mathfrak{C}_2^1(A)$ и множество $\mathfrak{C}_2^{\mathrm{Ord}}(A)$, состоящее из всех функций $\mathfrak{c}_\prec$, определенных условием

$$\mathfrak{c}_\prec(\{p,q\}) \leftrightarrow p \prec q$$

для всех $p, q \in A$, где $\prec$ есть произвольный линейный порядок на множестве A. Вторая возможность влечет случай 3.

Далее считаем, что $|A| \geq 4$.

Лемма 4.7. *Пусть дана r-функция выбора $\mathfrak{c}$ на множестве A. Тогда верны следующие утверждения.*

1. *Существуют такие множества $p, q \in [A]^r$, что $|p \cap q| = r-1$, $\mathfrak{c}(p) \in p \cap q$ и $\mathfrak{c}(q) \in p \cap q$.*

2. *Если существуют такие множества $p, q \in [A]^r$, что $|p \cap q| = r - 1$ и $\mathfrak{c}(p) = \mathfrak{c}(q)$, то существуют и такие множества $p', q' \in [A]^r$, что $|p' \cap q'| = r - 1$, $\mathfrak{c}(p') \in p' \cap q'$ и $\mathfrak{c}(q') \in q' \setminus p'$.*

3. *если $|A| \geq 2r - 1$, то существуют такие множества $p'', q'' \in [A]^r$, что $|p'' \cap q''| = 1$, $\mathfrak{c}(p'') \in p'' \setminus q''$ и $\mathfrak{c}(q'') \in q'' \setminus p''$.*

Доказательство. Пункт 1. Предположим, что утверждение пункта 1 ложно. Если $r \geq 3$, выберем произвольное множество $s \in [A]^{r-3}$ и такие различные элементы $a, b, c, d \in A \setminus s$, что $\mathfrak{c}(s \cup \{a, b, c\}) = a$. Ложность утверждения пункта 1 для множеств $p = s \cup \{a, b, c\}$ и $q = s \cup \{a, b, d\}$ влечет равенство $\mathfrak{c}(s \cup \{a, b, d\}) = d$. Ложность утверждения пункта 1 для множеств $p =$

$s \cup \{a, b, c\}$ и $q = s \cup \{a, c, d\}$ влечет равенство $\mathfrak{c}(s \cup \{a, c, d\}) = d$. Конъюнкция полученных равенств влечет утверждение пункта 1. Противоречие.

Если $r = 2$, выберем такие различные элементы $a, b, c, d \in A$, что $\mathfrak{c}(\{a, b\}) = a$. Тогда из предположения следуют равенства $\mathfrak{c}(\{a, c\}) = c$ и $\mathfrak{c}(\{a, d\}) = d$, и, далее, равенства $\mathfrak{c}(\{b, c\}) = \mathfrak{c}(\{b, d\}) = b$, что вновь влечет утверждение пункта 1.

Пункт 2. Пусть множества p и q удовлетворяют посылке импликации. Положим $s = (p \cup q) \setminus \{\mathfrak{c}(p)\}$. Легко проверить, что при любом значении функции $\mathfrak{c}$ на множестве s в качестве пары (p', q') подходит одна из пар (s, p), (s, q).

Пункт 3. Выберем множества $p, q \in [A]^r$, подтверждающие утверждение пункта 1. Выберем любое $(r - 2)$-элементное множество $s \subseteq A \setminus (p \cup q)$ и рассмотрим множество $s' = s \cup (p \bigtriangleup q)$. Очевидно, $|s'| = r$ и $|s \cap p| = |s \cap q| = 1$. Тогда ложность утверждения пункта 3 приводит к двум взаимоисключающим следствиям: $\mathfrak{c}(s') \in p \setminus q$ и $\mathfrak{c}(s') \in q \setminus p$. $\square$

Докажем теперь теорему. В силу симметричности множества $\mathfrak{D}$ достаточно доказать следующее утверждение.

Для каждого натурального числа k, которое удовлетворяет неравенствам $2r - |A| \leq k < r$, существуют такие множества $p, q \in [A]^r$, что $|p \cap q| = k$ и множество $\mathfrak{D}$ слабо отделяет p от q по крайней мере в двух различных точках.

Легко проверить, что в силу симметричности множества $\mathfrak{D}$ верны следующие утверждения.

Пусть даны множества $p, q \in [A]^r$ и элемент $a \in p$. Тогда

(1) существует функция $\mathfrak{c} \in \mathfrak{D}$, для которой $\mathfrak{c}(p) = a$;

(2) Если множество $\mathfrak{D}$ слабо отделяет множество p от множества q в точке a, то оно слабо отделяет множество p от множества q в любой точке, принадлежащей тому же из множеств $p \setminus q$, $p \cap q$, что и точка a.

Случай 1*: $k \geq 2$ и $r - k \geq 2$.* Выберем произвольные множества $p, q \in [A]^r$, мощность пересечения которых равна k. Используя утверждение *(1)*, выберем такую функцию $\mathfrak{c} \in \mathfrak{D}$, что $\mathfrak{c}(p) \in p \setminus q$. Положим $\mathfrak{c}(p) = a$ и $\mathfrak{c}(q) = b$. Выберем элемент $c \neq b$, который принадлежит тому же и множеств $q \setminus p$, $q \cap p$, что и элемент b. Функции $\mathfrak{c}$ и $\mathfrak{c}_{(b,c)}$ принимают различные значения на множестве q и значение a на множестве p. Таким образом, множество $\mathfrak{D}$ слабо отделяет множество p от множества q в точке a. Заключение теоремы следует из утверждения (2).

Случай 2: $k = r - k = 1$. Выберем произвольную функцию $\mathfrak{c} \in \mathfrak{D}$ и для нее такие множества p и q, как в пункте 1 леммы 4.7. Обозначим $p = \{a, b\}$ и $q = \{a, c\}$. По выбору множеств p и q верно равенство $\mathfrak{c}(p) = \mathfrak{c}(q) = a$. Тогда по пункту 2 леммы 4.7 существуют такие множества $p' = \{a', b'\}$, $q' = \{a', c'\} \in [A]^r$, что $\mathfrak{c}(p') = a'$ и $\mathfrak{c}(q') = c'$. Пусть σ есть перестановка множества A, удовлетворяющая равенствам $\sigma(a) = a'$, $\sigma(b) = b'$ и $\sigma(c) = c'$. Функции $\mathfrak{c}$ и $\mathfrak{c}_\sigma$ принимают различные значения на множестве q и значение a на множестве p. Множество $\mathfrak{D}$ слабо отделяет множество p от множества q в точке a.

Положим $\sigma' = \sigma(b, c)$ и заметим, что функция $\mathfrak{c}_{\sigma'}$ принимает на множестве p значение b, а на множестве q значение a. Далее, по утверждению 3 леммы 4.7 существуют такие множества $p'' = \{a'', b''\}$, $q'' = \{a'', c''\} \in A^{(r)}$, что $\mathfrak{c}(p'') = b''$ и $\mathfrak{c}(q'') = c''$. Пусть σ'' есть перестановка множества A, удовлетворяющая равенствам $\sigma''(a) = a''$, $\sigma''(b) = b''$ и $\sigma''(c) = c''$. Функции $\mathfrak{c}_{\sigma'}$ и $\mathfrak{c}_{\sigma''}$ принимают различные значения на множестве q и значение b на множестве p. Множество $\mathfrak{D}$ слабо отделяет множество p от множества q в точке b. Случай разобран.

Случай 3: $k = r - 1$, $r \geq 3$ *и существует такая функция* $\mathfrak{c} \in \mathfrak{D}$ *и множества* $p, q \in [A]^r$, *что* $|p \cap q| = r - 1$, $\mathfrak{c}(p) \in p \cap q$ *и* $\mathfrak{c}(q) \in q \setminus p$. Пусть функция $\mathfrak{c}$ и множества p, q удовлетворяют условиям случая. По утверждению 1 леммы 4.7 существуют еще такие множества p^*, q^*, что $\mathfrak{c}(p^*), \mathfrak{c}(q^*) \in p^* \cap q^*$. Выберем перестановку $\sigma \in S_A$, для которой верны равенства $\sigma(p) = p^*$, $\sigma(q) = q^*$, $\sigma(p \cap q) = p^* \cap q^*$ и $\sigma(\mathfrak{c}(p)) = \mathfrak{c}(p^*)$. Функции $\mathfrak{c}$ и $\mathfrak{c}_\sigma$ принимают различные значения на множестве q и совпадают на множестве p. Множество $\mathfrak{D}$ слабо отделяет множество p от множества q в некоторой точке $a \in p \cap q$. Остается заметить, что в рассматриваемом случае $|p \cap q| \geq 2$ и применить утверждение (2).

Случай 4: $k = r - 1$ *и случаи 2 и 3 не выполнены.* Выберем произвольную функцию $\mathfrak{c} \in \mathfrak{D}$ и для нее такие множества p и q, как в утверждении 2 леммы 4.7. Пусть $\mathfrak{c}(p) = a$ и $\mathfrak{c}(q) = b$. Из невыполненности случая *3* по утверждению 2 леммы 4.7 имеем неравенство $a \neq b$.

Пусть $|A| = 4$. Тогда, используя невыполненность случая 3 приходим к пункту 2 теоремы 4.6.

Пусть $|A| \geq 5$. Тогда покажем, что $r \geq 4$. Действительно, предположим обратное. Из невыполненности случая *2* следует равенство $r = 3$. Выберем произвольное множество $p = \{a, b, c\} \in [A]^3$. Выберем произвольные различные элементы $d, e \in A \setminus p$. Из невыполненности случая *3* следует, что среди элементов $\mathfrak{c}(p)$, $\mathfrak{c}(\{a, b, d\})$, $\mathfrak{c}(\{a, b, e\})$ по крайней мере два совпадают, что вступает в противоречие утверждением 2 леммы 4.7.

Выберем элемент $c \in p \cap q \setminus \{a, b\}$. Функции $\mathfrak{c}$ и $\mathfrak{c}_{(b,c)}$ принимают различные значения на множестве q и значение a на множестве p. Остается воспользоваться утверждением (2).

Пусть $|A| = 4$. Тогда, используя невыполненность случая 3

Случай 5*: случаи 1-4 не выполнены.* Выберем произвольную функцию $\mathfrak{c} \in \mathfrak{D}$ и для нее такие множества p'' и q'', как в пункте 3 леммы 4.7. Пусть $\mathfrak{c}(p) = a$ и $\mathfrak{c}(q) = b$. В рассматриваемом случае верно неравенство $|q \setminus p| \geq 2$. Выберем элемент $c \in (q \setminus p) \setminus \{b\}$. Функции $\mathfrak{c}$ и $\mathfrak{c}_{(b,c)}$ принимают различные значения на множестве q и значение a на множестве p. Остается вновь воспользоваться утверждением (2). □

Теорема 4.8 (о простом свойстве Эрроу). *Для любого конечного множества A и натурального числа r любое непустое собственное симметричное подмножество $\mathfrak{D}$ множества $\mathfrak{C}_r(A)$ не обладает простым свойством Эрроу в этих и только этих случаях:*

1. $r = 2$, $|A| = 0,\ 1 \pmod 4$ *и* $\mathfrak{D} = \mathfrak{C}^0_2(A)$, *2.* $r=2$, $|A|=0,\ 3\pmod 4)$ *и* $\mathfrak{D}=\mathfrak{C}_2^1(A)$,

3. $r=2$, $|A|=0\pmod 4)$ *и* $\mathfrak{D}=\mathfrak{C}_2^0(A)\cup\mathfrak{C}_2^1(A)$,

4. $r=3$, $|A|=4$ *и* $\mathfrak{D}=\mathfrak{C}_3^K(A)$.

Доказательство. Очевидно, можно считать, что $|A|\geq 3$ (в противном случае рассуждения тривиальны).

Далее, легко заметить, что из симметричности множества $\mathfrak{D}$ следует симметричность клона $\operatorname{pol}\mathfrak{D}$. Таким образом, для доказательства теоремы достаточно показать, что если множество $\mathfrak{D}\notin\{\emptyset,\mathfrak{C}_r(A)\}$ не имеет ни одного из перечисленных видов, то оно не принадлежит множеству $\operatorname{inv}_{[A]^r}\mathcal{F}$ ни для какого симметричного клона $\mathcal{F}\subseteq\mathcal{V}(A)$, удовлетворяющего условию

$$\mathcal{F}_{\langle r+1\rangle}\neq\mathcal{E}(A)_{\langle r+1\rangle}.$$

Пусть $\mathcal{F}$ есть произвольный такой клон, а множество $\mathfrak{D}\subseteq\mathfrak{C}_r(A)$ симметрично и принадлежит множеству $\operatorname{inv}_{[A]^r}\mathcal{F}$. Мы покажем, что если множество $\mathfrak{D}$ не имеет вида из пунктов 1 – 4 теоремы 4.8, то $\mathfrak{D}\in\{\emptyset,\mathfrak{C}_r(A)\}$. Пусть ранг клона $\mathcal{F}$ равен r_0.

Вначале рассмотрим случай $r\geq 3$. Тогда из теоремы 3.5 следует, что $r_0\leq r$. По теореме 3.15 клон $\mathcal{F}$ удовлетворяет одному из условий Δ^∂, $\Delta^e_{r_0}$, Δ^2. Отсюда по теоремам 2.2, 2.6, 2.10 имеем

$$\mathfrak{D}=\bigcap\{H\in\mathbb{H}_0\cup\mathbb{H}_1\cup\mathbb{H}_2\cup\mathbb{H}_3\cup\mathbb{H}_4(r_0)\colon \mathfrak{D}\in H\}$$

По теореме 4.6 множество $\mathfrak{D}$ не содержится ни в одном множестве $H\in\mathbb{H}_1\cup\mathbb{H}_2$. То же самое, очевидно, верно для множеств $H\in\mathbb{H}_3\cup\mathbb{H}_4(r_0)$. Следовательно,

$$\mathfrak{D}=\bigcap\{H\in\mathbb{H}_0\colon \mathfrak{D}\in H\},$$

откуда $\mathfrak{D}=\emptyset$ или $\mathfrak{D}=\mathfrak{C}_r(A)$.

Теперь случай $r=2$. Имеем $r_0\in\{2,3\}$.

Если $r_0=3$ и $\mathrm{P}_{\mathcal{F}}=\mathrm{O}_1$, то $\mathcal{F}_{\langle r+1\rangle}=\mathcal{E}(A)_{\langle r+1\rangle}$.

Если клон $\mathcal{F}$ удовлетворяет условию Δ^∂ или Δ^2, рассуждаем так же, как в случае $r \geq 3$. В случае $r = 3$ любой симметричный клон $\mathcal{F}$ не удовлетворяет условию Δ^∂ тогда и только тогда, когда $\mathrm{P}_\mathcal{F} \in \{\mathrm{O}_1, \mathrm{L}_4\}$.

Значит, по теореме 3.15 остается рассмотреть два случая

1. $|A| = 4$ и $r_0 = 2$

2. $r_0 = 3$ и $\mathrm{P}_\mathcal{F} = \mathrm{L}_4$

В первом случае, рассуждая так же, как в конце доказательства теоремы 3.15, заключаем, что клон $\mathcal{F}$ содержит функцию w, таблица которой приведена в доказательстве предложения 4.5 (если обозначить элементы множества A символами a, b, c, d).

Предположим, что множество $\mathfrak{D}$ не пусто. Выберем произвольную функцию $\mathfrak{c} \in \mathfrak{D}$ и покажем, что для любого множества $\{x, y\} \subseteq [A]^2$ существует функция $\mathfrak{c}' \in \mathfrak{D}$, которая совпадает с функцией $\mathfrak{c}$ на множестве $[A]^2 \setminus \{\{x, y\}\}$ и отличается от нее на $\{x, y\}$. В силу симметричности множества $\mathfrak{D}$ это достаточно доказать при $\{x, y\} = \{c, d\}$.

Легко убедиться, что

$$\mathfrak{c}(\{c, d\}) \neq \mathfrak{c}_{(c,d)}(\{c, d\}) \text{ и } \mathfrak{c}(\{a, b\}) = \mathfrak{c}_{(c,d)}(\{a, b\}).$$

Используя этот факт можно проверить, что функция

$$\mathfrak{c}' = w(\mathfrak{c}\mathfrak{c}_{(c,d)})$$

обладает требуемым свойством.

Теперь применив это рассуждение необходимое количество раз, можно показать, что множеству $\mathfrak{D}$ принадлежит любая функция из $\mathfrak{C}_2(A)$.

Итак, остался только один нерассмотренный случай, и чтобы завершить доказательство, достаточно доказать следующую теорему.

Теорема 4.9. *Множество* $\operatorname{inv}_{[A]^2} \mathrm{L}_4(A)$ *не содержит непустых собственных симметричных подмножеств множества* $\mathfrak{C}_2(A)$*, отличных от* $\mathfrak{C}_2^0(A)$*,* $\mathfrak{C}_2^1(A)$*,* $\mathfrak{C}_2^0(A) \cup \mathfrak{C}_2^1(A)$*.*

Доказательство. Случай $|A| = 2$ тривиален. Далее считаем, что $|A| \geq 3$. Доказывая теорему, мы будем пользоваться обозначениями предложения 4.5. На протяжении доказательства все символы арифметических операций и символ равенства будут обозначать арифметические операции и равенства в поле $\mathbb{Z}_2$. Нам понадобятся несколько вспомогательных предложений.

Лемма 4.10. *Для каждой функции* $\mathfrak{c} \in \mathfrak{C}_2(A)$ *и множества* $B \subseteq A$

1. *для любой перестановки* $\sigma \in S_A$

$$\sum_{x \in B} \chi_a(\mathfrak{c}_\sigma(\{x, a\})) = \sum_{x \in \sigma(B)} \chi_{\sigma(a)}(\mathfrak{c}(\{x, \sigma(a)\}));$$

2. *функция* $\mathfrak{c}$ *не принадлежит множеству* $\mathfrak{C}_2^0(A) \cup \mathfrak{C}_2^1(A)$ *тогда и только тогда, когда*

$$\sum_{x \in A \setminus \{a,b\}} \chi_a(\mathfrak{c}(\{x, a\})) + \sum_{x \in A \setminus \{a,b\}} \chi_b(\mathfrak{c}(\{x, b\})) = 0$$

для некоторых элементов $a, b \in A$*;*

3. *если* $|B| \geq 2$*, то для любого симметричного множества* $\mathfrak{D}$ *из* $\operatorname{inv}_{[A]^2} \mathrm{L}_4(A)$ *множество* $\mathfrak{D} \upharpoonright [B]^2$ *симметрично и принадлежит* $\operatorname{inv}_{[B]^2} \mathrm{L}_4(B)$*.*

Доказательство. Легко. □

Лемма 4.11. *Пусть дано непустое симметричное множество* $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{C}_2(A)$ *и множество* $B \subsetneq A$ *мощности не менее* 2*. Тогда ограничение* $\mathfrak{D} \upharpoonright [B]^2$ *содержит функцию* $\mathfrak{c} \notin \mathfrak{C}_2^0(B) \cup \mathfrak{C}_2^1(B)$*.*

Доказательство. Предположим обратное. Тогда по предложению 4.10, пункты 3 и 2, для любых элементов $a, b \in B$ и функции $\mathfrak{c} \in \mathfrak{D}$ выполнено равенство

$$\sum_{x \in B \setminus \{a,b\}} \chi_a(\mathfrak{c}(\{x, a\})) + \sum_{x \in B \setminus \{a,b\}} \chi_b(\mathfrak{c}(\{x, b\})) = 1.$$

Пусть $\mathfrak{c}$ – произвольная функция из множества $\mathfrak{D}$. Выберем элемент c из множества $A \setminus B$. Для каждого элемента $d \in B \setminus \{a, b\}$ множество $\sigma(B \setminus \{a, b\})$, где $\sigma = (d, c)$, есть $(B \setminus \{a, b, d\}) \cup \{c\}$. Используя предложение 4.10, пункт 1, получаем конъюнкцию равенств

$$\bigwedge_{d \in B \setminus \{a,b\}} \sum_{x \in (B \setminus \{a,b,d\}) \cup \{c\}} \chi_a(\mathfrak{c}(\{x, a\})) + \sum_{x \in (B \setminus \{a,b,d\}) \cup \{c\}} \chi_b(\mathfrak{c}(\{x, b\})) = 1.$$

Сложив эти равенства, после очевидных преобразований получим

$$(|B| - 1) \left(\sum_{x \in B \setminus \{a,b\}} \chi_a(\mathfrak{c}(\{x, a\})) + \sum_{x \in B \setminus \{a,b\}} \chi_b(\mathfrak{c}(\{x, b\})) \right) +$$
$$+ |B|(\chi_a(\mathfrak{c}(\{a, c\})) + \chi_b(\mathfrak{c}(\{b, c\}))) = |B|.$$

Если $|B| = 2 \pmod 2$, имеем противоречие. В противном случае получаем равенство $\chi_a(\mathfrak{c}(\{a, c\})) + \chi_b(\mathfrak{c}(\{b, c\})) = 1$, которое эквивалентно формуле

$$\mathfrak{c}(\{a, c\}) = a \leftrightarrow \mathfrak{c}(\{b, c\}) = c.$$

Поскольку эта формула верна для любой функции $\mathfrak{c}$ из множества $\mathfrak{D}$ и в силу симметричности последнего, заключаем, что формула

$$\mathfrak{c}(\{x, z\}) = x \leftrightarrow \mathfrak{c}(\{y, z\}) = z$$

истинна для любых различных элементов $x, y, z \in A$.

Из нечетности мощности множества $|B|$ следует неравенство $|A| \geq 4$. Выберем произвольные попарно различные элементы $a, b, c, d \in A$. Последовательно применив доказанную формулу, получим противоречивую цепочку равносильностей:

$$\mathfrak{c}(\{a, d\}) = a \leftrightarrow \mathfrak{c}(\{b, d\}) = d \leftrightarrow \mathfrak{c}(\{c, d\}) = c \leftrightarrow \mathfrak{c}(\{a, d\}) = d.$$

□

Лемма 4.12. *Пусть дано симметричное множество* $\mathfrak{D} \in \operatorname{inv}_{[A]^2} L_4(A)$, *которое содержит некоторую функцию* $\mathfrak{c} \in \mathfrak{C}_2(A)$, *которая не принадлежит множеству* $\mathfrak{C}_2^0(A) \cup \mathfrak{C}_2^1(A)$. *Тогда* $\mathfrak{D} = \mathfrak{C}_2(A)$.

Доказательство. Сначала докажем следующий факт.

Пусть даны различные элементы $a, b \in A$. Тогда существует такая функция $\mathfrak{d} \in \mathfrak{D}$, что для любого элемента $x \in A \setminus \{a, b\}$ истинны равенства $\mathfrak{d}(\{a, x\}) = a$ и $\mathfrak{d}(\{b, x\}) = b$.

Занумеруем натуральными числами множество $\mathfrak{D} = \{\mathfrak{c}_0, \mathfrak{c}_1, \dots \mathfrak{c}_n\}$ и множество $A \setminus \{a, b\} = \{a_0, a_1, \dots, a_m\}$, где $n = |\mathfrak{D}| - 1$ и $m = |A| - 3$. Покажем, что строки матрицы

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \chi_a(\mathfrak{c}_0(\{a, a_0\})) & \chi_a(\mathfrak{c}_1(\{a, a_0\})) & \dots & \chi_a(\mathfrak{c}_n(\{a, a_0\})) \\ \chi_a(\mathfrak{c}_0(\{a, a_1\})) & \chi_a(\mathfrak{c}_1(\{a, a_1\})) & \dots & \chi_a(\mathfrak{c}_n(\{a, a_1\})) \\ . & . & . & . \\ \chi_a(\mathfrak{c}_0(\{a, a_m\})) & \chi_a(\mathfrak{c}_1(\{a, a_m\})) & \dots & \chi_a(\mathfrak{c}_n(\{a, a_m\})) \\ \chi_b(\mathfrak{c}_0(\{b, a_0\})) & \chi_b(\mathfrak{c}_1(\{b, a_0\})) & \dots & \chi_b(\mathfrak{c}_n(\{b, a_0\})) \\ \chi_b(\mathfrak{c}_0(\{b, a_1\})) & \chi_b(\mathfrak{c}_1(\{b, a_1\})) & \dots & \chi_b(\mathfrak{c}_n(\{b, a_1\})) \\ . & . & . & . \\ \chi_b(\mathfrak{c}_0(\{b, a_m\})) & \chi_b(\mathfrak{c}_1(\{b, a_m\})) & \dots & \chi_b(\mathfrak{c}_n(\{b, a_m\})) \end{pmatrix}$$

линейно независимы над полем $\mathbb{Z}_2$.

Действительно, пусть, напротив, сумма некоторого подмножества W строк этой матрицы равна нулевой строке. Обозначим символом A_a множество всех элементов x множества $A \setminus \{a, b\}$, для которых строка

$$\begin{pmatrix} \chi_a(\mathfrak{c}_0(\{a, x\})) & \chi_a(\mathfrak{c}_1(\{a, x\})) & \dots & \chi_a(\mathfrak{c}_n(\{a, x\})) \end{pmatrix}$$

принадлежит множеству W, а символом A_b множество всех элементов y множества $A \setminus \{a, b\}$, для которых строка

$$\begin{pmatrix} \chi_b(\mathfrak{c}_0(\{b, y\})) & \chi_b(\mathfrak{c}_1(\{b, y\})) & \dots & \chi_b(\mathfrak{c}_n(\{b, y\})) \end{pmatrix}$$

принадлежит множеству W. Очевидно, множество $A_a \cup A_b$ непусто.

Таким образом, существует такое число $\delta \in \{0, 1\}$, что для каждой функции $\mathfrak{c} \in \mathfrak{D}$ имеет место равенство

$$\sum_{x \in A_a} \chi_a(\mathfrak{c}(\{x, a\})) + \sum_{x \in A_b} \chi_b(\mathfrak{c}(\{x, b\})) = \delta.$$

Если $A_a = A_b = A \setminus \{a, b\}$, то предложение 4.10, пункт 2, дает противоречие с условием в случае $\delta = 0$ и противоречие с соглашением $|A| \geq 3$ в случае $\delta = 1$.

Если $A_a = A_b \neq A \setminus \{a, b\}$, то предложение 4.10, пункты 2 и 3, дают противоречие с предложением 4.11 в случае $\delta = 0$ и противоречие с очевидным неравенством $|A_a \cup \{a, b\}| \geq 3$ в случае $\delta = 1$.

В оставшихся случаях, воспользовавшись симметричностью множества $\mathfrak{D}$ и предложением 4.10, пункт 1, для любой функции $\mathfrak{c} \in \mathfrak{D}$ получаем равенства

$$\sum_{x \in A_a} \chi_a(\mathfrak{c}_{(a,b)}(\{x, a\})) + \sum_{x \in A_b} \chi_b(\mathfrak{c}_{(a,b)}(\{x, b\})) =$$
$$\sum_{x \in A_a} \chi_b(\mathfrak{c}(\{x, b\})) + \sum_{x \in A_b} \chi_a(\mathfrak{c}(\{x, a\})) = \delta.$$

Сложив его с исходным, получаем равенство

$$\sum_{x \in A_a \triangle A_b} \chi_a(\mathfrak{c}(\{x, a\})) + \sum_{x \in A_a \triangle A_b} \chi_b(\mathfrak{c}(\{x, b\})) = 0$$

для любой функции $\mathfrak{c} \in \mathfrak{D}$, и вновь приходим к противоречию также, как в рассмотренных случаях.

Теперь можно выбрать вектор $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in 2^{n+1}$, для которого имеет место равенство

$$(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)\mathbf{D}^T = (1, 1, \ldots, 1)$$

и рассмотреть функцию $f = \sum\limits_{i<n+1} \alpha_i x_i$. В силу равенства $\sum\limits_{i<n+1} \alpha_i = 1$, функция f принадлежит постовскому классу L_4.

Теперь легко заметить, что функция $\mathfrak{d} = f^+(\mathfrak{c}_0 \mathfrak{c}_1 \ldots \mathfrak{c}_n)$ удовлетворяет условиям доказываемого факта (функция f^+ из определения связанной склейки).

Далее заметим, что функции $\mathfrak{d}$ и $\mathfrak{d}_{(a,b)}$ совпадают на множестве $[A]^2 \setminus \{\{a, b\}\}$ и принимают различные значения на $\{a, b\}$. Таким образом, в силу симметричности множества $\mathfrak{D}$ доказано, что для любого множества $q \in [A]^2$ существуют функции $\mathfrak{d}_q, \mathfrak{d}'_q \in \mathfrak{D}$, для которых выполнены условия

$$\mathfrak{d}_q \restriction ([A]^2 \setminus \{q\}) = \mathfrak{d}'_q \restriction ([A]^2 \setminus \{q\}) \text{ и } \mathfrak{d}_q(q) \neq \mathfrak{d}'_q(q).$$

Покажем, что это утверждение можно можно усилить до следующего. Для любого множества $q \in [A]^2$ и любой функции $\mathfrak{c} \in \mathfrak{D}$ существует функция $\mathfrak{c}' \in \mathfrak{D}$, для которой выполнены условия

$$\mathfrak{c} \restriction ([A]^2 \setminus \{q\}) = \mathfrak{c}' \restriction ([A]^2 \setminus \{q\}) \text{ и } \mathfrak{c}(q) \neq \mathfrak{c}'(q).$$

Действительно, в качестве функции $\mathfrak{c}'$ можно взять функцию $\ell^+(\mathfrak{c}\mathfrak{d}_p\mathfrak{d}'_p)$.

Наконец, применив последнее утверждение необходимое число раз, можно показать, что множеству $\mathfrak{D}$ принадлежит любая функция из $\mathfrak{C}_2(A)$. □

Пусть теперь $\mathfrak{D}$ есть непустое собственное симметричное подмножество множества $\mathfrak{C}_2(A)$ из множества $\mathrm{inv}_{[A]^2} L_4(A)$. По предложению 4.12 оно включено в множество $\mathfrak{C}_2^0(A) \cup \mathfrak{C}_2^1(A)$. Для доказательства предложения 4.9 достаточно показать, что для каждого номера $i \in \{0, 1\}$ непустое пересечение $\mathfrak{D}^i$ множества $\mathfrak{D}$ и множества $\mathfrak{C}_2^i(A)$ совпадает с множеством $\mathfrak{C}_2^i(A)$. Для этого заметим, что такое множество $\mathfrak{D}^i$ вновь есть непустое симметричное подмножество множества $\mathfrak{C}_2(A)$ из множества $\mathrm{inv}_{[A]^2} \mathrm{L}_4(A)$ (здесь надо использовать предложение 4.5). Выберем произвольное множество $B \subset A$ мощности $|A| - 1$. Тогда из предложений 4.10, пункт 3, 4.11 и 4.12 следует, что для любой функции $\mathfrak{c}^- \in \mathfrak{C}_2(B)$ множество $\mathfrak{D}^i$ содержит такую функцию $\mathfrak{c}$, что $\mathfrak{c} \restriction B^{(2)} = \mathfrak{c}^-$. Остается заметить, что каждая функция $\mathfrak{c} \in \mathfrak{C}_2^i(A)$ однозначно восстанавливается по своим значениям на множестве $[B]^2$:

$$\mathfrak{c}(\{a, b\}) = a \leftrightarrow |\{x \in B \setminus \{b\} \colon \mathfrak{c}(\{x, b\}) = b\}| = i \pmod 2$$

для любых элементов $b \in B$ и $a \in A \setminus B$.

Теорема 4.9, а с ней и теорема 4.8 полностью доказаны. □

□

Из доказательства следует следующее замечание.

Замечание 4.13. *Если* $|A| \geq 5$ *и непустое собственное симметричное подмножество множества* $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{C}_r(A)$ *не обладает свойством Эрроу, то* $r = 2$ *и* 3*-клон* $(\operatorname{pol}\mathfrak{D})_{\langle 3\rangle}$ *есть* $\mathrm{L}_4(A)$*, т.е.* 3*-клон, порожденный* ℓ*-функцией.*

Глава 5

Клоны на множествах функций и общее свойство Эрроу для симметричных множеств функций выбора

В этой главе основной результат предыдущей главы переносится на *общий случай*.

5.1. Клоны на множествах функций

На протяжении данного раздела мы будем считать фиксированными непустые конечные множества A, Q и $H \subseteq {}^{Q}A$. Мы будем изучать некоторые классы клонов на множестве H. Нашей основной целью является перенесение теоремы 4.8 на более общую ситуацию, а именно, установление, в каких случаях симметричное множество $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{C}_r(A)$ может быть одноместным предикатом из $\operatorname{inv}\mathcal{F}$, где $\mathcal{F}$ есть клон на множестве $\mathfrak{C}_r(A)$ с некоторыми дополнительными свойствами. Поэтому промежуточные определения результаты будут группироваться вокруг двух основных задач: во-первых, редукции к случаю $\mathcal{F} = \mathcal{G}^{[A]^r} \upharpoonright (\mathfrak{C}_r(A))^{<\omega}$ для некоторого клона $\mathcal{G} \in \mathcal{V}(A)$, а во-вторых, изучения некоторых ситуаций, в которых такая редукция принципиально невозможна. Мы будем формулировать и доказывать только те теоремы о каких-либо классах клонов на множестве H, которые соответствуют нашему подходу к решению этих задач.

Определение 5.1. *Для любого натурального числа n функцию $f \in \mathcal{O}(H)_{[n]}$ будем называть* локально квазитривиальной*, если*

$$f(h_0 h_1 \ldots h_{n-1})(q) \in \{h_0(q), h_1(q), \ldots, h_{n-1}(q)\}$$

для всех $h_0, h_1, \ldots, h_{n-1} \in H$ и $q \in Q$.

Легко проверить, что множество всех локально квазитривиальных функций $f \in \mathcal{O}(H)$ одержит все проекции и замкнуто относительно композиции, т.е. есть клон. Этот клон мы будем обозначать символом $\mathcal{LV}(H)$. Каждый клон, состоящий из локально квазитривиальных функций, мы будем называть *локально-квазитривиальным.*

Определение 5.2. *Для любого натурального числа* n *и множества* $E \subseteq A^{<\omega}$ *функцию* $f \in \mathcal{O}(H)_{[n]}$ *будем называть* простой относительно множества E, *если*

$$h_0(p)h_1(p)\dots h_{n-1}(p) = h_0(q)h_1(q)\dots h_{n-1}(q) \in E \to$$
$$\to f(h_0h_1\dots h_{n-1})(p) = f(h_0h_1\dots h_{n-1})(q)$$

для всех $h_0, h_1, \dots, h_{n-1} \in H$ *и* $p, q \in Q$.

Простую относительно множества $A^{<\omega}$ *функцию* $f \in \mathcal{O}(H)_{[n]}$ *будем называть* простой. *Для каждого натурального числа* s *простую относительно множества* $A^{<\omega}_{<s}$ *функцию* $f \in \mathcal{O}(H)_{[n]}$ *будем называть* s-простой.

Легко проверить, что множество всех простых функций $f \in \mathcal{O}(H)$ есть клон. Этот клон мы будем обозначать символом $\mathcal{S}(H)$. Любой подклон клона $\mathcal{S}(H)$ будем называть *простым.*

Кроме того, легко проверить, что для любого натурального числа s множество всех s-простых функций $f \in \mathcal{LV}(H)$ есть клон. Этот клон мы будем обозначать символом $\mathcal{LVS}_s(H)$. Любой подклон клона $\mathcal{LVS}_s(H)$ будем называть *s-простым* клоном.

Предложение 5.3. *Если* $|Q| = 1$, *то любой клон* $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}(H)$ *простой.*

Любой локально квазитривиальный клон является 2*-простым, а если для всех* $p, q \in Q$ *выполнены условия*

$$H(p) = H(q) \to p = q \text{ и } |H(p)| \le 2,$$

то и простым.

Доказательство. Очевидно. $\square$

Определение 5.4. *Для любого натурального числа n функцию $f \in \mathcal{O}(H)_{[n]}$ будем называть* вполне локальной, *если*

$$h_0(q)h_1(q)\dots h_{n-1}(q) = h'_0(q)h'_1(q)\dots h'_{n-1}(q) \to$$
$$\to f(h_0h_1\dots h_{n-1})(q) = f(h'_0h'_1\dots h'_{n-1})(q)$$

для всех $h_0, h_1, \dots, h_{n-1}, h'_0, h'_1, \dots, h'_{n-1} \in H$ и $q \in Q$.

Легко проверить, что множество всех вполне локальных функций $f \in \mathcal{O}(H)_{[n]}$ есть клон. Мы будем обозначать его символом $\mathcal{LW}(H)$ и каждый его подклон называть *вполне локальным* клоном. Очевидно, что для каждой вполне локальной функции $f \in \mathcal{O}(H)_{[n]}$ и каждого элемента $q \in Q$ существует единственная функция $f_q\colon (H(q))^n \to H(q)$, для которой

$$f(h_0h_1\cdots h_{n-1})(q) = f_q(h_0(q)h_1(q)\cdots h_{n-1}(q))$$

для всех $h_0, h_1, \cdots, h_{n-1} \in H$ и $q \in Q$.

При этом множество функций $\{f_q\colon f \in \mathcal{F}\}$ есть клон на множестве $H(q)$. Этот клон мы будем обозначать символом $\mathcal{F}_{(q)}$.

Вполне локальный клон $\mathcal{F}$ является локально квазитривиальным тогда и только тогда, когда каждый из клонов $\mathcal{F}_q$ квазитривиальный. Вполне локальный клон является простым (s-простым) тогда и только тогда, когда

$$f_p(\mathbf{a}) = f_q(\mathbf{a})$$

для всех натуральных чисел n, функций $f \in \mathcal{F}_{[n]}$, элементов $p, q \in Q$ и последовательностей $\mathbf{a} \in (H(p) \cap H(q))^n$ (соответственно, последовательностей $\mathbf{a} \in (H(p) \cap H(q))^n_{<s}$).

Для каждого клона $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}(A)$ клон $\mathcal{F}^Q$ (см. определение из раздела 1) есть простой вполне локальный клон на множестве ${}^QA$; если при этом клон $\mathcal{F}$ квазитривиальный, то клон $\mathcal{F}^Q$ локально квазитривиальный. Наоборот, любой простой вполне локальный клон $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}(H)$ можно по существу свести к некоторому клону $\mathcal{F}_A \subseteq \mathcal{O}(A)$.

Для каждого вполне локального клона $\mathcal{F}$ на множестве H положим

$$\mathcal{F}_A \rightleftharpoons \bigcup_{f\in\mathcal{F}} \{g \in \mathcal{O}(A) \colon (\forall q \in Q)\, g \restriction (H(q))^{<\omega} = f_q\}.$$

Легко проверить, что множество $\mathcal{F}_A$ есть клон, причем, если клон $\mathcal{F}$ простой, то

$$\mathcal{F}_A^Q \restriction H^{<\omega} = \mathcal{F}.$$

В частности, это влечет следующее предложение.

Предложение 5.5. *Для любого простого вполне локального клона $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}(H)$ и множества $H' \subseteq H$ выполнено*

$$H' \in \operatorname{inv} \mathcal{F} \leftrightarrow H' \in \operatorname{inv}_Q \mathcal{F}_A.$$

Если клон $\mathcal{F}$ локально квазитривиальный, то то же самое верно, если вместо $\mathcal{F}_A$ взять клон $\mathcal{F}_A \cap \mathcal{V}(A)$.

Нам потребуется еще одно обобщение. Пусть n, s есть любые натуральные числа и $\mathcal{F}$ есть клон на множестве H. Положим

$$H^n_{\langle <s\rangle} \rightleftharpoons \{h_0 h_1 \dots h_{n-1} \in H^n \colon (\forall q \in Q) |\{h_0(q), h_1(q), \dots, h_{n-1}(q)\}| < s\};$$
$$H^{<\omega}_{\langle <s\rangle} \rightleftharpoons \bigcup_{n<\omega} H^n_{\langle\langle s\rangle\rangle}$$
$$\mathcal{F}_{\langle\langle s\rangle\rangle} \rightleftharpoons \mathcal{F} \restriction H^{<\omega}_{\langle <s\rangle}.$$

Если клон $\mathcal{F}$ локально квазитривиальный, то множество $\mathcal{F}_{\langle\langle s\rangle\rangle}$ в естественном смысле замкнуто относительно композиции.

Для каждого натурального числа s и вполне локального локально квазитривиального клона $\mathcal{F}$ на множестве H положим

$$\mathcal{F}_{\langle A,s\rangle} \rightleftharpoons \bigcup_{f\in\mathcal{F}} \{g \in \mathcal{V}(A)_{\langle s\rangle} \colon (\forall q \in Q)\, g \restriction (H(q))^{<\omega}_{<s} = f_q \restriction H(q)^{<\omega}_{<s}\}.$$

Легко проверить, что множество $\mathcal{F}_{\langle A,s\rangle}$ есть s-клон, причем, если клон $\mathcal{F}$ s-простой, то

$$(\mathcal{F}^{\uparrow}_{\langle A,s\rangle})^{Q} \upharpoonright H^{<\omega}_{\langle\langle s\rangle\rangle} = \mathcal{F}_{\langle\langle s\rangle\rangle}.$$

Многие результаты предыдущих разделов переносятся на вполне локальные клоны.

Определение 5.6. *Пусть даны натуральные числа $r, s \geq 2$ и локальный r-клон $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}(H)$. Будем говорить, что клон $\mathcal{F}$*

1. удовлетворяет условию $\mathrm{L}\Delta^{\partial}$, *если для любого элемента $q \in Q$, любой последовательности $\mathbf{a} \in H(q)^3_3$ и элемента $a \in \operatorname{ran}\mathbf{a}$ существует такая функция $w \in \mathcal{F}_{[3]}$, что*

   $$w_q(\mathbf{a}) = a \text{ и } w_p(xxy) = w_p(xyx) = w_p(yxx) = x \text{ для всех } p \in Q \text{ и } x, y \in H(p)$$

2. удовлетворяет условию $\mathrm{L}\Delta^{\ell}$, *если для любого элемента $q \in Q$, любой последовательности $\mathbf{a} \in H(q)^3_3$ и элемента $a \in \operatorname{ran}\mathbf{a}$ существует такая функция $w \in \mathcal{F}_{[3]}$, что*

   $$w_q(\mathbf{a}) = a \text{ и } w_p(xxy) = w_p(xyx) = w_p(yxx) = y \text{ для всех } p \in Q \text{ и } x, y \in H(p)$$

3. удовлетворяет условию $\mathrm{L}\Delta^{e}_{s}$, *если для любого элемента $q \in Q$, любой последовательности $\mathbf{a} \in H(q)^s_s$ и элемента $a \in \operatorname{ran}\mathbf{a}$ существует такая функция $w \in \mathcal{F}_{[s]}$, что*

   $$w_q(\mathbf{a}) = a \text{ и } w_p(\mathbf{x}) = x_i \text{ для всех } p \in Q \text{ и } \mathbf{x} = x_0x_1\dots x_{s-1} \in H(p)^s_{<s};$$

Вместо условия, аналогичного условию Δ^2, нам будет удобнее использовать определенное ниже условие $\mathrm{L}\Delta^2_{\text{+++}}$.

Не опасаясь разночтений, каждую функцию $w \in \mathcal{LW}(H)$, которая удовлетворяет условию

$$w_p(xxy) = w_p(xyx) = w_p(yxx) = x \text{ для всех } p \in Q \text{ и } x, y \in H(p),$$

мы будем называть ∂-функцией, а каждую функцию $w \in \mathcal{LW}(H)$, которая удовлетворяет условию

$$w_p(xxy) = w_p(xyx) = w_p(yxx) = y \text{ для всех } p \in Q \text{ и } x, y \in H(p),$$

мы будем называть ℓ-функцией.

Теорема 5.7. *Пусть дан вполне локальный клон $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}(H)$ и одноместный предикат $H' \in \operatorname{inv} \mathcal{F}$. Тогда*

1. *если клон $\mathcal{F}$ удовлетворяет условию $\mathrm{L}\Delta^{\partial}$ или клон $\mathcal{F}$ содержит хотя бы одну ∂-функцию и $(\forall q \in Q)|H(q)| \leq 2$, то существует такое множество $\mathbb{H} \subseteq \mathbb{H}_0 \cup \mathbb{H}_1 \cup \mathbb{H}_2$, что $H = \bigcap \mathbb{H}$;*

2. *если клон $\mathcal{F}$ удовлетворяет условию $\mathrm{L}\Delta^{\ell}$, то он удовлетворяет условию $\mathrm{L}\Delta^{e}_{3}$;*

3. *если если для некоторого натурального числа $s \geq 3$ клон $\mathcal{F}$ удовлетворяет условию Δ^{e}_{s}, то существует такое множество $\mathbb{H} \subseteq \mathbb{H}_0 \cup \mathbb{H}_1 \cup \mathbb{H}_4(s)$, что $H = \bigcap \mathbb{H}$.*

Доказательство. Доказательство отличается от доказательства теоремы 2.2, предложения 2.5 и теоремы 2.6, только незначительными деталями. □

Сформулируем условия $\mathrm{L}\Delta^2_{\#}$ и $\mathrm{L}\Delta^2_{\#\!\#}$, в некотором смысле двойственное условию $\mathrm{L}\Delta^2$. При этом сразу определим некоторые технические понятия, используемые в дальнейших доказательствах.

Дизъюнктным объединением (или *суммой*) произвольного семейства множеств $\{\Psi_q\}_{q \in Q}$ называется множество $\bigcup\limits_{q \in Q} (\{q\} \times \Psi_q)$. Для обозначения суммы семейства $\{\Psi_q\}_{q \in Q}$ мы будем использовать распространенное обозначение $\sum\limits_{q \in Q} \Psi_q$. При обозначении элементов (q, x) множества $\sum\limits_{q \in Q} \Psi_q$ будем опускать служебные символы, т.е. вместо (q, x) записывать просто qx.

Определение 5.8. *Пусть дан вполне локальный клон $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}(H)$, натуральное число n и последовательности $p\mathbf{a}, q\mathbf{b} \in \sum\limits_{q \in Q} (H(q))^n$. Будем говорить, что*

1. *клон $\mathcal{F}$* хорошо отделяет $p\mathbf{a}$ и $q\mathbf{b}$ *(и записывать это высказывание посредством знакосочетания $p\mathbf{a} \mathbin{+\!\!\!+}_{\mathcal{F}} q\mathbf{b}$), если для любых элементов $a \in \operatorname{ran} \mathbf{a}$ и $b \in \operatorname{ran} \mathbf{b}$ существует такая функция $w \in \mathcal{F}_{[n]}$, что $w_p(\mathbf{a}) = a$, $w_q(\mathbf{b}) = b$ и $w_t(xx \dots x) = x$ для любых элементов $t \in Q$ и $x \in H(t)$;*

2. косвенно отделяет $p\mathbf{a}$ от $q\mathbf{b}$, *если существуют такое натуральное число k и такая последовательность $\mathbf{c} \in (H(p))^k$, что для любой последовательности $\mathbf{d} \in (H(q))^k$ и элементов $a \in \operatorname{ran} \mathbf{a}$ и $b \in \operatorname{ran} \mathbf{b}$ существует такая функция $w \in \mathcal{F}_{[n+k]}$, что $w_p(\mathbf{ac}) = a$, $w_q(\mathbf{bd}) = b$ и $w_t(xx \dots x) = x$ для любых элементов $t \in Q$ и $x \in H(t)$;*

3. косвенно отделяет $p\mathbf{a}$ и $q\mathbf{b}$ *(и записывать это высказывание посредством знакосочетания $p\mathbf{a} \mathbin{+\!\!\!+\!\!\!+}_{\mathcal{F}} q\mathbf{b}$), если клон $\mathcal{F}$* косвенно отделяет $p\mathbf{a}$ от $q\mathbf{b}$ *или клон $\mathcal{F}$* косвенно отделяет $q\mathbf{b}$ от $p\mathbf{a}$.

Очевидно, если клон $\mathcal{F}$ хорошо, то он и косвенно отделяет $p\mathbf{a}$ и $q\mathbf{b}$.

Множество $\Lambda \subseteq Q^2$ будем называть *разделительным*, если для каждого непустого множества $P \subsetneq Q$ существуют пара $(p, q) \in \Lambda$, для которой $p \in P \wedge q \notin P$. Примером разделительного множества может служить отношение неравенства, а также любая циклическая перестановка множества Q.

Определение 5.9. *Будем говорить, что клон $\mathcal{F}$* удовлетворяет условию $\mathrm{L}\Delta^2_{\mathbin{+\!\!\!+}}$ (условию $\mathrm{L}\Delta^2_{\mathbin{+\!\!\!+\!\!\!+}}$)*, если существует такое множество $\Lambda \subseteq Q^2$, для которого*

$$p\mathbf{a} \mathbin{+\!\!\!+}_{\mathcal{F}} q\mathbf{b} \ \textit{(соответственно, } p\mathbf{a} \mathbin{+\!\!\!+\!\!\!+}_{\mathcal{F}} q\mathbf{b}\textit{)}$$

для любой пары $(p, q) \in \Lambda$ и последовательностей $\mathbf{a} \in (H(p))^2_2$, $\mathbf{b} \in (H(q))^2_2$.

Теорема 5.10. *Пусть дан вполне локальный клон $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}(H)$ и одноместный предикат $H' \in \operatorname{inv} \mathcal{F}$, причем выполнено одно из следующих условий.*

1. *Клон $\mathcal{F}$ удовлетворяет условию* $\mathrm{L}\Delta^2_{\mathbin{+\!\!+}}$.

2. *Клон $\mathcal{F}$ удовлетворяет условию* $\mathrm{L}\Delta^2_{\mathbin{+\!\!+\!\!+}}$ *и* $H'(q) = H(q)$ *для любого* $q \in Q$.

Тогда существует такое множество $\mathbb{H} \subseteq \mathbb{H}_0$, *что* $H' = \bigcap \mathbb{H}$.

Доказательство. Случай $H' = \emptyset$ тривиален. Будем далее считать, что множество H' не пусто. Положим

$$\mathbb{H} = \{H'' \in \mathbb{H}_0 \colon H' \subseteq H''\}$$

Пусть r есть максимальное натуральное число, удовлетворяющее следующему условию: для каждого множества $Q' \in [Q]^r$ и каждой функции $f \in \bigcap \mathbb{H}$ существует функция $h \in H'$, которая совпадает с функцией f на множестве Q'. Очевидно, $r \geq 1$. Предположим, что $r < |Q|$, и придем к противоречию.

Пусть f есть произвольная функция из множества $\bigcap \mathbb{H}$ и Q' есть произвольное множество из $[Q]^r$. Выберем такую пару $(p, q) \in \Lambda$, что $p \in Q'$ и $q \notin Q'$. В силу выбора натурального числа r множество H содержит функции $f_{(p)}$ и $f_{(q)}$, которые совпадают с функцией f на множествах $Q' \setminus \{p\}$ и $Q' \setminus \{q\}$ соответственно.

Следующим образом определим функцию $h \in H$.

Пусть выполнено условие 1. Выберем такую функцию $w \in \mathcal{F}$, что

$$\begin{aligned}
&w_p(f_{(q)}(p) f_{(p)}(p)) = f_{(q)}(p) = f(p),\\
&w_q(f_{(q)}(q) f_{(p)}(q)) = f_{(p)}(q) = f(q),\\
&w_t(xx) = x
\end{aligned}$$

для любых элементов $t \in Q$ и $x \in H(t)$. Положим

$$h = w(f_{(q)} f_{(p)}).$$

Пусть выполнено условие 2. Без ограничения общности будем считать, что клон $\mathcal{F}$ косвенно отделяет последовательность $p f_{(q)}(p) f_{(p)}(p)$ от последовательности $q f_{(q)}(q) f_{(p)}(q)$. Выберем натуральное число k и последовательность

$\mathbf{c} \in (H(p))^k$ как в определении 5.8, пункт 1 (при $\mathbf{a} = f_{(q)}(p)f_{(p)}(p)$ и $\mathbf{b} = f_{(q)}(q)f_{(p)}(q)$).

Множество $\bigcap \mathbb{H}$ содержит функции $f_0, f_1, \ldots, f_{k-1}$, которые совпадают с функцией f на множестве $Q' \setminus \{p\}$ и принимают на элементе p значения c_0, c_1, …, c_{k-1} соответственно. В силу выбора натурального числа r множество H' содержит функции $h_0, h_1, \ldots, h_{k-1}$ с тем же свойством. Выберем такую функцию $w \in \mathcal{F}_{[2+k]}$, что

$$w_p(f_{(q)}(p)f_{(p)}(p)c_0c_1\ldots c_{k-1}) = f_{(q)}(p) = f(p),$$
$$w_q(f_{(q)}(q)f_{(p)}(q)f_0(q)f_1(q)\ldots f_{k-1}(q)) = f_{(p)}(q) = f(q),$$
$$w_t(xx\ldots x) = x$$

для любых элементов $s \in Q$ и $x \in H(t)$. Положим

$$h = w(f_qf_ph_0h_1\ldots h_{k-1}).$$

В обоих случаях функция h совпадает с функцией f на множестве $Q' \cup \{q\}$. В силу произвольности множества Q' и функции f получаем противоречие с выбором числа r. □

5.2. Клоны Шелаха и общее свойство Эрроу

На протяжении данного раздела мы считаем фиксированными конечное непустое множество A и натуральное число $r \geq 1$.

Определение 5.11. *Множество* $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{C}_r(A)$ обладает общим свойством Эрроу*, если каждая вполне локальная и локально квазитривиальная функция* $f \in \mathcal{O}(\mathfrak{C}_r(A))$*, сохраняющая множество* $\mathfrak{D}$*, является проекцией, т.е.*

$$\operatorname{pol}\mathfrak{D} \cap \mathcal{LV}(\mathfrak{C}_r(A)) \cap \mathcal{LW}(\mathfrak{C}_r(A)) = \mathcal{E}(\mathfrak{C}_r(A))$$

(Здесь множество $\mathfrak{D}$ рассматривается как унарный предикат на множестве $\mathfrak{C}_r(A)$).

Нас вновь будут интересовать симметричные множества $\mathfrak{D}$. Для симметричных множеств $\mathfrak{D}$ клоны $\operatorname{pol}\mathfrak{D}$ также замкнуты относительно некоторых симметрий.

Определение 5.12. *Клон $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}(H)$ будем называть* локально симметричным, *если он вполне локальный и*

1. *для каждой перестановки $\sigma \in S_A$ и элемента $q \in Q$ существует единственный элемент q_σ, для которого*

$$H(q_\sigma) = \sigma(H(q))$$

2. *для каждого натурального числа n и каждой функции $f \in \mathcal{F}_{[n]}$ функция f^σ, удовлетворяющая условию*

$$f^\sigma_p(\mathbf{a}) = \sigma^{-1}(f_{p_\sigma}(\sigma \cdot \mathbf{a})) \text{ для всех } \mathbf{a} \in (H(p))^n,$$

принадлежит клону $\mathcal{F}$.

Легко заметить, что если клон $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}(H)$ локально симметричный, то отображение, ставящее в соответствие каждому элементу $q \in Q$ элемент q_σ есть перестановка множества Q. Не опасаясь разночтений, мы будем обозначать ее тем же символом σ, т.е. записывать $\sigma(q)$ вместо q_σ. Кроме того, если клон $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}(H)$ локально симметричный, то каждый элемент $q \in Q$ однозначно определяется множеством $H(q)$, а множество $\{H(q) \colon q \in Q\}$ есть объединение некоторого семейства $\{[A]^i\}_{i \in I}$, где I есть некоторое конечное подмножество множества ω. Поэтому множество H может быть отождествлено с множеством ограничений множества $\mathfrak{C}(A)$ на множество $\bigcup\limits_{i \in I}[A]^i$.

Определение 5.13. *Мы будем называть любой локально квазитривиальный и локально симметричный клон на множестве $\mathfrak{C}_r(A)$* клоном Шелаха.

Предложение 5.14. *Если множество $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{C}_r(A)$ симметричное, то клон $\operatorname{pol}\mathfrak{D} \cap \mathcal{LV}(\mathfrak{C}_r(A)) \cap \mathcal{LW}(\mathfrak{C}_r(A))$ есть клон Шелаха.*

Доказательство. Несложной проверкой. □

Для обобщения теоремы 4.8 докажем аналог теоремы 3.15. В виду предложения 5.5 для наших целей достаточно рассмотреть случай непростого клона $\mathcal{F}$. Значит, согласно предложению 5.3, можно исключить случаи $r \leq 2$ и $r = |A|$. В частности, можно считать, что $|A| \geq 4$.

Теорема 5.15. *Пусть $|A| \geq 4$ и $r \geq 3$. Пусть дан непростой клон Шелаха $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}(\mathfrak{C}_r(A))$ и натуральное число $t = \mathrm{r}(\mathcal{F})$. Тогда*

1. *если $t \geq 4$, то $\mathcal{F}$ удовлетворяет условию $\mathrm{L}\Delta^e_t$;*
2. *если $t = 3$, то $\mathcal{F}$ удовлетворяет одному из условий $\mathrm{L}\Delta^e_3$, $\mathrm{L}\Delta^\partial$;*
3. *если $t = 2$, то либо $\mathcal{F}$ удовлетворяет условию $\mathrm{L}\Delta^2_{\#}$, либо $|A| = 4$ и $\mathcal{F}$ удовлетворяет одному из условий $\mathrm{L}\Delta^e_3$, $\mathrm{L}\Delta^\partial$.*

Доказательство. Заметим, что $t \geq 2$ в силу локальной квазитривиальности клона $\mathcal{F}$. Вначале покажем, что клон $\mathcal{F}$ t-простой. Предположим обратное. Тогда существует натуральное число n, элементы $p, q \in Q$ и последовательность $\mathbf{a} \in H(p)^n_{<t} \cap H(q)^n_{<t}$ и функция $f \in \mathcal{F}_{[n]}$, для которых

$$f_p(\mathbf{a}) \neq f_q(\mathbf{a}).$$

Пусть $\mathbf{b} = (b_0, b_1, \ldots, b_{m-1})$ есть некоторая инъективная последовательность всех различных элементов из $\operatorname{ran} \mathbf{a}$. Очевидно, существуют функции

$$\mathfrak{c}_0, \mathfrak{c}_1, \ldots, \mathfrak{c}_{m-1} \in \mathfrak{C}_r(A),$$

для которых

$$\mathfrak{c}_i(p) = \mathfrak{c}_i(q) = b_i$$

для всех $i < m$. Положим $\tau = \mathbf{b}^{-1}\mathbf{a}$ и рассмотрим функцию

$$f' = f\left(e^m_{\tau(0)}, e^m_{\tau(1)}, \ldots, e^m_{\tau(n-1)}\right) \in \mathcal{F}_{[t]}.$$

Имеем

$$f'(\mathfrak{c}_0\mathfrak{c}_1\ldots\mathfrak{c}_{m-1})(p) = f(\mathfrak{c}_0\mathfrak{c}_1\ldots\mathfrak{c}_{m-1}\cdot\tau)(p) = f_p(\mathbf{a}) \neq$$
$$\neq f_q(\mathbf{a}) = f(\mathfrak{c}_0\mathfrak{c}_1\ldots\mathfrak{c}_{m-1}\cdot\tau)(q) = f'(\mathfrak{c}_0\mathfrak{c}_1\ldots\mathfrak{c}_{m-1})(q)$$

Значит, $f'(\mathfrak{c}_0\mathfrak{c}_1\ldots\mathfrak{c}_{m-1}) \notin \{\mathfrak{c}_0, \mathfrak{c}_1, \ldots, \mathfrak{c}_{m-1}\}$. Поскольку $m < t$, имеем противоречие с условием $\mathbf{r}(\mathcal{F}) = t$.

Пусть вначале $t \geq 3$. Тогда рассмотрим клон $\mathcal{F}^{\uparrow}_{\langle A,s\rangle} \subseteq \mathcal{O}(A)$. Очевидно, $\mathbf{r}\left(\mathcal{F}^{\uparrow}_{\langle A,s\rangle}\right) = t$. Значит, по теореме 3.5 клон $\mathcal{F}^{\uparrow}_{\langle A,s\rangle} \subseteq \mathcal{O}(A)$ содержит либо ∂-функцию, либо такую неселекторную функцию w, что $w \restriction A^t_{<t} \in \mathcal{E}(A) \restriction A^t_{<t}$. Переходя к клону $\mathcal{F}$ и рассуждая также как в лемме 3.16, приходим для клона $\mathcal{F}$ к одному из условий $\mathrm{L}\Delta^{\partial}$, $\mathrm{L}\Delta^{\ell}$, $\mathrm{L}\Delta^{e}_{t}$. Остается воспользоваться теоремой 5.7, пункт 2.

Пусть теперь $t = 2$.

Для дальнейших рассуждений нам потребуются новые определения и обозначения. Для каждого номера $i \in \{0, 1\}$ обозначим символом $\rhd_i$ бинарное отношение на множестве $\sum\limits_{q\in[A]^r} q^2_2$, которое определяется формулой

$$p\mathbf{a} \rhd_i q\mathbf{b} \leftrightarrow ((\forall f \in \mathcal{F}_{[2]}) f_p(\mathbf{a}) = a_i \to f_q(\mathbf{b}) = b_i)$$

для всех $p\mathbf{a} = pa_0a_1$, $q\mathbf{b} = qb_0b_1$ из множества $\sum\limits_{q\in[A]^r} q^2_2$.

Предположение $t = 2$, очевидно, влечет следующее утверждение.

Для некоторых множеств $p, q \in [A]^r$, номера $i < 2$ и последовательностей $\mathbf{a} \in p^2_2$ и $\mathbf{b} \in p^2_2$ выполнено

$$\neg p\mathbf{a} \rhd_i q\mathbf{b}. \qquad (*)$$

Мы покажем, что это утверждение влечет условие $\mathrm{L}\Delta^2_{\#}$ для клона $\mathcal{F}$, если $|A| \geq 5$ и одно из условий $\mathrm{L}\Delta^2_{\#}$, $\mathrm{L}\Delta^e_3$, $\mathrm{L}\Delta^{\partial}$ для случая $|A| = 4$.

Пусть даны множества $p, q, p', q' \in [A]^r$ и последовательности $\mathbf{a} = (a_0, a_1) \in p^2_2$, $\mathbf{b} = (a_2, a_3) \in q^2_2$, $\mathbf{a}' = (a'_0, a'_1) \in (p')^2_2$ и $\mathbf{b}' = (a'_2, a'_3) \in (q')^2_2$. Будем говорить, что пары $(p\mathbf{a}, q\mathbf{b})$ и $(p'\mathbf{a}', q'\mathbf{b}')$ *подобны* и обозначать это посредством знакосочетания $(p\mathbf{a}, q\mathbf{b}) \sim (p'\mathbf{a}', q'\mathbf{b}')$, если выполнено условие

$$\mathrm{t}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathrm{t}(\mathbf{a}', \mathbf{b}') \wedge |p \cap q| = |p' \cap q'| \wedge \bigwedge_{i<4} (a_i \in p \cap q \leftrightarrow a'_i \in p \cap q)$$

(Здесь $\mathrm{t}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ обозначает тип пары $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, см. определение в доказательстве теоремы 3.15).

Для каждой последовательности $\mathbf{a} = a_0 a_1 \in A^2$ символом $\bar{\mathbf{a}}$ обозначим последовательность $a_1 a_0$. Некоторые свойства введенных отношений описывает следующая

Лемма 5.16. *Для каждого номера $i \in \{0, 1\}$, элементов $p\mathbf{a}, q\mathbf{b} \in \sum\limits_{q \in [A]^r} q_2^2$ и перестановки $\sigma \in S_A$ верны следующие утверждения.*

1. *Отношение $\rhd_i$ рефлексивно и транзитивно.*

2. $p\mathbf{a} \rhd_i q\mathbf{b} \to \sigma \cdot p\mathbf{a} \rhd_i \sigma \cdot q\mathbf{b}$.

3. $p\mathbf{a} \rhd_i q\mathbf{b} \to p\bar{\mathbf{a}} \rhd_{1-i} q\bar{\mathbf{b}}$.

4. $p\mathbf{a} \rhd_i q\mathbf{b} \to q\mathbf{b} \rhd_{1-i} p\mathbf{a}$.

5. $(p\mathbf{a}, q\mathbf{b}) \sim (p'\mathbf{a}', q'\mathbf{b}') \to (p\mathbf{a} \rhd_i q\mathbf{b} \to p'\mathbf{a}' \rhd_i q'\mathbf{b}')$.

Доказательство. Доказательство пунктов 1 – 4 сводится к формальной проверке (используется, что вместе с каждой функцией f клон $\mathcal{F}$ содержит функцию f_σ и $f(e_1^2 e_0^2)$). Пункт 5 немедленно следует из пункта 2, если заметить, что для любых подобных пар $(p\mathbf{a}, q\mathbf{b})$ и $(p'\mathbf{a}', q'\mathbf{b}')$ существует перестановка $\sigma \in S_A$, для которой выполнены равенства $\sigma \cdot p\mathbf{a} = \sigma \cdot p'\mathbf{a}'$ и $\sigma \cdot q\mathbf{b} = \sigma \cdot q'\mathbf{b}'$. □

Поскольку клон $\mathcal{F}$ симметричный, все клоны $\mathcal{F}_q$, $q \in [A]^r$, попарно эквивалентны. Положим $\mathbf{r}^+(\mathcal{F}) = \mathbf{r}(\mathcal{F}_q)$, где q — произвольное множество из $[A]^r$. Очевидно, $\mathbf{r}^+(\mathcal{F}) \geq t$.

Лемма 5.17. *Пусть $\mathbf{r}^+(\mathcal{F}) > t = 2$. Тогда клон $\mathcal{F}$ удовлетворяет условию $L\Delta^2_{\#}$.*

Доказательство. Для каждого номера $i < 2$ на множестве $[A]^r$ рассмотрим бинарное отношение

$$\mathcal{R}_i = \{(p, q) \colon (\forall \mathbf{x} \in p_2^2)(\forall \mathbf{y} \in q_2^2)\, p\mathbf{x} \rhd_i q\mathbf{y}\}.$$

Из пункта 1 леммы 5.16 следует, что отношение $\mathcal{R}_i$ транзитивно. Из пункта 5 леммы 5.16 следует, что отношение $\mathcal{R}_i$ расширяет каждое отношение $W(A, r, k)$, где $k = |p \cap q|$ и (p, q) – любая пара из $\mathcal{R}_i$. Наконец, из условия следует, что отношение $\mathcal{R}_i$ рефлексивно. Тогда, используя лемму 3.26, легко заключить, что имеет место один из следующих случаев:

1. $\mathcal{R}_i = \mathrm{Tot}^*(A, r)$;

2. $\mathcal{R}_i = \mathrm{Id}^*(A, r)$;

3. $|A| = 2r$ и $\mathcal{R}_i = \mathrm{Pm}^*(A)$

(если $\mathcal{R}_i \notin \{\mathrm{Id}^*(A, r), \mathrm{Tot}^*(A, r)\}$ лемма 3.26 дает включение $\mathrm{Pm}^*(A) \subseteq \mathcal{R}$; если включение собственное, применяем лемму еще раз).

Если $\mathcal{R}_i = \mathrm{Tot}^*(A, r)$ для некоторого $i < 2$, то для всех множеств $p, q \in [A]^r$ и последовательностей $\mathbf{a} \in p_2^2$ и $\mathbf{b} \in q_2^2$ имеем

$$p\mathbf{a} \rhd_i q\mathbf{b}.$$

Тогда по лемме 5.16, пункт 3, имеем и

$$p\mathbf{a} \rhd_{1-i} q\mathbf{b}$$

для всех множеств $p, q \in [A]^r$ и последовательностей $\mathbf{a} \in p_2^2$ и $\mathbf{b} \in q_2^2$. Это дает противоречие с утверждением $(*)$.

Непротиворечивые случаи, очевидно, приводят к условию

$$p\mathbf{a} \mathbin{+\!\!\!+}_{\mathcal{F}} q\mathbf{b}$$

для всех последовательностей $p\mathbf{a}, q\mathbf{b} \in \sum_{q\in[A]^2} q_2^2$, где $p \neq q$ и $(p,q) \notin \mathrm{Pm}^*(A)$ (в случае $|A| = 4$). Это влечет условие $\mathrm{L}\Delta^2_{\#}$ для клона $\mathcal{F}$: достаточно положить разделительное множество Λ равным отношению $\mathrm{Tot}^*(A,r) \setminus \mathrm{Id}^*(A,r)$, если $|A| \neq 4$ и $\mathrm{Tot}^*(A,r) \setminus \mathrm{Pm}^*(A,r)$ иначе. $\square$

Итак, осталось рассмотреть случай $\mathrm{r}^+(\mathcal{F}) = t = 2$.

Пусть вначале $|A| \geq 5$.

Пусть даны такие последовательности

$$p\mathbf{a} = pa_0a_1, q\mathbf{b} = qb_0b_1 \in \sum_{q\in[A]^2} q_2^2,$$

что $p \neq q$. Достаточно доказать, что клон $\mathcal{F}$ косвенно отделяет $p\mathbf{a}$ и $q\mathbf{b}$.

Доказательство будет состоять из перебора случаев "взаимного расположения" последовательностей $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и множеств p, q. Вначале мы докажем во всех случаях, кроме шести "исключений" $\varphi_j(p\mathbf{a}, q\mathbf{b})$, $j < 6$, выполнено условие $p\mathbf{a} \#_{\mathcal{F}}\, q\mathbf{b}$. Для этого в каждом из рассматриваемых случаев будем предполагать, что существует такой номер $i \in \{0,1\}$, что пара $(p\mathbf{a}, q\mathbf{b})$ принадлежит отношению $\rhd_i$, и приходить к противоречию.

Напомним, что условие $\mathrm{r}^+(\mathcal{F}) = 2$ и лемма 3.18 влекут, что

$$q\mathbf{a} \#_{\mathcal{F}}\, q\mathbf{b}$$

для всех $q \in Q$, $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in q_2^2$, $\mathbf{t}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \{00, 11\}$.

Положим $|A| = n$.

Случай 1 : $\mathrm{ran}\,\mathbf{a} \cup \mathrm{ran}\,\mathbf{b} \subseteq p \cap q$ *и* $\neg\varphi_0(p\mathbf{a}, q\mathbf{b})$ *и* $\neg\varphi_1(p\mathbf{a}, q\mathbf{b})$, *где*

$$\varphi_0(p\mathbf{a}, q\mathbf{b}) \rightleftharpoons p \cap q = \mathrm{ran}\,\mathbf{a} = \mathrm{ran}\,\mathbf{b} \wedge n = 2(r-1),$$

$$\varphi_1(p\mathbf{a}, q\mathbf{b}) \rightleftharpoons p \cap q = \mathrm{ran}\,\mathbf{a} \cup \mathrm{ran}\,\mathbf{b} \wedge \mathrm{ran}\,\mathbf{a} \cap \mathrm{ran}\,\mathbf{b} = \emptyset$$

.

Подслучай 1.1 : $\mathbf{a} = \mathbf{b}$. Положим $B = A \setminus \operatorname{ran} \mathbf{a}$. На множестве $[B]^{r-2}$ рассмотрим отношение

$$\mathcal{R} = \{(u, v)\colon (u \cup \operatorname{ran} \mathbf{a})\mathbf{a} \rhd_i (v \cup \operatorname{ran} \mathbf{a})\mathbf{a}\}.$$

По пунктам1 и 5 леммы 5.16 это отношение рефлексивно, транзитивно и расширяет отношение $W(B, r-2, k)$, где $k = |p \cap q| - 2$. По лемме 3.26 имеет место одна из следующих возможностей:

1. $\mathcal{R} = \operatorname{Tot}^*(B, r-2)$;
2. $\mathcal{R} = \operatorname{Id}^*(B, r-2)$;
3. $|B| = 2(r-2)$ и $\mathcal{R} = \operatorname{Pm}^*(B)$.

Вторая возможность противоречит предположению $p\mathbf{a} \rhd_i q\mathbf{b}$ (т.к. $p \neq q$). Третья возможность противоречит предложению $\neg\varphi_0(p\mathbf{a}, q\mathbf{a})$.

Поэтому $\mathcal{R} = \operatorname{Tot}^*(B, r-2)$, т.е. условие

$$u\mathbf{a} \rhd_i v\mathbf{a}$$

имеет место для всех таких множеств $u, v \in [A]^r$, что $\operatorname{ran} \mathbf{a} \subseteq u \cap v$.

Вновь воспользовавшись пунктом 5 леммы 5.16, получим, что условие

$$u'\mathbf{x} \rhd_i v'\mathbf{x}$$

имеет место для всех последовательностей $u'\mathbf{x}, v'\mathbf{x} \in \sum_{q \in [A]^r} q_2^2$, удовлетворяющих условию $\operatorname{ran} \mathbf{x} \subseteq u' \cap v'$. Тогда аналогичное утверждению верно для отношения $\rhd_{1-i}$ (например, по пункту 3 леммы 5.16). Тогда клон $\mathcal{F}$ простой; противоречие.

Подслучай 1.2 : $\mathbf{a} = \overline{\mathbf{b}}$. Сводится к подслучаю 1.1. Действительно, легко проверить, что, используя ложность предложения $\varphi_0(p\mathbf{a}, q\mathbf{b})$, можно найти такое множество $s \in [B]^{r-2}$, что $|s \cap (q \setminus \operatorname{ran} a)| = |(p \setminus \operatorname{ran} a) \cap (q \setminus \operatorname{ran} a)|$ и $|s \cap (p \setminus \operatorname{ran} \mathbf{a})| = r - 3$. Отсюда, очевидно, $s \cup \operatorname{ran} \mathbf{a} \neq p$. По лемме 5.16 имеем

(a) $p\mathbf{a} \rhd_i q\bar{\mathbf{a}}$ (гипотеза),

(b) $q\bar{\mathbf{a}} \rhd_i (s \cup \operatorname{ran} \mathbf{a})\mathbf{a}$ (из (a) по п. 5),

(c) $p\mathbf{a} \rhd_i (s \cup \operatorname{ran} \mathbf{a})\mathbf{a}$ (из (a) и (b) по п. 1).

Заметим, что в оставшихся подслучаях случая 1 имеет место неравенство $r \geq 4$.

Подслучай 1.3 : $a_0 = b_0 \wedge a_1 \neq b_1$. По лемме 5.16 имеем

(a) $pa_0a_1 \rhd_i qa_0b_1$ (гипотеза),

(b) $qa_0b_1 \rhd_i pa_0a_1$ (из (a) по п. 5),

(c) $pa_1a_0 \rhd_i qb_1a_0$ (из (b) последовательным применением пп. 3 и 4),

(d) $qa_0b_1 \rhd_i pa_1b_1$ (из (c) по п. 5),

(e) $pa_0a_1 \rhd_i pa_1b_1$ (из (a) и (d) по п. 1).

Противоречие с леммой 3.18.

Подслучай 1.4 : $a_0 = b_1 \wedge a_1 \neq b_0$. По лемме 5.16 имеем

(a) $pa_0a_1 \rhd_i qb_0a_0$ (гипотеза),

(b) $qb_0a_0 \rhd_i pa_1b_0$ (из (a) по 5),

(c) $pa_0a_1 \rhd_i pa_1b_0$ (из (a) и (b) по 1).

Вновь противоречие с леммой 3.18.

Подслучай 1.5 : $\operatorname{ran} \mathbf{a} \cap \operatorname{ran} \mathbf{b} = \emptyset$. Используя ложность предложения $\varphi_1(p\mathbf{a}, q\mathbf{b})$, выберем элемент $c \in (p \cap q) \setminus \{a_0, a_1, b_0, b_1\}$. По лемме 5.16 имеем

(a) $pa_0a_1 \rhd_i qb_0b_1$ (гипотеза),

(b) $qb_0b_1 \rhd_i pa_0c$ (из (a) по 5),

(c) $pa_0a_1 \rhd_i pa_0c$ (из (a) и (b) по 1).

Вновь противоречие с леммой 3.18.

Подслучай 1.6 : $a_1 = b_1 \wedge a_0 \neq b_0$ и

Подслучай 1.7 : $a_1 = b_0 \wedge a_0 \neq b_1$

сводятся соответственно к подслучаям 1.3 и 1.4 с помощью пункта 3 леммы 5.16.

Случай 2 : $|\operatorname{ran} \mathbf{a} \cap p \cap q| = |\operatorname{ran} \mathbf{b} \cap p \cap q| = 1$ *и* $\neg\varphi_2(p\mathbf{a}, q\mathbf{b})$, *где*

$$\varphi_2(p\mathbf{a}, q\mathbf{b}) \rightleftharpoons |\operatorname{ran} \mathbf{a} \cap p \cap q| = |\operatorname{ran} \mathbf{b} \cap p \cap q| = |p \setminus q| = 1 \wedge \operatorname{ran} \mathbf{a} \cap \operatorname{ran} \mathbf{b} \neq \emptyset.$$

Подслучай 2.1 : $a_0, b_0 \in p \cap q$.

Подподслучай 2.1.1 : $\operatorname{ran} \mathbf{a} \cap \operatorname{ran} \mathbf{b} = \emptyset$. Сводится к подслучаю 1.2. Действительно, положим $s = (p \setminus \{b_0\}) \cup \{b_1\}$. По лемме 5.16 имеем

(a) $pa_0a_1 \rhd_i qb_0b_1$ (гипотеза),

(b) $pqb_0b_1 \rhd_i a_0a_1$ (из (a) по п. 5),

(c) $pa_1a_0 \rhd_i qb_1b_0$ (из (b) последовательным применением пп. 3 и 4),

(d) $qb_0b_1 \rhd_i sa_1a_0$ (из (c) по п. 5),

(e) $pa_0a_1 \rhd_i sa_1a_0$ (из (a) и (d) по п. 1).

Предложение $\varphi_1(pa_0a_1, sa_1a_0)$, очевидно, ложно. Остается заметить, что $|p \cap s| = r - 1$ и, следовательно, предложение $\varphi_0(pa_0a_1, sa_1a_0)$ также ложно, поскольку влечет равенство $n = 4$.

Подподслучай 2.1.2 : $a_0 = b_0$. Условие $\neg\varphi_2(p\mathbf{a}, q\mathbf{b})$ влечет выполненность неравенства $|p \setminus q| > 1$. Выберем элемент $c \in (p \setminus q) \setminus \{a_1\}$. По лемме 5.16 имеем

(a) $pa_0a_1 \rhd_i qb_0b_1$ (гипотеза),

(b) $qb_0b_1 \rhd_i pa_0c$ (из (a) по п. 5),

(c) $pa_0a_1 \rhd_i pa_0c$ (из (a) и (b) по п. 1).

Противоречие с леммой 3.18.

Подслучай 2.2 : $a_0, b_1 \in p \cap q$.

Подподслучай 2.2.1 : $\operatorname{ran} \mathbf{a} \cap \operatorname{ran} \mathbf{b} = \emptyset$. Сводится к подслучаю 1.2. Действительно, положим $s = (p \setminus \{b_1\}) \cup \{b_0\}$. По лемме 5.16 имеем

(a) $pa_0a_1 \rhd_i qb_0b_1$ (гипотеза),

(b) $qb_0b_1 \rhd_i sa_1a_0$ (из (a) по п. 5),

(c) $pa_0a_1 \rhd_i sa_1a_0$ (из (a) и (b) по п. 1).

Предложения $\varphi_0(pa_0a_1, sa_1a_0)$ и $\varphi_1(pa_0a_1, sa_1a_0)$ ложны по соображениям, аналогичным тем, которые рассмотрены в подподслучае 2.1.1.

Подподслучай 2.2.2 : $a_0 = b_1$. Сводится к подподслучаю 2.2.1. Условие $\neg\varphi_2(p\mathbf{a}, q\mathbf{b})$ влечет неравенство $|p \setminus q| > 1$. Выберем элемент $c \in (p \setminus q) \setminus \{a_1\}$ и положим $s = (p \setminus \{a_0\}) \cup \{b_0\}$. По лемме 5.16 имеем

(a) $pa_0a_1 \rhd_i qb_0a_0$ (гипотеза),

(b) $qb_0a_0 \rhd_i scb_0$ (из (a) по п. 5),

(c) $pa_0a_1 \rhd_i scb_0$ (из (a) и (b) по п. 1),

(d) $pa_1a_0 \rhd_{1-i} sb_0c$ (из (c) по п. 3).

Остается заметить, что для пары (pa_1a_0, sb_0c) имеют место условия подподслучая 2.2.1.

Оставшиеся

Подслучай 2.3 : $a_1, b_1 \in p \cap q$ и

Подслучай 2.4 : $a_1, b_0 \in p \cap q$

сводятся соответственно к подслучаям 2.1 и 2.2 с помощью утверждения пункта 3 леммы 5.16.

Случай 3 : $|\operatorname{ran} \mathbf{a} \cap p \cap q| = 1 \wedge \operatorname{ran} \mathbf{b} \subseteq p \cap q$.

Подслучай 3.1 : $a_0 \in p \cap q$.

Подподслучай 3.1.1 : $a_0 = b_0$. Сводится к подподслучаю 2.1.1. По лемме 5.16 имеем

(a) $pa_0a_1 \rhd_i qa_0b_1$ (гипотеза),

(b) $qb_1a_0 \rhd_i pa_1a_0$ (из (a) последовательным применением пп. 3 и 4),

(c) $qa_0b_1 \rhd_i pa_1b_1$ (из (b) по п. 5),

(d) $pa_0a_1 \rhd_i pa_1b_1$ (из (a) и (c) по п. 1).

Противоречия с леммой 3.18 не возникает, поскольку случай $r = 3$ возможен. Поэтому выберем элемент $c \in q \setminus p$ и продолжим цепочку следствий.

(e) $qa_0b_1 \rhd_i qb_1c$ (из (d) по п. 5),

(f) $pa_0a_1 \rhd_i qb_1c$ (из (a) и (e) по п. 1).

Остается проверить, что для пары (pa_0a_1, qb_1c) выполнены условия подподслучая 2.1.1.

Подподслучай 3.1.2 : $a_0 = b_1$. Сводится к подслучаю 2.2.1. Рассуждения аналогичны предыдущему случаю. Выберем элемент $c \in q \setminus p$. По лемме 5.16 имеем

(a) $pa_0a_1 \rhd_i qb_0a_0$ (гипотеза),

(b) $qa_0b_0 \rhd_i pa_1a_0$ (из (a) последовательным применением пп. 3 и 4),

(c) $qb_0a_0 \rhd_i pa_1b_0$ (из (b) по п. 5),

(d) $pa_0a_1 \rhd_i pa_1b_0$ (из (a) и (c) по п. 1).

(e) $qb_0a_0 \rhd_i qa_0c$ (из (d) по п. 5),

(f) $qa_0c \rhd_i qcb_0$ (из (d) по п. 5),

(g) $pa_0a_1 \rhd_i qcb_0$ (из (a), (e) и (f) по п. 1).

Остается проверить, что для пары (pa_0a_1, qb_1c) выполнены условия подподслучая 2.2.1.

Подподслучай 3.1.3 : $\operatorname{ran} \mathbf{a} \cap \operatorname{ran} \mathbf{b} = \emptyset$. Сводится к подподслучаю 3.1.1. Выберем элемент $c \in q \setminus p$ и положим $s = (p \setminus \{b_1\}) \cup \{c\}$. По лемме 5.16 имеем

(a) $pa_0a_1 \rhd_i qb_0b_1$ (гипотеза),

(b) $qb_0b_1 \rhd_i sa_0c$ (из (a) по п. 5),

(c) $pa_0a_1 \rhd_i sa_0c$ (из (a) и (b) по п. 1).

(d) $sa_0c \rhd_{1-i} pa_0a_1$ (из (c) по п. 4)

Остается заметить, что для пары (sa_0c, pa_0a_1) выполнены условия подподслучая 3.1.1.

Подслучай 3.2 : $a_1 \in p \cap q$. Сводится к подслучаю 3.1 с помощью пункта 3 леммы 5.16.

Случай 4 : $|\operatorname{ran} \mathbf{a} \cap p \cap q| = 1 \wedge \operatorname{ran} \mathbf{b} \subseteq q \setminus p$.

Подслучай 4.1 : $a_0 \in p \cap q$. Сводится к подподслучаю 2.1.2. Выберем элемент $c \in (p \setminus q) \setminus \{a_1\}$ (в рассматриваемом случае последнее множество непусто). По лемме 5.16 имеем

(a) $pa_0a_1 \rhd_i qb_0b_1$ (гипотеза),

(b) $qb_1b_0 \rhd_i pa_1a_0$ (из (a) последовательным применением пп. 3 и 4),

(c) $qb_0b_1 \rhd_i pca_0$ (из (b) по п. 5),

(d) $pa_0a_1 \rhd_i pca_0$ (из (a) и (c) по п. 1).

(e) $qb_0b_1 \rhd_i qa_0b_0$ (из (d) по п. 5),

(f) $pa_0a_1 \rhd_i qa_0b_0$ (из (a) и (e) по п. 1).

Остается заметить, что для пары (pa_0a_1, qa_0b_0) выполнены условия подподслучая 2.1.2 (предложение $\varphi_2(pa_0a_1, qa_0b_0)$ ложно, т.к. в рассматриваемом случае выполнено неравенство $|p \setminus q| \geq 2$).

Подслучай 4.2 : $a_1 \in p \cap q$. Сводится к подслучаю 4.1 с помощью утверждения 3 леммы 5.16.

Случай 5 : $\operatorname{ran} \mathbf{a} \subseteq p \setminus q \wedge \operatorname{ran} \mathbf{b} \subseteq q \setminus p$ *и* $\neg\varphi_3(p\mathbf{a}, q\mathbf{b})$, *где*

$$\varphi_3(p\mathbf{a}, q\mathbf{b}) \rightleftharpoons \operatorname{ran} \mathbf{a} = p \setminus q \wedge \operatorname{ran} \mathbf{b} = q \setminus p$$

. Выберем элемент $c \in (p \setminus q) \setminus \{a_0, a_1\}$. По лемме 5.16 имеем

(a) $pa_0a_1 \rhd_i qb_0b_1$ (гипотеза),

(b) $qb_0b_1 \rhd_i pa_0c$ (из (a) последовательным применением пп. 3 и 4),

(c) $pa_0a_1 \rhd_i pa_0c$ (из (b) по п. 5).

Противоречие с леммой 3.18.

Случай 6 : $|\operatorname{ran} \mathbf{b} \cap p \cap q| = 1 \wedge \operatorname{ran} \mathbf{a} \subseteq p \cap q$ и

Случай 7 : $|\operatorname{ran} \mathbf{b} \cap p \cap q| = 1 \wedge \operatorname{ran} \mathbf{a} \subseteq q \setminus p$

сводятся соответственно к случаям 3 и 4 с помощью утверждения пункта 4 леммы 5.16.

Оставшиеся случаи "взаимного расположения" последовательностей $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и множеств p, q отнесем к "исключениям". Положим

$$\varphi_4(p\mathbf{a}, q\mathbf{b}) \rightleftharpoons \operatorname{ran} \mathbf{a} \subseteq p \cap q \wedge \operatorname{ran} \mathbf{b} \subseteq q \setminus p \text{ и } \varphi_5(p\mathbf{a}, q\mathbf{b}) \rightleftharpoons \varphi_4(q\mathbf{b}, p\mathbf{a}).$$

Легко видеть, что невыполненность случаев $1 - 7$ влечет истинность одного из предложений $\varphi_i(p\mathbf{a}, q\mathbf{b})$, $i < 6$. Таким образом для доказательства теоремы достаточно показать, что истинность каждого из предложений $\varphi_i(p\mathbf{a}, q\mathbf{b})$ влечет выполненность условия $p\mathbf{a} \mathrel{+\!\!\!+\!\!\!+}_{\mathcal{F}} q\mathbf{b}$. Каждый раз это будет следовать из следующей леммы.

Лемма 5.18. *Пусть даны последовательности* $p\mathbf{a} = pa_0a_1, q\mathbf{b} = qb_0b_1$ *из множества* $\sum\limits_{q \in [A]^r} q^2$ *и такой элемент* $c \in p$, *что выполнены условия*

1. $pa_0c \mathrel{+\!\!\!+}_{\mathcal{F}} qb_0b_1$,

2. $pca_1 \mathrel{+\!\!\!+}_{\mathcal{F}} qb_0b_1$,

3. для любого элемента $d \in q$ имеет место один из случаев

а. $pa_0c \mathbin{+\!\!\!+}_{\mathcal{F}} qb_0d$

б. $pca_1 \mathbin{+\!\!\!+}_{\mathcal{F}} qdb_1$

Тогда $pa_0a_1 \mathbin{+\!\!\!+\!\!\!+}_{\mathcal{F}} qb_0b_1$.

Доказательство. Определим следующие функции $w^0, w^1 \in \mathcal{F}_{[3]}$. Выберем сначала функции $f^0, f^1, f^{0*}, f^{1*} \in \mathcal{F}_{[2]}$, удовлетворяющие равенствам

$$f_p^0(a_0c) = a_0,\ f_q^0(b_0b_1) = b_1,\ f_p^{0*}(a_0c) = c,\ f_q^{0*}(b_0b_1) = b_0$$

$$f_p^1(ca_1) = a_1,\ f_q^1(b_0b_1) = b_0,\ f_p^{0*}(ca_1) = c,\ f_q^{1*}(b_0b_1) = b_1.$$

Будем для наглядности использовать символы x, y, z вместо e_0^3, e_1^3, e_2^3.

Пусть d – произвольный элемент множества q. Если для элемента d имеет место случай 3а, выберем такую функции $f^2 \in \mathcal{F}_{[2]}$, что

$$f_p^2(a_0c) = c,\ f_q^2(b_0d) = b_0$$

и положим

$$w^0 = f^0(x, (f^{1*}(f^2(x,z), y)),\ w^1 = f^1(f^2(x,z), y).$$

Если для элемента d имеет место случай 3б, выберем такую функции $f^3 \in \mathcal{F}_{[2]}$, что

$$f_p^3(ca_1) = c,\ f_q^3(db_1) = b_1$$

и положим

$$w^0 = f^0(x, f_3(z,y)),\ w^1 = f^1(f^{0*}(x, f^3(z,y)), y).$$

Теперь легко проверить истинность равенств

$$w_p^0(a_0a_1c) = a_0,\ w_q^0(b_0b_1d) = b_1,\ w_p^1(a_0a_1c) = a_1,\ w_q^1(b_0b_1d) = b_0$$

$$\text{и } w_u^0(x,x,x) = w_u^1(x,x,x) = x$$

для всех $u \in [A]^r$ и $x \in u$.

Остальные функции, необходимые для выполнения условия $p\mathbf{a} \Vvert_{\mathcal{F}} q\mathbf{b}$, можно выбрать среди селекторных. $\square$

При разборе следующих случаев мы будем без особых упоминаний использовать очевидное утверждения $(\forall u\mathbf{x}, v\mathbf{y} \in \sum\limits_{q\in[A]^r} q^2)|\operatorname{ran}\mathbf{y}| = 1 \to u\mathbf{x} \Vert_{\mathcal{F}} v\mathbf{y}$.

Случай $\varphi_0(p\mathbf{a}, q\mathbf{b})$. Выберем элемент $c \in p \setminus q$. Тогда условия 1 и 2 леммы 5.18 следуют из случая 3. Пусть дан произвольный элемент $d \in q$. Если $d \in p\cap q$ то условие 3а леммы 5.18 также следует из случая 3, а если $d \in q \setminus p$, то оно же следует из случая 2 (надо только заметить, что для всех элементов $d \in q$ истинна импликация $n \geq 5 \wedge \varphi_0(p\mathbf{a}, q\mathbf{b}) \to \neg\varphi_2(pa_0c, qb_0d)$). Случай разобран.

Случай $\varphi_1(p\mathbf{a}, q\mathbf{b})$. Рассматривается аналогично, если заметить истинность импликации $\varphi_1(p\mathbf{a}, q\mathbf{b}) \to \neg\varphi_2(pa_0c, qb_0d)$ для всех $c \in p$ и $d \in q$.

Случай $\varphi_2(p\mathbf{a}, q\mathbf{b})$. В этом случае из условия $r \geq 3$ следует неравенство $|p \cap q| \geq 2$. Выберем элемент $c \in (p \cap q) \setminus (\operatorname{ran}\mathbf{a} \cup \operatorname{ran}\mathbf{b})$. Для сокращения перебора заметим, что для всех последовательностей $u\mathbf{x}, v\mathbf{y} \in \sum\limits_{q\in[A]^r} q^2$ верно

$$u\mathbf{x} \Vvert_{\mathcal{F}} v\mathbf{y} \leftrightarrow u\overline{\mathbf{x}} \Vvert_{\mathcal{F}} v\overline{\mathbf{y}}.$$

Поэтому можно без ограничения общности считать, что $a_0 \in q\setminus p$ (а $a_1 \in p\cap q$). Тогда ложно предложение $\varphi_2(pa_0c, qb_0b_1)$ и условие 1 леммы 5.18 выполнено по случаю 2. Условие 2 леммы 5.18 выполнено по случаю 6.

Пусть d – произвольный элемент множества q. Пусть вначале $d \in q \setminus p$. Тогда, если $b_0 = a_1$, то ложно предложение $\varphi_2(pa_0c, qb_0d)$, и условие 3а леммы 5.18 выполнено по случаю 2. Если $b_1 = a_1$, то условие 3а леммы 5.18 выполнено по случаю 4. Пусть теперь $d \in q\cap p$. Если $b_0 = a_1$, то условие (3.1) леммы 5.18 выполнено по случаю 3. Если $b_1 = a_1$ и $d \neq c$, то ложно предложение $\varphi_2(pa_0c, qb_0d)$, и условие 3а леммы 5.18 выполнено по случаю 2. В оставшемся случае по случаю 1 выполнено условие 3б леммы 5.18. Для проверки этого достаточно заметить, что истинна импликация $n \geq 5 \wedge \varphi_2(p\mathbf{a}, q\mathbf{b}) \to \neg\varphi_0(pca_1, qca_1)$.

Случай $\varphi_3(p\mathbf{a}, q\mathbf{b})$. В этом случае из условия $r \geq 3$ следует что $p \cap q \neq \emptyset$. Выберем элемент $c \in p \cap q$. Условия 1 и 2 леммы 5.18 выполнены по случаю

4. Пусть d – произвольный элемент множества q. Если $d \in q \setminus p$, то условие 3a леммы 5.18 выполнено по случаю 4. В противном случае оно выполнено по случаю 2 (импликация $\varphi_3(p\mathbf{a}, q\mathbf{b}) \to \neg\varphi_2(pa_0c, qb_0d)$ истинна для всех $c \in p$, $q \in d$).

Случай $\varphi_4(p\mathbf{a}, q\mathbf{b})$. Рассматривается аналогично, если выбрать элемент $c \in p \setminus q$ и заметить, что импликация $\varphi_4(p\mathbf{a}, q\mathbf{b}) \to \neg\varphi_2(pa_0c, qb_0d)$ истинна для всех $c \in p$, $q \in d$.

Случай $\varphi_5(p\mathbf{a}, q\mathbf{b})$. Сводится к предыдущему в силу симметричности отношения $\Vert\!\!\!-\!\!\!\Vert_{\mathcal{F}}$.

Таким образом, случай $|A| \geq 5$ полностью разобран.

Пусть теперь $|A| = 4$ и $r = 3$.

Пусть $A = \{a, b, c, d\}$. Везде ниже мы будем для наглядности записывать x, y, z вместо e_0^3, e_1^3, e_2^3.

Рассмотрим клон $\mathcal{F}_{\{a,b,c\}}$. Поскольку клон $\mathcal{F}_{\{a,b,c\}}$ симметричный и содержит не только проекции, лемма 3.18 допускает только следующие возможности:

(A) $(\forall i < 2)\,(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in A_2^2)\,\{a,b,c\}\mathbf{x} \rhd_i \{a,b,c\}\mathbf{y} \leftrightarrow \mathrm{t}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$,

(B) $(\forall i < 2)\,(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in A_2^2)\,\{a,b,c\}\mathbf{x} \rhd_i \{a,b,c\}\mathbf{y} \leftrightarrow \mathrm{t}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \{0, 1\}$,

(C) $(\forall i < 2)\,(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in A_2^2)\,\{a,b,c\}\mathbf{x} \rhd_i \{a,b,c\}\mathbf{y} \leftrightarrow \mathrm{t}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \{0, 01, 10\}$.

Сначала рассмотрим возможность (B). Из теоремы 3.3 легко получить, что клон $\mathcal{F}_{\{a,b,c\}}$ содержит следующие функцию f.

f	a	b	c
a	a	b	a
b	a	b	b
c	c	c	c

Рассмотрим произвольную функцию $f^* \in \mathcal{F}$, для которой

$$f^*_{\{a,b,c\}} = f.$$

В силу условия (B) имеем

$$f_q^*(\mathbf{x}) \neq f_q(\overline{\mathbf{x}})$$

для всех $q \in [A]^3$ и $\mathbf{x} \in q_2^2$.

Используя этот факт, легко показать, что функция

$$w = f^*(f^*(xy), f^*(f^*(z,y), f^*(z,x))),$$

совпадает с селекторной функцией $x = e_0^3$ на множестве $\sum\limits_{q \in [A]^3} q_{\leq 2}^3$.

Кроме того, легко установить справедливость равенства

$$w_{\{a,b,c\}}(abc) = b.$$

Рассуждая также, как в лемме 3.16, приходим к условию $\mathrm{L}\Delta_3^e$.

В каждой из возможностей (A) и (C) приходим к тому, что клон $\mathcal{F}_{\{a,b,c\}}$ содержит следующие функции u и v.

u	a	b	c
a	a	b	a
b	b	b	c
c	a	c	c

v	a	b	c
a	a	a	c
b	a	b	b
c	c	b	c

Если имеет место возможность (A), это следует из теоремы 3.3, а если имеет место возможность (C) непосредственно из леммы 3.18.

Заметим, что обе эти функции коммутативны и

$$u(\mathbf{x}) \neq v(\mathbf{x})$$

для всех $\mathbf{x} \in \{a,b,c\}_2^2$.

Покажем, что клон $\mathcal{F}$ содержит такие функции u^* и v^*, что $u^*_{\{a,b,c\}} = u$, $v^*_{\{a,b,c\}} = v$ и все функции u_q^*, v_q^* $(q \in [A]^3)$ коммутативны.

Функцию $f \in \mathcal{LW}(\mathfrak{C}_r(A))$ будем называть *коммутативной на множестве* $W \subseteq \sum\limits_{q \in [A]^3} q^2$, если

$$f_q(\mathbf{a}) = f_q(\overline{\mathbf{a}})$$

для каждой последовательности $q\mathbf{a} \in W$.

Тогда достаточно показать, что для любой коммутативной функции $g \in \mathcal{F}_{\{a,b,c\}}$ и множества W, $\{a,b,c\} \times \{a,b,c\}^2 \subseteq W \subseteq \sum\limits_{q\in[A]^3} q^2$, существует функция $g^+ \in \mathcal{F}$, которая коммутативна на W и для которой $g^+_{\{a,b,c\}} = g$. Индукция по мощности множества W. База индукции очевидна. Пусть предположение индукции выполнено. Тогда существует коммутативная на множестве W функция h, для которой $h_{\{a,b,c\}} = g$. Если $W = \sum\limits_{q\in[A]^3} q^2$, все доказано. Иначе выберем произвольную последовательность $q\mathbf{a} \in \sum\limits_{q\in[A]^2} q^2$, которая не принадлежит множеству W. В силу симметричности клона $\mathcal{F}$ существует функция $w \in \mathcal{F}_{[2]}$, которая коммутативна на множестве $\{q\mathbf{a}, q\overline{\mathbf{a}}\}$. Легко проверить, что можно положить $g^+ = w(h(x,y), h(y,x)) \in \mathcal{F}$. Шаг индукции доказан.

Теперь несложным перебором случаев можно убедиться в том, что любое предположение

$$p\mathbf{x} \rhd_i q\mathbf{y},$$

где $p,q \in [A]^3$, $p \neq q$, $\mathbf{x} \in p^2_2$, $\mathbf{y} \in q^2_2$, $\operatorname{ran}\mathbf{a} \neq \operatorname{ran}\mathbf{b}$, влечет, что каждая функция u^* и каждая функция v^*, удовлетворяющая указанным условиям, определяется однозначно, причем

$$u^*_q(\mathbf{x}) \neq v^*_q(\mathbf{x})$$

для всех $q\mathbf{x} \in \sum\limits_{q\in[A]^3} q^2$.

Этих условий достаточно для того, чтобы проверить, что функция

$$w^* = u^*(u^*(v^*(xy), v^*(xz)), v^*(yz))$$

есть ∂-функция.

Теперь, рассуждая как в лемме 3.16, приходим к условию $\mathrm{L}\Delta^\partial$.

Остается заметить, что любые последовательности $p\mathbf{x}, q\mathbf{y} \in \sum_{q\in[A]^3}$, где $p \neq q$ и $\operatorname{ran}\mathbf{x} = \operatorname{ran}\mathbf{y}$ хорошо отделимы (для случая $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ это следует из того, что клон $\mathcal{F}$ не простой и леммы 5.16, пункт 5, а для случая $\mathbf{x} = \overline{\mathbf{y}}$ доказывается так же, как при разборе подслучая 1.2 при $|A| \geq 5$). Таким образом, если для клона $\mathcal{F}$ не выполнено условие $\mathrm{L}\Delta^{\partial}$, то выполнено условие $\mathrm{L}\Delta^2_{\doubleplus}$, а следовательно, условие $\mathrm{L}\Delta^2_{\tripleplus}$.

Это окончательно доказывает теорему. $\square$

Теперь теоремы 4.8, 5.15, 5.7 и 4.6 легко влекут следующий результат.

Теорема 5.19 (об общем свойстве Эрроу). *Для любого конечного множества A и натурального числа r любое непустое собственное симметричное подмножество $\mathfrak{D}$ множества $\mathfrak{C}_r(A)$ не обладает общим свойством Эрроу в этих и только этих случаях:*

(*i*) $r = 2$, $|A| = 0,\ 1 \pmod 4$ *и* $\mathfrak{D} = \mathfrak{C}_2^0(A)$,

(*ii*) $r = 2$, $|A| = 0,\ 3 \pmod 4$ *и* $\mathfrak{D} = \mathfrak{C}_2^1(A)$,

(*iii*) $r = 2$, $|A| = 0 \pmod 4$ *и* $\mathfrak{D} = \mathfrak{C}_2^0(A) \cup \mathfrak{C}_2^1(A)$,

(*iv*) $r = 3$, $|A| = 4$ *и* $\mathfrak{D} = \mathfrak{C}_3^{\mathrm{K}}(A)$.

Заключение

В диссертации получены следующие основные результаты.

- Доказаны теоремы, характеризующие инвариантные множеств клонов $\mathcal{F}$ с конечным носителем, удовлетворяющих условиям Δ^{∂}, Δ_r^e и Δ^2.

- Построена классификация симметричных квазитривиальных клонов с конечным носителем, представляющая каждый из них в виде пересечения четырех клонов простых типов.

- Получена полная классификация симметричных множеств r-функций выбора, удовлетворяющих простому и общему свойству Эрроу.

Полученные результаты позволяют сделать обоснованный вывод о том, что существенная часть теории коллективного выбора может быть построена на базе теории замкнутых функциональных систем. Предложенный автором подход может найти дальнейшее применение в теории коллективного выбора.

В качестве перспектив дальнейшей разработки темы диссертации можно предложить дальнейшее изучение свойства Эрроу при рассмотрении более общих моделей процедур агрегирования коллективных систем предпочтений.

Литература

1. Granger G.G. La mathematique sociale du Marquis de Condorcet. Paris, 1956.
2. Arrow K. Social Choice and Individual Values. 2 edition. Yale University Press, 1963.
3. Arrow K. A difficulty in the concept of social welfare // J. of Political Economy. 1950. — 8. Vol. 58, no. 4. Pp. 328–346.
4. Geanakoplos J. Three Brief Proofs of Arrow's Impossibility Theorem // Economic Theory. 2005. Vol. 26, no. 1. Pp. 211–215.
5. Fishburn P. Arrow's Impossibility Theorem: Concise Proof and Infinite Voters // Journal of Economics Theory. 1970. Vol. 2. Pp. 103–106.
6. Sen A. K. A Possibility Theorem on Majority Decisions // Econometrica. 1966. Vol. 3, no. 4. Pp. 491–499.
7. Kaneko Mamoru. Necessary and Suffient Condition for Transitivity in Voting Theory // Journal of Economic Theory. 1975. Vol. 11. Pp. 385–393.
8. Bordes G., Hammond P. J., Le Breton Miche. Social Welfare Functionals on Restricted Domains and in Economic Environments // Journal of Public Economic Theory. 2005. Vol. 7(1). Pp. 1–25.
9. Barberá Salvador, Ehlers Lars. Free triples, large indifference classes and the majority rule // Social Choice and Welfare. 2011. Vol. 37, no. 4. Pp. 559–574.
10. Sen A. K. Quasi-Transitivity, Rational Choice and Collective Decisions // Review of Economic Studies. 1969. Vol. 36. Pp. 381–393.
11. Batra R., Pattanaik K. Transitive multi-stage majority decisions with quasi-transitive individual preferences // Econometrica. 1972. Vol. 40. Pp. 1121–1135.

12. Pini M. S., Rossi F., Venable K. B., Walsh T. Aggregating Partially Ordered Preferences // Journal of Logic and Computation. 2009. Vol. 19. Pp. 475–502.

13. Айзерман М. А., Алескеров Ф. Т. Задача Эрроу в теории группового выбора (анализ проблемы) // Автомат. и телемех. 1983. № 3. С. 127–151.

14. Айзерман М. А., Алескеров Ф. Т. Функциональные локальные операторы в теории голосований. I // Автомат. и телемех. 1984. № 5. С. 79–88.

15. Айзерман М. А., Алескеров Ф. Т. Функциональные локальные операторы в теории голосований. II // Автомат. и телемех. 1984. № 6. С. 105–114.

16. Айзерман М. А., Алескеров Ф. Т. Функциональные локальные операторы в теории голосований. III // Автомат. и телемех. 1984. № 7. С. 108–120.

17. Handbook of Social Choice and Welfare, Ed. by K. Arrow, A.K. Sen, K. Suzumura. Amsterdam: Elsevier/North-holland, 2002. — 08. Vol. 1.

18. Handbook of Social Choice and Welfare, Ed. by K. Arrow, A.K. Sen, K. Suzumura. Amsterdam: Elsevier/North-holland, 2010. Vol. 2.

19. Sen Amartya K. Collective choice and social welfare. San Francisco: Holden-Day, 1970.

20. Fishburn P. The Theory of Social Choice. Princeton University Press, 1973.

21. Börgers C. Mathematics of Social Choice. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2010.

22. Baryshnikov Y. M. Unifiyng Impossibility Theorems: A Topological Approach // Advanced in Applied Mathematics. 1993. Vol. 14. Pp. 404–415.

23. Chichilnisky Graciela, Heal Geoffrey M. Necessary and Sufficient Conditions for a Resolution of the Social Choice Paradox // Journal of Economic Theory. 1983. Vol. 31, no. 1. Pp. 68–87.

24. Kalai G. Learnability and rationality of choice // Journal of Economic Theory. 2003. Vol. 113. Pp. 104–117.

25. Tversky A. Intransitivity of preferences // Psychological Review. 1969. Vol. 76. Pp. 31–48.

26. Shelah S. On the Arrow property // Advances in Applied Mathematics. 2005. no. 34. Pp. 217–251.

27. Ježek Jaroslav, Kepka Tomáš. Quasetrivial and nearly quasitrivial distributive goupoids and semigroups // Acta Universitatis Carolinae. Mathematica et Physica. 1978. Vol. 19, no. 2. Pp. 25–44.

28. Ježek J., Quackenbush R. Minimal clones of conservative functions // International J. of Algebra and Computation. 1995. Vol. 5. Pp. 615–630.

29. Кон П. Универсальная алгебра. Москва: МИР, 1968.

30. Pöschel R., Kalužnin L. A. Funktionenund Relationenalgebren. Ein Kapitel der Diskreten Mathematik. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1979.

31. Нгуен В. Х. О семействах замкнутых классов k-значной логики, сохраняемых всеми автоморфизмами // Дискретная математика. 1993. Т. 5, № 4. С. 87–108.

32. Post E. L. Two-valued iterative systems of mathematical logic, Ed. by Phillip A. Griffiths, John N. Mather, Elias M. Stein. Princeton Univer, 1942. Vol. 5 of Annal of Math. studies.

33. Марченков С. С. Замкнутые классы булевых функций. Москва: Физматлит, 2000.

34. Lau D. Function Algebras on Finite Sets. A Basic Course on Many-Valued Logic and Clone Theory. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006.

35. Янов Ю. И., Мучник А. А. О существовании k-значных замкнутых классов, не имеющих конечного базиса // ДАН СССР. 1959. Т. 127, № 1. С. 44–46.

36. Яблонский С. В. Функциональные построения в к-значной логике // Тр. МИАН СССР им. В. А. Стеклова. 1958. Т. 51. С. 5–142.

37. Яблонский С. В., Гаврилов Г. П., Кудрявцев В. Б. Функции алгебры логики и классы Поста. Москва: Наука, 1966.

38. Кудрявцев В. Б. Функциональные системы. Москва: Изд-во МГУ, 1982.

39. Марченков С. С. Функциональные системы с операцией суперпозиции. Москва: Физматлит, 2004.

40. Geiger D. Closed systems of functions and predicate // Pacific journal of mathematics. 1968. Vol. 27, no. 1. Pp. 95–100.

41. Боднарчук В. Г., Калужнин Л. А., Котов В. Н., Ромов Б. А. Теория Галуа для алгебр Поста // Кибернетика. 1969. Т. 3. С. 1–10.

42. Боднарчук В. Г., Калужнин Л. А., Котов В. Н., Ромов Б. А. Теория Галуа для алгебр Поста // Кибернетика. 1969. Т. 5. С. 1–9.

43. Жук Д. Н. Решётка замкнутых классов самодвойственных функций трёхзначной логики. Москва: Издательство МГУ, 2011.

44. Марченков С. С. Клоновая классификация дуально дискриминаторных алгебр // Математические заметки. 1997. Т. 61, № 3. С. 359–366.

45. Марченков С. С. О замкнутых классах в k-значной логике, содержащих переключательную однородную функцию // Дискретный анализ и исследование операций. 1995. Т. 2, № 2. С. 49–61.

46. Парватов Н. Г. Клоны с мажоритарной функцией и их обобщения // Дискретн. анализ и исслед. опер. 2010. Т. 17, № 3. С. 46–60.

47. Поляков Н. Л. Теория социального выбора и клоны операций на конечных множествах // Препринтное издание WP1/2012/05 / ФГОБУ ВПО Финансовый университет при Правительстве РФ. Москва: 2012.

Публикации автора по теме диссертации

48. Поляков Н. Л., Шамолин М. В. О замкнутых симметричных классах функций, сохраняющих любой одноместный предикат // Вестн. СамГУ. Естественнонаучн. сер. 2013. № 6(107). С. 61–73.

49. Поляков Н. Л., Шамолин М. В. Об одном обобщении теоремы Эрроу // Доклады Российской Академии Наук. 2014. Т. 456, № 2. С. 143–145. Переводная версия: Polyakov N. L., Shamolin M. V. On a generalization of Arrow's impossibility theorem // Doclady Mathematics. 2014. Vol. 89, no. 3. Pp. 290–292.

50. Polyakov N. L. On the algorithmic decidability of the square-free word problem relative to a system of two defining relations // Journal of Mathematical Sciences. 2015. Vol. 204, no. 6. Pp. 800–807.

51. Поляков Н. Л. О классе дискретных функций, принимающих на любой последовательности значение, равное одному из ее членов // Материалы международной заочной научно-практической конференции «Физико-математические науки и информационные технологии: актуальные проблемы». Новосибирск: 2012. С. 17–26.

52. Поляков Н. Л. О клоновом подходе к некоторым теоремам о невозможности // VII Международная научная конференция по математическому моделированию. Якутстк: 2014. С. 108–110.

53. Поляков Н. Л. О некоторых позитивных результатах в теории коллективного выбора // II Международная научная конференция «Управленческие

науки в современном мире» / Финансовый университет при Правительстве РФ. Москва: 2014. С. 172–177.

54. Поляков Н. Л. О приложении теории функциональных систем к некоторым проблемам теории коллективного выбора // Международная научная конференция «Дискретная математика, алгебра и их приложения» / Институт математики НАН Беларуси. Минск: 2015. С. 131–133.