ФГБОУ ВПО “Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова”
Механико-математический факультет

На правах рукописи

Алимов Алексей Ростиславович

Аппроксимативно-геометрические свойства множеств в нормированных и несимметрично нормированных пространствах

Специальность 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертация
на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Научный консультант: профессор, д.ф.-м.н.
Царьков Игорь Германович

Москва – 2014

Содержание

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

В середине XIX века П. Л. Чебышев ввел в науку важное понятие наилучшего приближения (а именно, наилучшего равномерного приближения) и систематически применял его в приложениях. В дальнейшем понятия величины и элемента наилучшего приближения были перенесены на случай абстрактных пространств и стали исходным пунктом геометрической теории приближений.

Величиной наилучшего приближения, или расстоянием от заданного элемента x линейного нормированного пространства X до заданного непустого множества $M \subset X$, называется величина

$$\rho(x, M) := \inf_{y \in M} \|x - y\|.$$

Понятия и свойства, определяемые в терминах наилучшего приближения, в частности, свойства существования, единственности, устойчивости элементов наилучшего приближения, называются *аппроксимативными*. Таким является прежде всего понятие элемента наилучшего приближения, или ближайшей точки из множества $\varnothing \neq M \subset X$. Это есть (для заданного $x \in X$) такая точка $y \in M$, для которой $\|x - y\| = \rho(x, M)$. Множество всех *ближайших точек* (элементов наилучшего приближения, или, кратко, наилучших приближений) в M для заданного x обозначается $P_M x$. Иными словами,

$$P_M x := \big\{y \in M \mid \rho(x, M) = \|x - y\|\big\}.$$

Оператор $x \mapsto P_M x$ называется оператором *метрической проекцией* на множество M.

Всюду ниже X – действительное линейное нормированное пространство, X_n – действительное банахово пространство конечной размерности n. Случаи, когда X – несимметрично нормированное пространство будут оговариваться особо. Далее:

$B(x, r)$ – замкнутый шар с центром x и радиусом r;
$\mathring{B}(x, r)$ – открытый шар с центром x и радиусом r;
$S(x, r)$ – сфера с центром x и радиусом r.

Для краткости мы полагаем $B := B(0, 1)$ – единичный шар, $S = S(0, 1)$ – единичная сфера.

Множество M называется множеством *существования* (*единственности*), если для каждой точки x множество $P_M x$ ее ближайших элементов непусто (соответственно, пусто или одноточечно). Множество существования всегда замкнуто и непусто. В конечномерном X верно и обратное утверждение: любое замкнутое непустое множество является множеством существования.

Для подмножества $\varnothing \neq M \subset X$ точка $x \in X \setminus M$ называется *точкой солнечности*, если существует точка $y \in P_M x$ (называемая *точкой светимости*) такая, что

$$y \in P_M\big((1-\lambda)y + \lambda x\big) \quad \text{для всех} \quad \lambda \geqslant 0. \tag{0.1}$$

Геометрически условие (0.1) означает, что из точки y исходит "солнечный" луч, проходящий через x, для каждой точки которого y является ближайшей из M.

Точка $x \in X \setminus M$ называется *точкой строгой солнечности*, если $P_M x \neq \varnothing$ и условие (0.1) выполнено для любой точки $y \in P_M x$. Если же для $x \in X \setminus M$ условие (0.1) выполнено для любой точки $y \in P_M x$, то точка x называется *точкой строгой протосолнечности* (при этом, в отличие от точки строгой солнечности, ближайшая точка y к x не обязана существовать).

Замкнутое непустое множество $M \subset X$ называется *солнцем* (соответственно, *строгим солнцем*), если каждая точка $x \in X \setminus M$ является точкой солнечности (соответственно, строгой солнечности) для M. Множество $\varnothing \neq M \subset X$ называется *строгим протосолнцем*, если каждая точка $x \in X \setminus M$ является точкой строгой протосолнечности. Как правило, мы будем предполагать, что строгое протосолнце замкнуто. В общем случае (замкнутое) строгое протосолнце не обязано являться множеством существования.

Несложно проверить, что выпуклое множество всегда является строгим протосолнцем, а выпуклое множество существования – строгим солнцем.

Понятие "солнце" было введено Н. В. Ефимовым и С. Б. Стечкиным в [57] и оказалось весьма востребованным в теории приближений и выпуклом анализе. Термин "строгое протосолнце" вводится для избежания путаницы в понятиях "строгое солнце существования" (строгое солнце) и "строгое солнце без предположения о существования ближайшего элемента" (строгое протосолнце). Отметим, что имеется связь между строгими (прото)солнцами и множествами Колмогорова, т.е. множествами, для которых выполняется критерий Колмогорова ближайшего элемента, хорошо известный для приближения выпуклыми множествами и, в частности, подпространствами (см., например, Б. Брозовский [149]).

В конечномерном пространстве X замкнутое непустое множество является множеством существования, поэтому в таких X всякое строгое протосолнце является строгим солнцем. В бесконечномерном случае это уже не так – строгое протосолнце вообще может не иметь ближайших элементов для точек, не лежащих в нём (т.е. являться антипроксиминальным множеством).

Отдавая дань уважения П. Л. Чебышеву, как основателю теории приближений, Н. В. Ефимов и С. Б. Стечкин [57] предложили новый термин "чебышёвское множество", который практически сразу стал общепринятым. Непустое множество M называется *чебышёвским*, если для каждого x элемент наилучшего приближения из M существует и единственен (иными словами, чебышёвские множества суть в точности множества существования и единственности). *Чебышёвское солнце* – это чебышёвское множество, являющееся солнцем.

К примеру, множество $\mathcal{R}_{m,n}$ дробно-рациональных функций и подпространство $\mathcal{P}_n$ многочленов степени не выше n являются чебышёвскими множествами в $C[a,b]$. При этом оказалось, что элементы наилучшего равномерного приближения из $\mathcal{R}_{m,n}$ и $\mathcal{P}_n$ характеризуются в терминах альтернанса. Из этой характеризации вытекает, что множество $\mathcal{R}_{m,n}$ является чебышёвским солнцем в $C[0,1]$. Д. Браесс [144], а также Л. Чонг и Дж. А. Ватсон [162] (см. также Б. Брозовский и Р. Вегман [150]) показали (в других терминах), что множество обобщенно-рациональных функций

$$\mathcal{R}_{V,W} = \{p/q \mid p \in V, \quad q \in W, \quad q(t) > 0, \quad t \in Q\}$$

является строгим протосолнцем в $C(Q)$; здесь V, W – произвольные выпуклые подмножества в действительном или комплексном $C(Q)$, Q – хаусдорфов компакт (в отличие от классического случая $\mathcal{R}_{m,n}$ при приближении $\mathcal{R}_{V,W}$ наилучшее приближение может не существовать или не быть единственным).

Напомним ещё ряд определений.

Непустое замкнутое множество M называется:

α-солнцем, если для любой точки $x \notin M$ существует (солнечный) луч ℓ с вершиной x такой, что для любого $z \in \ell$ имеет место равенство $\rho(z, M) = \|z - x\| + \rho(x, M)$. Всякое солнце является α-солнцем. В отличие от солнц α-солнце может иметь изолированные точки: примером является "двоеточие" $M := \{(0,0)\} \cup \{(1,1)\}$ на плоскости с максимум-нормой $\|\cdot\|_\infty$.

Множество называется *ограниченно компактным*, если его пересечение с любым замкнутым шаром компактно (или пусто).

Точка $x \in X$ называется точкой *аппроксимативной компактности* для множества M ($x \in AC(M)$), если из любой последовательности $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M$, удовлетворяющей соотношению $\|x - y_n\| \to \rho(x, M)$ (такая последовательность называется *минимизирующей*), можно выбрать сходящуюся к некоторой точке из M подпоследовательность. Нетрудно проверить, что каждая точка аппроксимативной компактности $x \in X$ является точкой существования (т.е. $P_M x \neq \varnothing$). Множество $M \subset X$ называется *аппроксимативно компактным*, если каждая точка $x \in X$ является точкой аппроксимативной компактности. Понятие аппроксимативно компактного множества было введено Ефимовым и Стечкиным в [58]. Ясно, что ограниченно компактное множество аппроксимативно компактно.

К примеру, в $L^p[0,1]$, $1 < p < \infty$, множество $\mathcal{R}_{m,n}$ дробно-рациональных функций аппроксимативно компактно, но не ограниченно компактно (Н. В. Ефимов и С. Б. Стечкин [58]). Однако в пространстве $C[0,1]$ множество $\mathcal{R}_{m,n}$ уже не аппроксимативно компактно. Действительно, с одной стороны известно (Х. Мэли и К. Вицгаль [231], а также Д. Браесс [145]), что метрическая проекция на (чебышёвское множество) $\mathcal{R}_{m,n}$ имеет точки разрыва. С другой стороны, метрическая проекция на любое аппроксимативно компактное чебышёвское множество непрерывна (см., например, Л. П. Власов [50; следствие 2.2]).

Далее, положим

$\mathrm{T}(M) = \{x \mid \operatorname{card} P_M x = 1\}$ (если $\mathrm{T}(M) = X$, то M – чебышёвское множество);

$\mathrm{AC}(M)$ – множество точек аппроксимативной компактности для M.

Следуя Власову [50], если Q обозначает некоторое свойство (например, “связность”), мы будем говорить, что множество M обладает свойством

P-Q, если при всех $x \in X$ множество $P_M(x) \neq \varnothing$ и обладает свойством Q;

P_0-Q, если при всех $x \in X$ множество $P_M(x)$ обладает свойством Q;

B-Q, если $M \cap B(x,r)$ обладает свойством Q при всех $x \in X$, $r > 0$;

$\mathring{B}$-Q, если $M \cap \mathring{B}(x,r)$ обладает свойством Q при всех $x \in X$, $r > 0$;

экстремально Q, если $M \cap \Pi$ обладает свойством Q для любого бруса Π в X (по определению, брусы суть пересечения экстремальных гиперполос вида $\{x \in X \mid a \leqslant f(x) \leqslant b\}$, $-\infty \leqslant a \leqslant b \leqslant +\infty$, $f \in \operatorname{ext} S^*$, порождаемых в исходном пространстве экстремальными функционалами из S^*; см. стр. 171).

К примеру, замкнутое подмножество конечномерного пространства P-непусто, или является множеством существования (или проксимальным множеством). Далее,

$\operatorname{ext} S^*$ – множество экстремальных (крайних) точек единичной сферы S^* сопряженного пространства к пространству X;

$\exp S$ – множество достижимых (выставленных) точек единичной сферы S пространства X;

$\operatorname{sm} S$ – множество гладких точек сферы S (точек, в которых опорная гиперплоскость к сфере единственна).

Для непустого множества M мы полагаем:

$\operatorname{bd} M$ – граница множества M;

$\operatorname{cl} M$ – замыкание множества M;

$\operatorname{rb} M$ – относительная граница множества M (граница множества M в его аффинной оболочке);

$\operatorname{int} M$ – множество внутренних точек множества M;

$\operatorname{ri} M$ – относительная внутренность множества M (внутренность множества M в его аффинной оболочке);

$\mathrm{m}(M)$ – оболочка Банаха–Мазура (ограниченного) множества M; т.е. пересечение всех замкнутых шаров, содержащих M (в частном случае $\mathrm{m}(x,y) := \mathrm{m}(\{x,y\})$, $x, y \in X$);

$[[x,y]] := \{z \mid f(z) \in [f(x), f(y)]\ \forall f \in \operatorname{ext} S^*\}$ – интервал, определяемый точками x и y.

ВВЕДЕНИЕ

Диссертация состоит из введения, четырех глав и списка литературы из 268 наименований. В каждой главе принята сквозная нумерация результатов, определений и замечаний.

Актуальность темы. Геометрическая теория приближений во многом берет начало от исследований П. Л. Чебышева, который ввел в науку понятие наилучшего равномерного приближения и систематически применял его в приложениях, Г. Минковского, который впервые исследовал нормы, отличные от евклидовой, и А. Хаара, который изучал чебышёвские подпространства (системы Чебышева) в пространстве непрерывных функций. Позднее их идеи были перенесены на случай приближения в абстрактных пространствах. Таким образом возникли понятия чебышёвского множества и солнца. Сами термины "чебышёвское множество" и "солнце" были введены Н. В. Ефимовым и С. Б. Стечкиным в 1950-х годах [57] и практически сразу стали общепринятыми. В эти и последующие годы на первую роль вышли задачи единственности, существования и устойчивости наилучшего приближения, являющимся центральными в этой теории. В частности, активно изучались вопросы, связанные с исследованием зависимости между геометрическими характеристиками пространства и свойствами чебышёвских множеств. В 1961 г. были найдены необходимые условия и достаточные условия выпуклости чебышёвского множества в некоторых классах пространств, включающих гильбертовы пространства и пространство L^p $(p > 1)$: по В. Кли таким условием является слабая замкнутость множества, а по Н. В. Ефимову и С. Б. Стечкину – аппроксимативная компактность. Ефимов и Стечкин установили, что множество $R_{n,m}$ дробно-рациональных функций в пространствах L^p $(p > 1)$ аппроксимативно компактно. Применяя свой критерий, они установили, что, будучи невыпуклым, $R_{n,m}$ не является чебышёвским множеством в L^p $(p > 1)$. Этот результат считается первым применением геометрической теории чебышёвских множеств к конкретным задачам теории приближения функций.

В современном понимании геометрическая теория приближений изучает взаимосвязи между различными аппроксимативными и геометрическими свойствами множеств в абстрактных и конкретных пространствах. Наряду с чебышёвскими множествами активно изучаются и "солнечные" свойства подмножеств линейных нормированных пространств, представляющие собой аппроксимативно-геометрическую характеристику

“Солнца” обладают важными характеристическими признаками. Им присущи те или иные свойства отделимости: шар можно отделить от такого множества посредством большего шара или опорного конуса. Эти свойства стоят в одном ряду с известными свойствами отделимости выпуклых множеств по- средством полупространств (гиперплоскостей).

В работе изучаются структурные, геометрически-топологические характеристики солнц и чебышёвских множеств (в частности, связность и выпуклость). Будут получены как прямые теоремы геометрической теории приближений, в которых из структурных характеристик множеств выводят их аппроксимативные свойства, так и обратные теоремы, в которых из аппроксимативных свойств выводятся структурные характеристики. В качестве аппроксимативных характеристик множеств будут рассматриваться свойства единственности, существования наилучшего приближения, чебышёвости, аппроксимативной компактности и солнечности. К структурным характеристикам множеств обычно относят свойства линейности, конечномерности, компактности, выпуклости, различной связности и гладкости этих множеств.

Обратные теоремы по отношению к приложениям выступают в следующей роли. Выяснив, что исследуемый объект не обладает “хорошими” структурными характеристиками, из этих теорем выводится, что он не обладает и “хорошими” аппроксимативными свойствами. Обычно, таким путем удается установить, что данный объект не является множеством существования или единственности.

Область применения геометрической теории приближений на сегодняшний день лежит в теории оптимального управления системами с распределенными параметрами (А. В. Фурсиков [98]–[100], М. В. Яшина [112], [113]), теории некорректных задач (В. К. Иванов, В. В. Васин, В. П. Танана [60], Ф. Фарачи, А. Ианидзотто [184], Л. Зайичек [266]), теории неоднозначной разрешимости нелинейных дифференциальных уравнений (И. Г. Царьков [105]–[108], Б. Ричери [250], Ф. Фарачи, А. Ианидзотто [183] и др.), теории функций (среди многочисленных исследований отметим лишь недавние работы П. А. Бородина [41], [44], К. С. Рютина [90] и С. С. Аджиева [114], [115]), топологических минимаксных теоремах (Х. Кёниг [223], Б. Ричери [249]), теории критических точек в негладком случае (Д. Браесс [145], Б. Ричери [248]), теории обучения при построении оптимального оценщика (Ю. В. Малыхин [83]), при исследовании устойчивости по различным параметрам решений общих экстремальных задач и многозначных отображений (В. И. Бердышев [33], [34], [35], [36], Ф. Дойч, Дж. М. Ламберт [173], А. В. Маринов [84], [85], П. Шварцман [254], П. В. Альбрехт [23], М. В. Балашов и Д. Реповш [132], М. В. Балашов и М. О. Голубев [133], [133], К. В. Чеснокова [110] и др.), а также в выпуклом анализе – к примеру, при исследовании функции Моро и связанного с ней свойства проксрегулярности множеств и функций, которое является локальным вариантом свойства проксимальной гладкости и играет важную роль (как в теоретическом, так и в вычислительном аспектах) в оптимизации, вариационном анализе, нелинейном анализе и задачах восстановлении сигналов (Р. А. Поликвин и Р. Т. Рокафелар [244], Ф. Бернард и Л. Тибо [139], Б. Ричери [250], М. В. Балашов, Г. Е. Иванов [31], М. В. Балашов [30], [31], Г. Е. Иванов [63], А. Журани, Л. Тибо, Д. Загродны [211], В. Н. Соловьев [94] и др.). В связи с вышесказанным стоит отметить обзор В. М. Тихомирова [95], в котором, в частности, подробно раскрывается роль геометрической теории приближений в задачах теория приближения функций, выпуклом анализе и других областях математики, а также обзоры [50], [29], [66], [73], [212].

Цели и задачи исследования. Основной целью работы является решение ряда открытых проблем в геометрической теории приближений и геометрии банаховых и несимметрично нормированных пространств.

В диссертации исследуются следующие задачи:

- дать описание в геометрических терминах чебышёвских множеств в пространстве $\ell^\infty(n)$;
- установить солнечность монотонно связных чебышёвских множеств в общих линейно нормированных пространствах;
- изучить аппроксимативно-геометрические свойства монотонно линейно связных множеств и множеств, связных по Менгеру;
- установить свойство универсальности пространства непрерывных функций для линейных несимметрично нормированных пространств и пространств с несимметричной метрикой;
- охарактеризовать пространства конечной размерности, симметрично или несимметрично нормированные, в которых всякое чебышёвское множество выпукло;

- показать, что в пространстве c_0 всякое солнце связно (и, более того, монотонно линейно связно);
- доказать, что в сепарабельном банаховом пространстве компактное связное по Менгеру множеству экстремально клеточноподобно (и, в частности, P-ациклично);
- установить наличие непрерывной ε-выборки (из оператора почти наилучшего приближения) при приближении солнцами в широком классе конечномерных банаховых пространств.

Методика исследования включает использование многочисленных результатов из вещественного и выпуклого анализа, геометрии банаховых пространств, теории выпуклых многогранников, теории неподвижных точек, теории приближений и геометрической топологии. В ряде задач геометрической теории приближений существенную значимость показало введенное автором понятие монотонной линейной связности.

Научная новизна. Результаты диссертации являются новыми, получены автором самостоятельно и состоят в следующем:

- Впервые предъявляется пример неквадратного бесконечномерного банахова пространства, не являющееся неквадратным, в котором всякое солнце связно (и, более того, монотонно линейно связно);
- Показано, что в произвольном линейном нормированном пространстве монотонно линейно связное чебышёвское множество является солнцем;
- Установлено свойство универсальности пространства непрерывных функций для линейных несимметрично нормированных пространств и пространств с несимметричной метрикой.
- Получена геометрическая характеризация чебышёвских множеств в пространстве $\ell^\infty(n)$ (задача Тихомирова–Беренса).
- Установлена экстремальная клеточноподобность (в конечномерном случае – экстремальная стягиваемость) и монотонная линейная связность ограниченно компактных m-связных (по Менгеру) множеств в сепарабельных банаховых пространствах.
- В широком классе конечномерных банаховых пространств показано, что существует непрерывная ε-выборка (из оператора почти наилучшего приближения) при приближении солнцами.

Теоретическая и практическая ценность.

Работа имеет теоретический характер. Развитые в ней методы могут применяться в задачах теории приближений, выпуклом анализе, уравнениях в частных производных, а также при исследовании вопроса единственности решений задач оптимального управления системами, которые описываются с помощью нелинейных краевых задач.

Разделы диссертации могут составить содержание специальных курсов для студентов высших учебных заведений и аспирантов, обучающихся по специальности “математика”.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались и обсуждались на следующих семинарах:

МГУ, механико-математический факультет:

- семинар по теории функций действительного переменного под руководством академика РАН проф. П. Л. Ульянова (2005 г.);
- семинар по теории функций действительного переменного под руководством академика РАН проф. Б. С. Кашина, д.ф.-м.н. проф. Б. И. Голубова, д.ф.-м.н. проф. М. И. Дьяченко и чл.-корр. РАН проф. С. В. Конягина (неоднократно, 2012–2014 гг.);
- семинар “Теория приближений” под руководством д.ф.-м.н. проф. И. Г. Царькова (неоднократно, 1995–2014 гг.);
- семинар “Теория приближений и теория экстремальных задач” под руководством д.ф.-м.н. проф. В. М. Тихомирова и д.ф.-м.н. проф. Г. Г. Магарил-Ильяева (неоднократно, 1999–2014 гг.);
- семинар “Тригонометрические и ортогональные ряды” под руководством д.ф.-м.н. проф. Т. П. Лукашенко, д.ф.-м.н. проф. М. И. Дьяченко, д.ф.-м.н. проф. В. А. Скворцова и д.ф.-м.н. проф. М. К. Потапова (2014 г.);
- научно-исследовательский семинар по алгебре под руководством д.ф.-м.н. проф. А. В. Михалева, д.ф.-м.н. проф. В. Н. Латышева, д.ф.-м.н. проф. В. А. Артамонова, д.ф.-м.н. проф. В. К. Захарова, д.ф.-м.н. проф. Е. С. Голода (2014 г.);
- семинар “Задачи дифференциальных уравнений, анализа и управления: теория и приложения” под руководством д.ф.-м.н. проф. А. В. Фурсикова, д.ф.-м.н. проф. В. М. Тихомирова, член-корр. РАН проф. М. И. Зеликина и д.ф.-м.н. проф. В. Ю. Протасова (неоднократно, 2012–2014 гг);

- семинар “Геометрическая теория приближений” под руководством д.ф.-м.н. доц. П. А. Бородина (неоднократно, 2011–2014 гг).

Московский физико-технический институт (государственный университет):

- семинар “Многозначный анализ” под руководством д.ф.-м.н. проф. М. В. Балашова, д.ф.-м.н. проф. Г. Е. Иванова и д.ф.-м.н. проф. Е. С. Половинкина (2013, 2014 гг.).

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН:

- семинар “Теория приближений” под руководством д.ф.-м.н. проф. С. А. Теляковского (неоднократно, 1995–2014 гг.).

Российский университет дружбы народов:

- семинар “Экстремальные задачи и нелинейный анализ” под руководством д.ф.-м.н. проф. А. В. Арутюнова (2014 г.).

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук:

- семинар отдела теории приближений (2000, 2014 гг.).

За рубежом: семинар “Lehrstuhl Mathematik IV” под руководством проф. Г. Нюрнбергера (университет Маннгейм, Германия, 2002 г.), семинар “Konvexe Analysis” под руководством проф. П. Грубера (Technische Universität Wien, Австрия, 1999 г.), а также семинар “Approximationstheorie” под руководством проф. Х. Беренса и проф. Х.-И. Шмидта (математический институт, университет Эрланген–Нюрнберг, Германия, 1999, 2001, 2007 гг.).

Публикации. По теме диссертации опубликованы следующие работы: [121], [122], [3], [4], [5], [6], [123], [7], [8], [9], [10], [11], [12], [13], [14], [15], [16], [17], [124], [125], [126], [18], [20], [19]. Из них из перечня изданий, рекомендуемых ВАК России – ***21*** наименование.

Перейдем к обзору результатов по главам.

Глава I. В теории приближений давно остается нерешенной известная проблема Ефимова–Стечкина–Кли о выпуклости чебышёвских множеств в бесконечномерном гильбертовом пространстве (см., например, А. Л. Гаркави [53], В. С. Балаганский и Л. П. Власов [28], [29], Ф. Дойч [174], [175], Ж. Ириарт-Уррути [207], П. А. Бородин [40] [42], [43], [45], Дж. Флетчер [186]). Как правило, выпуклость чебышёвского множества в гильбертовом пространстве удается доказать при наложении ограничений типа компактности, непрерывности метрической проекции или солнечности. В 1961 г. были найдены необходимые условия и достаточные условия выпуклости чебышёвского множества в некоторых классах пространств, включающих гильбертовы пространства и пространство L^p $(p > 1)$: по В. Кли таким условием является слабая замкнутость множества, а по Н. В. Ефимову и С. Б. Стечкину – аппроксимативная компактность. Н. В. Ефимов и С. Б. Стечкин установили, что множество $R_{n,m}$ дробно-рациональных функций в пространствах L^p $(p > 1)$ аппроксимативно компактно. Применяя свой критерий, они установили, что, будучи невыпуклым, $R_{n,m}$ не является чебышёвским множеством в L^p $(p > 1)$. Отметим, что в неполном предгильбертовом пространстве ℓ^2_0 чебышёвское множество может быть невыпуклым – соответствующий пример построен Дж. Джонсоном и доработан Л. П. Власовым (см. [213], [214], [29]).

Менее известным, но отнюдь не менее интригующим, является вопрос о характеризации линейных нормированных пространств, в которых всякое чебышёвское множество выпукло (В. И. Бердышев [32], А. Брондстед [147], И. Г. Царьков [102], [104], А. Л. Браун [154], А. Р. Алимов [4], [3], [8], П. А. Бородин [40], [42]). Первым, кто рассматривал вопрос о выпуклости чебышёвских множеств, был Л. Н. Бунт. В своей диссертации [160] (1934 г.) он доказал, что в строго выпуклых конечномерных банаховых пространствах с модулем гладкости второго порядка (в том числе в евклидовых) всякое чебышёвское множество выпукло, причем в двумерном случае он показал, что от условия строгой выпуклости можно избавиться. Таким образом, было, в частности, показано, что в конечномерных евклидовых пространствах $\mathbb{R}^n$ классы чебышёвских и выпуклых замкнутых множеств совпадают. В дальнейшем Т. Моцкин установил [240], что в двумерном случае условие гладкости пространства (т.е. единственности опорной гиперплоскости в каждой точке единичной сферы пространства) является необходимым и достаточным для выпуклости любого чебышёвского множества в этом пространстве.

Полный ответ в задаче о выпуклости чебышёвских множеств в конечномерных пространствах получен лишь для пространств размерности не выше четырех.

Напомним, что точка s, лежащая на границе единичного шара B называется точкой *гладкости* шара B, или единичной сферы S, ($s \in \operatorname{sm} B$), если опорная гиперплоскость к шару B в точке s единственна (т.е. норма пространства дифференцируема в точке s по Гато). Точка s называется *достижимой* точкой шара B ($s \in \exp B$), если найдется опорная гиперплоскость H к шару B в точке s такая, что $H \cap B = \{s\}$.

В трехмерном случае ответ на вопрос о выпуклости чебышёвских множеств (теорема 1.A) получен независимо В. И. Бердышевым [32] и А. Брондстедом [147].

Теорема 1.A. *Пусть X – линейное нормированное пространство,* $\dim X = 3$. *Тогда каждое чебышёвское множество в X выпукло если и только если каждая достижимая точка шара B является точкой гладкости.*

При исследовании вопроса о том, в каких пространствах любое чебышёвское множество выпукло А. Л. Браун [154] ввел важное понятие *граневой системы выпуклых множеств.* Напомним, что *грань* выпуклого множества K – это непустое выпуклое экстремальное подмножество $F \subset K$ (т.е. для любого отрезка $[a,b] \subset K$ условие $(a,b) \cap F \neq \varnothing$ влечет условие $[a,b] \subset K$), *достижимая грань* множества K – непустое пересечение K с опорной гиперплоскостью к K.

Семейство $\mathcal{F}$ непустых замкнутых выпуклых подмножеств $\mathbb{R}^n$ называется *граневой системой выпуклых множеств*, если оно обладает следующими свойствами:

(F1) если $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ и $\cap\mathcal{G} \neq \varnothing$, то $\cap\mathcal{G} \in \mathcal{F}$;
(F2) если $F, G \in \mathcal{F}$ и $F \subset G$, то F – грань множества G;
(F3) для каждого натурального k множество $\cup\{F^k \mid F \in \mathcal{F}\}$ замкнуто в произведении $(\mathbb{R}^n)^k$.

Если K – выпуклое тело в $\mathbb{R}^n$, то семейство его собственных граней является граневой системой выпуклых множеств, равно как и семейство его достижимых граней.

Теорема 1.B (Браун [154]). *Пусть $\mathcal{F}$ – граневая система выпуклых множеств в $\mathbb{R}^n$. Предположим, что x_0 – экстремальная точка некоторого элемента $F \in \mathcal{F}$, N – окрестность точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и $N \subset (\cup_{F \in \mathcal{F}} F)$. Если $n = 1, 2$ или 3, то $\{y\} \in \mathcal{F}$ для некоторого $y \in N$.*

Пусть $[\![\mathrm{F}_n]\!]$ – утверждение теоремы 1.B, в котором фраза "если $n = 1, 2$ или 3" опущена из третьего предложения. Таким образом, теорема 1.B утверждает $[\![\mathrm{F}_1]\!]$, $[\![\mathrm{F}_2]\!]$ и $[\![\mathrm{F}_3]\!]$. Верно ли утверждение $[\![\mathrm{F}_n]\!]$ при $n \geqslant 4$ не известно. Отметим, что достаточно очевидно, что $[\![\mathrm{F}_{n+1}]\!]$ влечет $[\![\mathrm{F}_n]\!]$.

Применяя свой результат $[\![\mathrm{F}_3]\!]$ к некоторой граневой системе выпуклых множеств в $\mathbb{R}^4$, построенной по чебышёвскому множеству, и используя тонкие методы алгебраической топологии, А. Л. Браун [154] установил следующий результат.

Теорема 1.C. *Пусть X – линейное нормированное пространство, $\dim X = n < \infty$. Предположим, что выполнено условие $[\![\mathrm{F}_{n-1}]\!]$ или $n \leqslant 4$. Тогда каждое чебышёвское множество в X выпукло если и только если каждая достижимая точка шара B является точкой гладкости.*

Этот результат обобщает трёхмерный результат В. И. Бердышева–А. Брондстеда (теорема 1.A). Отметим, что Брондстед [147] доказал теорему 1.A для более широкого класса пространств – линейных пространств с несимметричной нормой.

Основные результаты главы I.

В теореме 1.1 получено следующее обобщение классического критерия выпуклости чебышёвских множеств (теоремы 1.A, 1.C) на случай несимметрично нормированных пространств и ее усиление на случай действующих точек относительно рассматриваемого множества.

Здесь напомним, что *несимметричной нормой* на X называется неотрицательный сублинейный функционал $\|\cdot\|$ такой, что для всех $x, y \in X$

1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
2) $\|\alpha x\| = \alpha\|x\|$ для всех $\alpha \geqslant 0$;
3) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

В общем случае, $\|x\| \neq \|-x\|$. Отметим, что функция $\|x\|_{\mathrm{sym}} = \max\{\|x\|, \|-x\|\}$, $x \in X$, является нормой. Наиболее полно обзор современных результатов, относящихся к общей теории несимметрично нормированных пространств приведен в недавно вышедшей монографии С. Кобзаша [169].

Напомним, что для данного непустого множества $M \subset X$ точка $s \in S$ называется *M-действующей* (здесь буква "M" означает рассматриваемое множество M), если

$$s \in (P_M x - x)/\rho \ \text{ для некоторого } \ x \notin M, \quad \text{где} \ \ \rho = \rho(x, P_M x).$$

Иными словами, если точка s является M-действующей для множества M, то ее "аналогом" (при растяжении и сдвиге единичного шара) можно коснуться множества M.

В теореме 1.1 мы обобщаем классический критерий выпуклости чебышёвских множеств (теоремы 1.A, 1.C) на случай несимметрично нормированных пространств и усиливаем его на случай M-действующих точек относительно рассматриваемого множества M.

Теорема 1.1. *Пусть X – линейное нормированное или несимметрично нормированное пространство*, $\dim X = n < \infty$. *Предположим, что выполнено условие Брауна* $[\![\mathrm{F}_{n-1}]\!]$ *или* $n \leqslant 4$. *Тогда следующие условия эквивалентны*:

a) *каждое чебышёвское множество M в X выпукло*;
b) *каждая достижимая точка шара B является точкой гладкости*;
c) *каждая достижимая M-действующая точка шара B является точкой гладкости.*

В § 1.2 изучается структура дополнения к чебышёвским множествам и солнцам в нормированных и несимметрично нормированных пространствах. Такая задача оказывается связанной с проблемой выпуклости чебышёвских множеств.

Напомним, что точки $s_1, \dots, s_n \in S$ называются *попарно далекими* [119] (или образующими антиподальное семейство [143; § 9.11]), если для тел $B_i = B - s_i$, $i = 1, \dots, n$, выполнены условия

$$B_i \cap \operatorname{int} B_j = \varnothing, \qquad i, j = 1, \dots, n, \tag{1.2}$$

т.е. сдвиги B_i тела B не пресекаются внутренностями и имеют общую точку.

Обозначим:

- $k(B)$ – мощность максимального антиподального семейства шара B (максимальное число неперекрывающихся сдвигов шара B, имеющих общую точку); в конечномерном X число $k(B)$ всегда конечно;
- $k_{\exp}(B)$ – мощность максимального антиподального семейства шара B, состоящего из *достижимых* точек;

- $k_{\mathrm{act,exp}}(B\,|\,M)$ – максимальное число *M-действующих* достижимых попарно далеких точек сферы S (для фиксированного множества M).

Имеет место следующий результат, являющийся на настоящий момент наилучшим в задаче описании пространств, содержащих солнце, строгое солнце или чебышёвское множество с заданным числом компонент связности дополнения.

Теорема 1.5. *Пусть X – линейное нормированное или несимметрично нормированное пространство*, $\dim X = n < \infty$.

Пусть $\nu \in \{1, \dots, k_{\mathrm{exp}}(B)\}$. Тогда в X найдется чебышёвское множество с ν компонентами связности дополнения.

Далее, предположим, что выполнено условие Брауна $[\![\mathrm{F}_{n-1}]\!]$ или $n \leqslant 4$. Предположим также, что $M \subset X$ – чебышёвское множество в X, дополнение к которому состоит из ν компонент связности. Тогда $k_{\mathrm{act,exp}}(B \mid M) \geqslant \nu$. В частности, $k_{\mathrm{exp}}(B) \geqslant \nu$.

В § 1.3 рассматривается классическая задача о выпуклости чебышёвского множества M в линейном нормированном или несимметрично нормированном пространстве $(X, \|\cdot\|)$ при дополнительном условии $M \subset H$, где H – подпространство в X. Общие задачи приближения множествами с условием $M \subset H$ ранее практически не рассматривались. Пусть B – единичный шар в X. Устанавливается, что если $|\cdot|_{H,\theta}$ – несимметричная норма на H, определяемая функционалом Минковского множества $(B - \theta) \cap H$ относительно 0, где $\|\theta\| < 1$ – произвольно, то M – чебышёвское множество в $(H, |\cdot|_{H,\theta})$ при любом выборе точки θ. Исходя из этого утверждения даются достаточные признаки и необходимые признаки выпуклости чебышёвских множеств M и ограниченных чебышёвских множеств M в X при условии $M \subset H$.

В 1958 г. Ефимов и Стечкин [57] сформулировали следующую задачу: *охарактеризовать конечномерные линейные нормированные пространства, в которых всякое* ***ограниченное*** *чебышёвское множество выпукло*. Полный ответ на этот вопрос был получен И. Г. Царьковым [102] (в несимметричном случае – автором [20]). Рассматриваемая в задача для несимметрично нормированных пространств была поставлена в 1990-х годах С. Б. Стечкиным, который был активным сторонником изучения задач геометрической теории приближений в несимметричном случае.

В теореме 1.11 даются достаточные условия выпуклости ограниченного чебышёвского множества, лежащего в гиперплоскости. В теореме 1.12 для конечномерного (не)симметрично нормированного пространства X и гиперплоскости $H \subset X$, $\dim H \geqslant 3$, строится норма на X, относительно которой любое ограниченное чебышёвское множество $M \subset H$ в X будет выпукло, однако найдется неограниченное невыпуклое чебышёвское множество $M_1 \subset H$ в X.

Здесь мы считаем, что B – единичный шар относительно некоторой фиксированной несимметричной нормы на конечномерном пространстве X (иными словами, B – выпуклое замкнутое ограниченное тело в X, $0 \in \operatorname{int} B$. Как обычно, обозначим $\mathring{B} = \operatorname{int} B$.

Пусть H – подпространство в X и пусть $\theta \in \mathring{B}$. Положим

$|\cdot|_\theta$ – несимметричная норма на X, задаваемая функционалом Минковского тела $\mathring{B} - \theta$ относительно точки 0;
$|\cdot|_{H,\theta}$ – несимметричная норма на H, индуцированная несимметричной нормой $|\cdot|_\theta$.

Шар, сферу с центром x и радиусом r и т. п. объекты, определяемые относительно несимметричной нормы $|\cdot|_\theta$, мы обозначаем $B_\theta(x, r)$, $S_\theta(x, r)$ и т. д.; подобным образом нижний индекс у некоторого объекта показывает, относительно какой (несимметричной) нормы он определяется.

Теорема 1.11. *Пусть* $\dim X < \infty$, $H \subset X$ *– гиперплоскость, и пусть* $M \subset H$ *– ограниченное чебышёвское множество в* X. *Предположим, что найдется* $\theta \in \mathring{B}$, *для которого*

$$\operatorname{cl}\{\varphi \in S^*_{H,\theta} \mid \exists f \in \exp S^*, \ \ \lambda = \lambda(f) > 0 \ \text{ такие, что } f|_H = \lambda \cdot \varphi\} = S^*_{H,\theta},$$

где $S^*_{H,\theta}$ *– единичная сфера пространства, сопряженного к* $(H, |\cdot|_{H,\theta})$. *Тогда множество* M *выпукло.*

Теорема 1.12. *Пусть* $\dim X < \infty$, $H \subset X$ *– гиперплоскость,* $\dim H \geqslant 3$. *Тогда на* X *существует норма, относительно которой любое ограниченное чебышёвское множество* $M \subset H$ *в* X *будет выпукло, однако найдется неограниченное невыпуклое чебышёвское множество* $M_1 \subset H$ *в* X.

Данный результат восходит к известному результату И. Г. Царькова [102], в котором на линейном пространстве X, $3 \leqslant \dim X < \infty$, строится норма $\|\cdot\|_T$, относительно которой всякое *ограниченное* чебышёвское множество в X выпукло, в то время как существует невыпуклое неограниченное чебышёвское множество в X.

В **главе II** рассматривается классический вопрос об универсальности пространства непрерывных функций. Хорошо известный результат, восходящий к Банаху и Мазуру, утверждает изометрическую универсальность пространства $C[0,1]$ для всех сепарабельных линейных нормированных пространств. Другой известный результат, также именуемый теоремой Банаха–Мазура, утверждает, что всякое сепарабельное метрическое пространство изометрично некоторому подмножеству пространства $C[0,1]$. Для несепарабельного случая аналоги этих утверждений получены Кляйбером и Первиным [219]. Мы распространяем эти результаты на линейные пространства с несимметричной нормой и пространства с несимметричной метрикой.

Несимметричные нормы возникли по-видимому впервые у Г. Минковского ("функционал Минковского"; [96]), в бесконечномерный анализ они были привнесены М. Г. Крейном (см. [78], [79]). Термин *несимметричная норма* был предложен Крейном [78; стр. 197] в 1938 г. М. Г. Крейн, в одиночку и в соавторстве, использовал несимметричные нормы при исследовании экстремальных вопросов, связанных с проблемой моментов Маркова. Важность сублинейных функционалов в ряде задач выпуклого анализа и математического анализа была отмечена Х. Кёнигом в работах [220], [222] (см. также обзорную работу [221]). Естественно возникают несимметричные расстояния и в теории приближений (в частности, в задачах наилучших односторонних приближений) – В. Ф. Бабенко [24] заметил, что приближения в пространствах с несимметричными нормами оказываются "мостиком" между наилучшими приближениями и наилучшими односторонними приближениями (в этой связи отметим работы В. Ф. Бабенко [25], [26], [27], Е. П. Долженко и Е. А. Севастьянова [55], [56], Б. В. Симонова [91], [93], [92], А. И. Козко [68], [69], [70], [71], А. В. Покровского [88], а также монографии Л. Коллатца и В. Краббса [72; гл. I, § 9.E] и С. Кобзаша [169]).

С точки зрения приложений представляется интересным исследование аппарата несимметричных норм в связи с задачами теоретической информатики при анализе сложности программ (см. [185], [192], [193], [190], [251], [252], [234]).

В геометрической теории приближений и выпуклом анализе несимметричные расстояния рассматривались в работах А. Брондстеда [146], [147], Е. Асплунда [130], П. А. Бородина [38], [39], [42], Г. Е. Иванова [210], Г. Е. Иванова и М. С. Лопушански [65], [64], а также в работах автора [119], [120], [4], [8].

В последние годы тематика, связанная с односторонними приближениями и несимметричными нормами, активно развивается. Систематическое изучение пространств с несимметричной нормой было начато в работах С. Кобзаша [164], [165], [166], [167], Х.-П. А. Кюнци [226], [227], С. Ромагуеры, К. Алегре, Э. А. Санчеса Переза [191], [192], [193], [251] и др.

Из последних работ отметим [194], [116], [118], [117], [228], [210]. Наиболее полно обзор результатов, относящихся к общей теории несимметрично нормированных пространств, а также вопросам функционального анализа и теории приближений в таких пространствах приведен в недавно вышедшей книге Кобзаша [169].

Основные результаты главы II

В § 2.1 дается определение линейного пространства с несимметричной нормой и приводится ряд свойств таких пространств. В § 2.2 приводятся теоремы Банаха–Мазура об универсальности в классическом случае (для линейных нормированных пространств и метрических пространств). В § 2.3 показывается (теорема 2.1), что каждое метризуемое сепарабельное линейное несимметрично нормированное пространство $(X, \|\cdot\|)$ может быть изометрично изоморфно вложено в классическое $C[0,1]$ как аффинное линейное многообразие (т.е. как сдвиг линейного многообразия); иными словами, единичный шар пространства X можно представить как пересечение единичного шара пространства $C[0,1]$ с некоторым *аффинным* линейным многообразием, пересекающего единичный шар по внутренней точке. При этом оказывается, что *неметризуемое* несимметрично нормированное пространство X никогда нельзя таким образом вложить в $C([0,1]^{\mathfrak{a}})$ ни при каком $\mathfrak{a}$.

Для пространств с несимметричной метрикой в § 2.4 показано, что каждое такое пространство плотности $\mathfrak{a}$ изометрично части пространства $C([0,1]^{\mathfrak{a}})$ с преднормой $p(f) = \max\{0, \|f_+\|_C\}$ (теоремы 2.2 и 2.3).

Согласно классическим результатам, восходящим к Банаху и Мазуру, всякое сепарабельное метрическое пространство (X, ρ) изометрично части пространства $C[0,1]$, а всякое сепарабельное линейное нормированное пространство X изометрически изоморфно линейному многообразию пространства $C[0,1]$. При этом, если X банахово, то X изометрически изоморфно подпространству пространства $C[0,1]$.

Новое направление теория универсальных пространств получила в работе П. А. Бородина [39] (см. также [46], [168; § 1.1] и теорему 2.E в § 2.3) – им найдено пространство, универсальное для линейных пространств с несимметричной нормой. Бородин [39] установил, что если $(X, \|\cdot\|)$ – линейное пространство с несимметричной нормой, сепарабельное относительно нормы $\|x\|_{\mathrm{sym}} = \max\{\|x\|, \|-x\|\}$, то оно изометрично изоморфно линейному многообразию преднормированного пространства $C([0,1], 1, 0)$, где последнее есть линейное пространство непрерывных функций $f \in C[0,1]$, снабженное *пред*нормой

$$p(f) = \max\{0, \|f_+\|_{C[0,1]}\}, \quad f_+(t) = \max\{f(t), 0\}, \quad t \in [0,1].$$

Отметим, что $C([0,1], 1, 0)$ не является несимметрично нормированным пространством.

Также в [39] построен пример сепарабельного несимметрично нормированного пространства X, не сепарабельного относительно нормы $\|x\|_{\mathrm{sym}}$.

В теореме 2.1 мы устанавливаем еще одно свойство универсальности единичного шара пространства $C[0,1]$ и показываем, что *метризуемые* сепарабельные несимметрично нормированные пространства X можно изометрически изоморфно вложить в классическое $C[0,1]$ как аффинное линейное многообразие; иными словами, единичный шар пространства X можно представить как пересечение единичного шара пространства $C[0,1]$ с некоторым линейным многообразием (пересекающим шар по внутренности). Из доказательства теоремы 2.1 будет следовать, что *неметризуемое* несимметрично нормированное пространство X никогда нельзя вложить в $C([0,1]^{\mathfrak{a}})$ ни при каком $\mathfrak{a}$.

Теорема 2.1. *Пусть $(X, \|\cdot\|)$ – линейное пространство с несимметричной нормой. Пространство $(X, \|\cdot\|)$ можно изометрически* *изоморфно вложить в $C[0,1]$ как аффинное линейное многообразие L в том и только в том случае, если X метризуемо и сепарабельно.*

Через $\mathring{b}_{C(Q)}$ (соответственно, $b_{C(Q)}$) обозначим открытый (соответственно, замкнутый) единичный шар пространства $C(Q)$ относительно равномерной нормы. В теореме 2.1 *изометричность* понимается в следующем смысле: существует точка $\theta \in \mathring{b}_{C[0,1]} \cap L$ такая, что функционал Минковского множества $b_{C[0,1]} \cap L$ относительно θ совпадает с функционалом Минковского шара B пространства X, т. е. с несимметричной нормой $\|\cdot\|$. Под *изоморфностью* отображения φ пространства X и линейного многообразия L мы понимаем линейность биекции $\varphi(x) - \theta$.

Пусть $\theta \in \mathring{b}_{C[0,1]}$ и пусть L – аффинное линейное многообразие в $C[0,1]$, $\theta \in L$. Выпуклое множество $b_{C[0,1]} \cap L$ порождает функционал Минковского ψ в L относительно точки θ. Поскольку $\theta \in \mathring{b}_{C[0,1]}$, то любое несимметрично нормированное пространство $(X, \|\cdot\|)$, несимметричная норма $\|\cdot\|$ которого совпадает с ψ, обязано быть топологически эквивалентным некоторому линейному нормированному пространству. Это показывает существенность метризуемости X в теореме 2.1. Далее, отметим, что по предложению 2.1, если X – несимметрично нормированное пространство и $(X, \|\cdot\|)$ метризуемо, то несимметричная норма $\|\cdot\|$ и норма $\|\cdot\|_{\mathrm{sym}}$ эквивалентны, поэтому неважно, относительно какой из несимметричных норм $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|_{\mathrm{sym}}$ требовать сепарабельность X.

Обобщением теорем Банаха–Мазура для метрических пространств на случай сепарабельных и несепарабельных пространств с несимметричной метрикой являются следующие утверждения. Сформулируем отдельно сепарабельный и несепарабельный случаи.

Теорема 2.2. *Пространство X с несимметричной метрикой ϱ изометрично вкладывается в несимметрично преднормированное пространство $C([0,1],1,0)$ в том и только в том случае, когда X сепарабельно относительно метрики $d(x,y) = \max\{\varrho(x,y), \varrho(y,x)\}$.*

Теорема 2.3. *Пусть $\mathfrak{a}$ – бесконечное кардинальное число. Пространство X с несимметричной метрикой ϱ можно изометрично вложить в несимметрично преднормированное пространство $C([0,1]^{\mathfrak{a}},1,0)$ в том и только в том случае, когда X имеет плотность $\leqslant \mathfrak{a}$ относительно метрики $d(x,y) = \max\{\varrho(x,y), \varrho(y,x)\}$.*

Отметим, что плотность пространства $C([0,1]^{\mathfrak{a}},1,0)$ относительно топологии, порожденной несимметричной преднормой $p(\cdot)$ также равна $\mathfrak{a}$.

В **главе III** рассматриваются вопросы связности и солнечности чебышёвских множеств и солнц. Прежде, чем сформулировать полученные результаты напомним, что известно об их связности в общих линейных нормированных пространствах.

Хорошо известно, что в гладких пространствах (и только в них) всякое солнце выпукло (см., например, [256; § 5.3], [66]). Поэтому вопрос о связности солнц является содержательным только в негладких пространствах.

Начнем с исторических замечаний. В конечномерном случае первый нетривиальный результат о связности солнц был получен В. А. Кощеевым [75; теорема 6]: *в конечномерном линейном нормированном пространстве всякое солнце связно.* Наилучший общий результат о связности солнц в произвольном конечномерном пространстве принадлежит Брауну [157; Theorem 3]. Именно, *если M – солнце в конечномерном линейном нормированном пространстве X, то оно линейно связно и локально линейно связно. Более того, существуют положительные константы L и α, зависящие только от X такие, что для любых различных точек $x,y\in M$ найдется путь $s:[0,1]\to M$, соединяющий x и y, такой, что*

$$\|s(\xi)-s(\eta)\|\leqslant L\|x-y\|\cdot|\xi-\eta|^{\alpha}$$

для всех $\xi,\eta\in[0,1]$.

В бесконечномерном случае оказалось, что проблема связности чебышёвских множеств отлична от проблемы связности солнц. В известных примерах несвязных чебышёвских множеств (Данхем [180], Кли [217]) построенные множества не являются солнцами. Единственный пример несвязного солнца (в бесконечномерном подпространстве) построен Кощеевым [77], [224]. Отметим, что построенное Кощеевым несвязное солнце не является чебышёвским множеством. Кощеев также установил, что компактное солнце в линейном нормированном пространстве связно [76; теорема 6], ограниченно компактное строгое солнце в произвольном линейном нормированном пространстве B-связно [75; предложение 12] и что произвольное солнце в равномерно неквадратном банаховом пространстве связно [18, следствие 1]. О структуре солнц и чебышёвских множеств в пространствах непрерывных функций с равномерной нормой см. также Х. Беренс и Л. Хетцельт [137], А. Р. Алимов [11], [7], [123], [5], Д. Браесс [144], Ч. Данхем [180].

В конкретных пространствах важное продвижение в вопросе о структуре солнц и, в частности, в задаче об их связности, было получено Беренсом и Хетцельтом [137] в конечномерном пространстве $\ell^\infty(n)$ (теорема 3.A). Напомним, что подмножество $M \subset \mathbb{R}^n$ называется ℓ^1-*выпуклым* (метрически выпуклым относительно ℓ^1-нормы) [137], если для всех $x, y \in M$, $x \neq y$, найдется точка $z \in M$, $z \neq x, y$, такая, что

$$\|x - y\|_1 = \|x - z\|_1 + \|z - y\|_1; \tag{3.3}$$

здесь $\|\cdot\|$ – обычная ℓ^1-норма на $\mathbb{R}^n$.

Теорема 3.A (Беренс, Хетцельт). *Множество $\varnothing \neq M \subset \mathbb{R}^n$ является солнцем в $\ell^\infty(n)$ если и только если оно замкнуто и ℓ^1-выпукло.*

Теорему 3.A можно естественно обобщить следующим образом: непустое множество $M \subset \mathbb{R}^n$ является солнцем в $\ell^\infty(n)$ если и только если оно замкнуто и *монотонно линейно связно*. Это привело к важному понятию монотонно линейно связного множества, введенному автором в [12].

Именно, пусть $k(\tau)$, $0 \leqslant \tau \leqslant 1$, – непрерывная кривая в линейном нормированном пространстве X. Кривая $k(\cdot)$ называется *монотонной* [152], если $f(k(\tau))$ является монотонной функцией по τ для любого $f \in \operatorname{ext} S^*$ (здесь и далее $\operatorname{ext} S^*$ – множество экстремальных точек сопряженной сферы S^*). Мы называем замкнутое подмножество $M \subset X$ *монотонно линейно связным*, если любые две точки из M можно соединить непрерывной монотонной кривой (дугой) $k(\cdot) \subset M$.

С учетом теоремы 3.A из теоремы 3.2 вытекает, что в пространстве $\ell^\infty(n)$ пересечение солнца с произвольным замкнутым шаром (экстремально) монотонно линейно связно (и даже более того, (экстремально) ацикличио, (экстремально) клеточноподобно и даже (экстремально) стягиваемо).

Отметим, что ниже будет показано, что экстремальная монотонная линейная связность всегда совпадает с монотонной линейной связностью.

В дальнейшем идеи и результаты Беренса и Хетцельта [136], [137] получили развитие в работах А. Л. Брауна [156], [158], [159] в конечномерном случае, а также в работах К. Франчетти, С. Роверси [188] и автора

[5], [11], [12], [14], [16], [124] в пространствах произвольной размерности. В частности, отметим, что произвольное солнце в c_0 монотонно линейно связно (теорема 3.4) и следовательно, (экстремально) монотонно линейно связно (в частности, B-монотонно линейно связно), а ограниченно компактное строгое солнце (в частности, ограниченно компактное чебышёвское множество) в пространстве $C(Q)$ монотонно линейно связно [12].

Основные результаты главы III

Для формулировки основных результатов нам понадобится ввести несколько определений.

Следуя Брауну [156] для ограниченного множества $\varnothing \neq M \subset X$ определим *оболочку Банаха–Мазура* $\mathrm{m}(M)$ множества M, т. е. пересечение всех замкнутых шаров, содержащих M.

Подмножество $M \subset X$ называется m-*связным* (*связным по Менгеру*) [156], если

$$\mathrm{m}(\{x, y\}) \cap M \neq \{x, y\}$$

для любых различных точек $x, y \in M$. Для краткости далее обозначаем

$$\mathrm{m}(\{x, y\}) = \mathrm{m}(x, y).$$

Важным свойством оболочки Банаха–Мазура $\mathrm{m}(\cdot, \cdot)$ (по крайней мере, в сепарабельных пространствах X) является то, что $z \in \mathrm{m}(x, y)$ если и только если z лежит метрически между x и y относительно так называемой ассоциированной (по Брауну) нормы $|\cdot|$ (т.е. $|x-y| = |x-z|+|z-y|$; см. лемму 3.1 ниже). К примеру, для замкнутого подмножества пространства $\mathbb{R}^n$ его (метрическая) ℓ^1-выпуклость равносильна монотонной линейной связности (см. замечание 3.1).

Нам также понадобится следующий класс пространств, введенный К. Франчетти и С. Роверси [188]:

(*Ex-w^*s*) $\qquad\qquad$ $\operatorname{ext} S^*$ w^*-сепарабельно.

При этом в определении класса (*Ex-w^*s*) мы всегда предполагаем, что

$$F = (f_i)_{i \in I} \subset \operatorname{ext} S^* \quad w^*\text{-плотно в } \operatorname{ext} S^*, \quad \operatorname{card} I \leqslant \aleph_0, \quad F = -F.$$

Сокращение (*Ex-w^*s*) происходит от немецкого “Die Extrempunktmenge der konjugierten Einheitskugel ist w^*-separabel”. Согласно одному известному результату Линденштраусса и Фелпса множество экстремальных точек единичного шара рефлексивного бесконечномерного пространства несчетно; тем не менее мы увидим ниже (см. стр. 86), что класс (*Ex-w*s*) содержит все сепарабельные линейные нормированные пространства (см. § 3.1.2).

Пусть пространство X лежит в классе (*Ex-w*s*) (в частности X – сепарабельное банахово пространство), $F = (f_i)_{i\in I}$ – семейство функционалов из (*Ex-w*s*), $(\alpha_i) \subset \mathbb{R}$, $\alpha_i > 0$, $i \in I$ (см. § 3.1.2) и пусть $\sum \alpha_i < \infty$. Для $x \in X$ положим

$$|x| = \sum_{i\in I} \alpha_i |f_i(x)|. \tag{3.4}$$

Тогда $|\cdot|$ – норма на X, которую, следуя Брауну [156] мы называем *ассоциированной*. Ясно, что $|x| \leqslant \|x\| \sum \alpha_i$.

Важность ассоциированной нормы показывает следующий результат (Алимов [18]), который является обобщает следствие 3.2 из работы [156], доказанного Брауном в случае $\dim X < \infty$.

Лемма 3.1. *Пусть X – банахово пространство из класса (MeI) $\cap$ (Ex-w*s) (в частности, X – сепарабельное банахово пространство) и пусть $x, y \in X$. Следующие условия эквивалентны:*

a) $z \in \mathrm{m}(x, y)$;
b) $|f_i(x) - f_i(y)| = |f_i(x) - f_i(z)| + |f_i(z) - f_i(y)|$ *для всех* $i \in I$, *где* $F = (f_i)_{i\in I}$ *– семейство из определения класса (Ex-w*s)*;
c) $|x - y| = |x - z| + |z - y|$ (*т.е.* z *находится метрически между* x *и* y *относительно нормы* $|\cdot|$).

В § 3.1.6 мы распространяем известную теорему Рейнуотера–Симонса о слабой сходимости последовательностей на случай сходимости относительно ассоциированной нормы $|\cdot|$ на пространствах класса (*Ex-w*s*) и в частности, на сепарабельных пространствах (теорема 3.1). Такое обобщение позволит нам при исследовании монотонной связности солнц и чебышёвских множеств применить аппарат метрической выпуклости для ассоциированной по Брауну нормы $|\cdot|$).

Напомним, что классическая теорема Рейнуотера–Симонса (см., например, [182; Theorem 3.134]) утверждает, что ограниченная последовательность $(x_n) \subset X$ слабо сходится к некоторому $x \in X$, если и только если $f(x_n) \to f(x)$ для любого f из произвольной фиксированной границы Джеймса пространства X (в частности, для всех $f \in \operatorname{ext} S^*$).

Теорема 3.1. *Пусть* $X \in (Ex\text{-}w^*s)$ *– банахово пространство* (*в частности,* X *– сепарабельное банахово пространство*), $F := (f_i)_{i\in I} \subset \operatorname{ext} S^*$ *– набор функционалов из определения класса* $(Ex\text{-}w^*s)$. *Пусть* (x_n) *–* $|\cdot|$*-ограниченная последовательность в* X. *Рассмотрим следующие условия*:

a) $x_n \xrightarrow{|\cdot|} x$;
b) $f_i(x_n) \to f_i(x)$ *для любого* $i \in I$;
c) $x_n \xrightarrow{w} x$.

Тогда условия a) *и* b) *эквивалентны, любое из них обеспечивается выполнением условия* c). *Если* X^* *сепарабельно, то все три условия эквивалентны.*

Данный результат нам потребуется при доказательстве того, что в сепарабельном банаховом пространстве непустое ограниченно слабо компактно m-связное множество M монотонно линейно связно (теорема 3.3).

В § 3.1.7 изучаются введенные Брауном (BM)-*пространства.* Конечномерные пространства X класса (BM) (в частности, пространство $\ell^\infty(n)$) являются "хорошими" с той точки зрения, что в них всякое солнце m-связно и, следовательно, монотонно линейно связно. Более того, мы показываем, что на солнце в таких пространствах существует непрерывная ε-выборка при любом $\varepsilon > 0$. С другой стороны, отметим, что даже в конечномерном случае чебышёвское солнце в общем случае не обязано быть монотонно линейно связным (см. замечание 3.4).

Напомним [156], что линейное нормированное пространство X называется (BM)-*пространством*, если

$$B(0, \|x\|) \cap \big(\mathrm{m}(x, y) \setminus \{x\}\big) \neq \varnothing, \ \text{ если } \ x \neq 0 \ \text{ и } \ [x, x-y] \cap \mathring{B}(0, \|x\|) = \varnothing.$$

Браун [159], [156] установил, что полиэдральные (BM)-пространства конечной размерности в точности являются ℓ^∞-прямыми суммами $X = X_1 \oplus_\infty \cdots \oplus_\infty X_r$ конечного набора симметричных полиэдральных пространств $X_1, \dots, X_r$ размерности 1 или 2. В § 3.1.7 мы показываем, что это условие эквивалентно тому, что X обладает свойством пересечения $(4.3.I.P)$ (т.е. любые четыре замкнутых шара пространства имеют непустое пересечение при условии, что каждые три из них обладают непустым пересечением) и эквивалентно тому, что X является пространством Мазура. (Напомним, что замкнутое ограниченное выпуклое множество M называется *множеством Мазура* (см. [201], [238]), если выполняется следующее свойство отделимости: для любой гиперплоскости H, находящейся на положительном расстоянии от M, найдется шар D такой, что $M \subset D$ and $H \cap D = \varnothing$. Линейное нормированное пространство, в котором класс множеств Мазура совпадает с классом пересечений замкнутых шаров, называется *пространством Мазура.* Такой класс пространств введен А. С. Гранеро и др. [201], [238].)

В § 3.2 исследуется монотонная линейная связность и солнечность связных по Менгеру множеств в банаховых пространствах. Устанавливается, что в широком классе банаховых пространств (в частности, в сепарабельных) ограниченно компактное m-связное множество монотонно линейно связно и является солнцем. Компактность здесь существенна – замкнутое m-связное множество в общем случае не обязано быть даже связным. Далее, показывается, что пересечение ограниченно компактного монотонно линейно связного (m-связного) множества с замкнутым шаром клеточноподобно (имеет шейп точки) и, в частности, ациклично (в конечномерном случае – стягиваемо) и является солнцем (теорема 3.2). Мы утверждаем, что ограниченно слабо компактное m-связное множество монотонно линейно связно (теорема 3.3). Полученные результаты применяются для исследования классического вопроса, восходящего к С. В. Конягину, о существовании непрерывных ε-выборок для всех $\varepsilon > 0$ на множество дробно-рациональные функций $\mathcal{R}_{n,m}$ в $C[0,1]$ или их обобщений в $C(Q)$.

Имеет место следующий результат, дающий ответ на ключевой вопрос о соотношении понятий m-связности и монотонной линейной связности.

Теорема 3.2. *Пусть X – сепарабельное банахово пространство и пусть множество $M \subset X$ – замкнуто и* m*-связно. Предположим, что выполнено хотя бы одно из условий:*

a) *M ограниченно компактно (в норме $\|\cdot\|$ пространства X);*
b) *M $|\cdot|$-замкнуто и $\mathrm{m}(x,y)$ $|\cdot|$-компактно для любых $x, y \in X$;*
c) *$\mathrm{m}(x,y)$ $\|\cdot\|$-компактно для любых $x, y \in X$.*

Тогда M монотонно линейно связно.

Если вдобавок M ограниченно компактно, то M экстремально ограниченно клеточноподобно и, в частности, B-клеточноподобно, B-ацик-

лично (относительно любой непрерывной теории (ко)гомологий) и является солнцем.

Если X конечномерно, то, вдобавок, M экстремально стягиваемо (в частности, P- и B-стягиваемо) и на множество M существует непрерывная ε-выборка для всех $\varepsilon > 0$.

(Экстремальная ограниченная клеточноподобность означает, что если пересечение множества M с брусом ограничено, то оно клеточноподобно.)

Для слабо компактных множеств мы имеем следующий результат.

Теорема 3.3. *Пусть X – сепарабельное банахово пространство и пусть $\varnothing \neq M \subset X$ ограниченно слабо компактно. Предположим, что M m-связно. Тогда M монотонно линейно связно.*

В § 3.3 изучается монотонная линейная связность солнц в пространствах типа $C(Q)$. Впервые предъявляется пример негладкого бесконечномерного пространства, не являющегося неквадратным, (пространство $X = c_0$), в котором всякое солнце связно и, более того, монотонно линейно связно (теорема 3.4). Напомним, что наилучшие общие результаты о связности солнц таковы (Кощеев [75]): в банаховом пространстве любое компактное солнце связно; в неквадратном пространстве всякое α-солнце связно. Рассматривая обратный вопрос, мы докажем, что монотонно линейно связное аппроксимативно компактное подмножество пространства c_0 является солнцем.

В § 3.3.1 рассматривается случай общих пространств $X = C(Q)$, Q – метризуемый компакт.

Мы показываем, что в $C(Q)$ ограниченно компактное строгое солнце (в частности, чебышёвское солнце) монотонно линейно связно (теорема 3.5). В теореме 3.6 показывается, что образ компактного строгого солнца M в $C(Q)$ при фактор-отображении по координатному подпространству L конечной коразмерности является компактным строгим солнцем в факторпространстве $C(Q)/L$.

В следующей теореме [11] впервые предъявляется пример негладкого классического бесконечномерного банахова пространства, не являющегося неквадратным, в котором всякое солнце связно (и, более того, монотонно линейно связно).

Теорема 3.4. 1) *Произвольное солнце в* c_0 *монотонно линейно связно.*

2) m-*связное (и, тем более, монотонно линейно связное) аппроксимативно компактное непустое подмножество пространства* c_0 *является солнцем.*

3) *Пространство* c_0 *содержит замкнутое монотонно связное множество, не являющееся* δ*-солнцем.*

Для случая $X = C(Q)$, Q – метрический компакт, известные результаты о связности строгих солнц и чебышёвских множеств можно обобщить следующим образом (Алимов [12; теорема 3]). Мы частично усиливаем результат Кощеева [75] о B-связности ограниченно компактных строгих солнц в банаховых пространствах и – в пространстве $C(Q)$, Q – метризуемый компакт, – устанавливаем их монотонную линейную связность (теорема 3.5).

Теорема 3.5. *Ограниченно компактное строгое солнце в пространстве* $C(Q)$ *монотонно линейно связно и* B*-клеточноподобно.*

Второе утверждение в теореме 3.5 частично обращает хорошо известную теорему Власова, согласно которой ограниченно компактное P-ацикличное подмножество банахова пространства является солнцем.

Напомним определение координатного (экстремального) аффинного подпространства в $C(Q)$.

Пусть $I \subset \mathbb{N}$, $(a_i)_{i\in I} \subset \mathbb{R}$, $(q_i)_{i\in I} \subset Q$. Положим $L = \{x \in C(Q) \mid x(q_i) = a_i,\ i \in I\}$. Если $\operatorname{card} I = k < \infty$ фиксировано, то все такие L образуют класс $\mathrm{cAff}^k(C(Q))$ *координатных аффинных подпространств* конечной коразмерности k. Иными словами, каждое $L \in \mathrm{cAff}^k(C(Q))$ имеет вид $L = \{x \mid x(\theta_1) = a_1,\ \ldots,\ x(\theta_k) = a_k\}$ для некоторого выбора различных точек $\theta_1, \ldots, \theta_k \in Q$.

Каждое координатное аффинное подпространство является экстремальным подпространством и, как следствие, брусом.

Для подпространства $L \subset C(Q)$ посредством $\pi(\cdot)$ обозначим фактор-отображение $\pi : C(Q) \to C(Q)/L$. Пусть $L \in \mathrm{cAff}^k(C(Q))$ – координатное подпространство конечной коразмерности k. Несложно видеть, что $C(Q)/L$ естественным образом отождествляется с $\ell^\infty(k)$,

$$\|\pi(x/L)\|_{C(Q)/L} = \|s_k(x)\|_{\ell^\infty(k)},$$

при этом мы отождествляем $\pi(\cdot) = s_k(\cdot)$, где $s_k(x) = (x(\theta_1), \dots, x(\theta_k))$.

Теорема 3.6. *Пусть M – компактное строгое солнце в $C(Q)$ и пусть $L \subset \mathrm{cAff}^k(C(Q))$ – координатное подпространство конечной коразмерности k. Тогда $\pi(M)$ – компактное строгое солнце в фактор-пространстве $C(Q)/L$.*

В § 3.4 изучается вопрос о солнечности монотонно линейно связных множеств и чебышёвских множеств в абстрактных линейных нормированных пространствах.

Классический вопрос о солнечности чебышёвских множеств изучался Н. В. Ефимовым, С. Б. Стечкиным, В. Кли, Л. П. Власовым, И. Г. Царьковым, С. В. Конягиным и др. Также отметим работы Власова [50], Балаганского и Власова [29], Карлова и Царькова [66], Брауна [156], Брозовского, Дойча, Ламберта и Морриса [152]. В конечномерном пространстве чебышёвское множество является солнцем. Ч. Данхем [180] (см. тж. [152]) построил пример локально компактного чебышёвского множества в $C[0,1]$, не являющегося солнцем. В общем случае для доказательства солнечности множества на него накладываются, как правило, ограничения типа компактности или непрерывности метрической проекции P_M (см., например, Власов [50; гл. 3], Балаганский и Власов [29; гл. I, § 2]). Классическим является результат Л. П. Власова, который утверждает, что ограниченно компактное P-ацикличное множество (в частности, чебышёвское множество) в банаховом пространстве является солнцем [50; теорема 4.4]. Власов также показал, что в банаховом пространстве локально компактное чебышёвское множество с непрерывной метрической проекцией является солнцем (см., например, [66]). Отметим также, что в $C(Q)$ или $C_0(Q)$ чебышёвское множество с непрерывной метрической проекцией является солнцем (Браесс [144] и Алимов [123]).

Имеет место следующий результат (Алимов [15], [16]), который является достаточно неожиданным: солнечность произвольного чебышёвского множества в линейном нормированном пространстве устанавливается при наложении структурных ограничений типа связности.

Теорема 3.7. *Пусть M – монотонно линейно связное подмножество линейного нормированного пространства. Предположим, что $P_M x = \{y\}$ для некоторого $x \notin M$. Тогда x – точка солнечности (y – точка светимости).*

Как следствие, монотонно линейно связное чебышёвское множество в линейном нормированном пространстве является солнцем.

Теорему 3.7 можно рассматривать как первый результат, в котором солнечность чебышёвского множества устанавливается при наложении на него структурных ограничений типа связности.

В § 3.5 рассматриваются R-слабо выпуклые множества и исследуется их связь с m-связными и монотонно линейно связными множествами.

Напомним необходимые определения.

Пусть $R > 0$ и $x, y \in X$, $\|x - y\| < 2R$. Множество

$$D_R(x, y) = \bigcap_{x,y \in B(z,R)} B(z, R) \tag{3.5}$$

называется *R-сильно выпуклым отрезком* (Е. С. Половинкин, Г. Е. Иванов, М. В. Балашов [61], [31]). Подмножество $M \subset X$ называется *R-слабо выпуклым* (Ж. Виаль, Г. Е. Иванов, М. В. Балашов)[1] [262], [31], если

$$(D_R(x, y) \setminus \{x, y\}) \cap M \neq \varnothing \qquad \forall\, x, y \in M, \ \ 0 < \|x - y\| < 2R. \tag{3.6}$$

Интерес к R-слабо выпуклым множествам обусловлен их приложениями к теории экстремальных задач, задачам оптимального управления, теории дифференциальных игр, теории приближений и теории многозначных отображений (см., например, монографию Г. Е. Иванова [61], а также работы Г. Е. Иванова и М. В. Балашова [31], [62], Г. Е. Иванова и М. С. Лопушански [64], [65], А. Р. Алимова [125], [124] и цитированную там литературу).

Мы рассматриваем вопрос об m-связности (связности по Менгеру) и монотонной линейной связности R-слабо выпуклых множеств в пространстве $C(Q)$ и в общих банаховых пространствах. При этом естественно возникает класс пространств (BEL) с линейной вкладываемостью шаров (такие пространства определяются в § 3.5.2 на стр. 128), а также пространства с длиннореберными (реберно-антиподальными) шарами (см. § 3.5.2 стр. 130). Сразу отметим, что $C(Q)$ и $\ell^1(n) \in (BEL)$). Устанавливается, что R-слабо выпуклое множество M в пространстве $X \in (BEL)$ m-связно (связно по Менгеру) при естественном ограничении на разброс точек M (теоремы 3.9 и 3.12). Показано, что

[1]В терминологии Балашова–Иванова [61], [31] – *слабо выпуклым по Виалю с константой* $R > 0$.

замкнутое подмножество M конечномерного пространства $X \in (BEL)$ является R-слабо выпуклым множеством при некотором $R > 0$ если и только если M есть дизъюнктное объединение монотонно линейно связных солнц, причем хаусдорфово расстояние между любыми компонентами связности множества M не менее $2R$ (теорема 3.10). В теореме 3.11 дается характеризация R-слабо выпуклых множеств в конечномерных пространствах $X \in (BEL)$ в терминах их солнечности. Попутно дается характеризация трехмерных пространств с длиннореберным единичным шаром (теорема 3.8) и устанавливается ряд их свойств.

Отметим следующий результат (теорема 3.9), в котором для случая пространств $C(Q)$ мы частично усиливаем ряд результатов, принадлежащих Г. Е. Иванову и М. В. Балашову о связности R-слабо выпуклых множеств. Результаты для пространств (BEL) с линейной вкладываемостью шаров сформулированы в теоремах 3.10 и 3.12 в § 3.5.

Теорема 3.9. *Пусть* $\varnothing \neq M \subset C(Q)$ – R-*слабо выпуклое множество при некотором* $R > 0$. *Тогда*:

a) $M \cap \mathring{B}(x, r)$ m-*связно при любых* $r \in (0, R]$ *и* $x \in C(Q)$;
b) $M \cap B(x, r')$ m-*связно при любых* $r' \in (0, R)$ *и* $x \in C(Q)$.

Дополнительно предположим, что M *ограниченно компактно. Тогда*:

1. *Любая компонента связности множества* M *монотонно линейно связна; хаусдорфово расстояние между любыми компонентами связности не менее* $2R$;

2. *Каждое из следующих множеств монотонно линейно связно*:

c) $M \cap \mathring{B}(x, r)$ *при любых* $r \in (0, R]$ *и* $x \in C(Q)$;
d) $M \cap B(x, r')$ *при любых* $r' \in (0, R)$ *и* $x \in C(Q)$;
e) $M \cap A$, *где* $A \subset C(Q)$, $\operatorname{diam} A < 2R$, *таково, что* $A = \mathrm{m}(A)$ (*в частности, множество* $M \cap \mathrm{m}(x, y)$ *монотонно линейно связно при любых* x, y, $\|x - y\| < 2R$).

Более того, если множество $M \cap B(x, r')$ *или* $M \cap A$ *из пп.* d) *или* e) *компактно, то оно экстремально клеточноподобно* (*и, в частности,* B-*клеточноподобно*).

Глава IV

В главе IV рассматриваются локальные свойства солнц и чебышевских множеств в банаховых пространствах с упором на вопрос сохранения солнечности, связности и других аппроксимативных свойств при пересечении таких множеств с подмножествами пространства. В данной задаче естественно возникает класс экстремальных подмножеств пространства – брусов, – включающий в себя замкнутые шары и экстремальные (координатные) гиперплоскости. Классические задачи о структуре множеств при пересечении с шарами (к примеру, задача о B-связности солнц) составляют частный случай задач об экстремальной структуре множеств.

Классическая задача о связности пересечений солнц с замкнутыми шарами в банаховых пространствах заключается в следующем: верно или нет, что в линейном нормированном пространстве пересечение *солнца* с произвольным замкнутым шаром связно? Данный вопрос частично восходит к известному результату Л. П. Власова [50; теорема 4.4], который утверждает, что в банаховом пространстве X непустое P-ацикличное ограниченно компактное множество является солнцем. Стоит также упомянуть также результат Д. Вулберта [264], [265], который установил, что в произвольном банаховом пространстве чебышёвское множество с непрерывной метрической проекцией $\mathring{B}$-связно. В. Поллул [245; p. 56, Theorem 2] усилил этот результат, показав, что в линейном нормированном пространстве множество существования с непрерывной метрической проекцией B-связно. И. Г. Царьков [103] показал, что в пространстве Ефимова–Стечкина замкнутое P_0-связное множество (в частности, всякое чебышёвское множество) $\mathring{B}$-связно. Из последних работ отметим следующий результат П. А. Бородина [42]: в полном равномерно выпуклом несимметрично нормированном пространстве P-связное множество B-связно.

В общем случае чебышёвское множество в бесконечномерном пространстве не обязано быть связным. Ч. Данхем [180] построил пример *несвязного чебышёвского множества* в $C[0,1]$ (множество в примере Данхема локально компактно, но не аппроксимативно компактно и не является солнцем). В. Кли [217], [218] построил пример дискретного чебышёвского множества в пространстве $l^1(\mathfrak{n})$, где $\mathfrak{n}$ – бесконечный регулярный кардинал такой, что $\mathfrak{n}^{\aleph_0} = \mathfrak{n}$ (множество в примере Кли также не является солнцем – солнце не может иметь изолированных точек).

Касаясь общих теорем о соотношении классов связных множеств, отметим что из B-связности множества вытекает его $\mathring{B}$-связность, а также, что в линейном нормированном пространстве аппроксимативно компактное $\mathring{B}$-связное множество B-связно (В. А. Кощеев, [75; теорема 8]). Царьков [103] показал, что если X банахово, то в X класс замкнутых $\mathring{B}$-связных множеств совпадает с классом замкнутых $\mathring{B}$-линейно связных множеств. Таким образом, в банаховом пространстве каждое замкнутое $\mathring{B}$-связное множество линейно связно. Для незамкнутых множеств это неверно даже в $X = \mathbb{R}^2$ (соответствующий пример построен Е. В. Щепиным, см. [103; с. 178]).

Ответ на вопрос о B-связности солнц тривиален в случае гладкого пространства – в таких пространствах все солнца и строгие солнца выпуклы.

Из известных результатов о B-связности солнц в произвольных пространствах отметим следующие. В линейном нормированном пространстве чебышёвское солнце B-связно (Б. Брозовский–Ф. Дойч [153; Corollary 5.3]). Ограниченно компактное строгое солнце в нормированном пространстве B-связно (Кощеев, [75; предложение 12]). Полный ответ в задаче о B-связности солнц имеется в двумерном случае (см. теоремы 4.C, 4.D, а также теоремы 4.23–4.26, где дается геометрическая характеризация солнц, строгих солнц и чебышёвских множеств в двумерном случае; см. также [136]). Однако даже в конечномерном случае вопрос о B-связности солнц не решен в общем случае при размерности пространства $\geqslant 3$. Тем не менее для пространств типа $C(Q)$ в данном вопрос оказывается возможным получить существенное продвижение как в конечномерном, так и в бесконечномерном случае – см. теоремы 4.19, 4.20, 4.15, 3.4 и лемму 3.4.

В § 4.1 дается геометрическая характеризация строгих солнц в пространстве $\ell^\infty(n)$ (теорема 4.1).

В § 4.2 решается давно стоящая задача о характеризации в геометрических терминах чебышёвских множеств в пространствах типа $C(Q)$. Для пространства $\ell^\infty(n)$ такая задача была поставлена в 1980-х годах независимо В. М. Тихомировым и Х. Беренсом. Характеризация чебышёвских множеств в $\ell^\infty(n)$ дается в теореме 4.2. На случай пространства c_0 результат теоремы 4.2 обобщается в теореме 4.3, где дается характеризация аппроксимативно компактных чебышёвских подмножеств M пространства c_0. Оказывается, что в $\ell^\infty(n)$ чебышёвское множество является экстремально чебышёвским (теорема 4.4), что означает, что если M – чебышёвское множество в $\ell^\infty(n)$, а Π – замкнутый промежуток (брус) в $\ell^\infty(n)$, $M \cap \Pi \neq \varnothing$, $M \cap \operatorname{ri} \Pi = \varnothing$, то пересечение $M \cap \Pi$ одноточечно. Классическое определение чебышёвости получается в случае, если брус Π – замкнутый шар.

Далее, в теореме 4.5 дается ответ на вопрос о сохранении аппроксимативных свойств солнц, строгих солнц и чебышёвских множеств при их пересечении с координатными подпространствами в $\ell^\infty(n)$. Более общий случай пересечений с брусами рассматривается в теореме 4.19. Аналогичный вопрос в бесконечномерном случае рассматривается в теоремах 4.6, 4.7, 4.8, 4.9.

В § 4.3 изучается вопрос о локальных аппроксимативно-геометрических свойствах множеств в произвольных банаховых пространствах. Исследуется солнечность пересечений солнц, строгих солнц и α-солнц с брусами и замкнутыми промежутками Π в линейных нормированных пространствах. В задаче о солнечности пересечений солнц с такими подмножествами указанная экстремальная структура множеств Π важна и естественна. К примеру, если подпространство $H \subset \ell^\infty(n)$ не экстремально (т.е. порождено не экстремальным функционалом), то оказывается, что всегда можно построить солнце M в $\ell^\infty(n)$, для которого пересечение $M \cap H$ не стягиваемо (и, следовательно, не является солнцем). Мы показываем, что в широком классе линейных нормированных пространств солнечность (глобальная) влечет локальную солнечность при пересечении с брусами. К примеру, в теоремах 4.11–4.13 даются условия, обеспечивающие солнечность пересечений солнц с брусами. Естественность бруса в данной задаче показана в теореме 4.14, где дается характеризация брусов в терминах солнечности их пересечений с солнцами.

В теореме 4.10 показывается, что солнца в конечномерных (BM)-пространствах (в частности, в полиэдральных пространствах вида $X = X_1 \oplus_\infty \ldots \oplus_\infty X_k$, $\dim X_i \leqslant 2$), удовлетворяют очень сильным условиям связности, являясь монотонно линейными множествами. Как следствие, солнца в таких пространствах экстремально стягиваемы, а значит B-стягиваемы, являются B-ретрактами, B-солнечны (последнее означает, что пересечение M с любым замкнутым шаром является солнцем) и обладают свойством существования непрерывной мультипликативной (аддитивной) ε-выборки при любом $\varepsilon > 0$ (теорема 4.10).

В § 4.4 вопрос о локальных аппроксимативных свойствах множеств рассматривается для случая пространства $C(Q)$. В теореме 4.15 установлено, что пересечение произвольного строгого протосолнца M в $C(Q)$ с телесным брусом $\Pi \subset C(Q)$ является строгим протосолнцем при естественном предположении, что $M \cap \operatorname{int} \Pi \neq \varnothing$. При этом, если строгое солнце $M \subset C(Q)$ ограниченно компактно, а Π – произвольный брус в $C(Q)$, $M \cap \Pi \neq \varnothing$, то $M \cap \Pi$ – солнце (не обязательно являющееся строгим солнцем). В теореме 4.16 утверждается, что телесные брусы Π в $C(Q)$ характеризуются свойством, что пересечение Π с произвольным строгим протосолнцем M в $C(Q)$, $M \cap \operatorname{int} \Pi \neq \varnothing$, является строгим протосолнцем. В теореме 4.17 дается характеризация строгих солнц в $C(Q)$ в терминах аппроксимативных свойств их пересечений с брусами. Вопрос о солнечности пересечений солнц с брусами в общих банаховых пространствах рассматривается в теоремах 4.11–4.13. В теореме 4.19 дана характеризация замкнутых множеств $\Pi \subset \mathbb{R}^n$, пересечение с которыми чебышёвского множества (солнца, строгого солнца) M в $\ell^\infty(n)$ сохраняет (в естественной постановке) аппроксимативные свойства множества M. Оказывается, что такие множества Π в точности являются брусами в $\ell^\infty(n)$. В теоремах 4.20–4.22 получены новые локальные характеризации чебышёвских множеств, солнц и строгих солнц в $\ell^\infty(n)$ в терминах аппроксимативных свойств их пересечений с брусами в $\mathbb{R}^n$.

В § 4.5 изучаются аппроксимативные свойства пересечений солнц и чебышёвских множеств в двумерном банаховом пространстве X_2 с подмножествами из $\mathbb{R}^2$. Охарактеризованы подмножества $\mathbb{R}^2$, которые при пересечении с солнцами из X_2 являются солнцами. Аналогичный вопрос полностью исследован для чебышёвских множеств в X_2.

Основные результаты главы IV

Нам потребуются несколько определений.

Пусть $X = \ell^\infty(n)$ или c_0. Пусть также $k \in \mathbb{Z}_+$, $k \leqslant \dim X$.

Обозначим:

$\mathrm{cAff}^k(c_0)$ – класс всех аффинных (экстремальных) координатных подпространств коразмерности k в пространстве c_0, т.е. подпространств вида

$\{x \in c_0 \mid x_{i_1} = c_1, \ldots, x_{i_k} = c_k\}$ для некоторого фиксированного набора индексов $i_1, \ldots, i_k$ и набора констант $c_1, \ldots, c_k$;

$\mathrm{cAff}_k(X)$ – класс всех аффинных координатных подпространств из X конечной размерности k.

Далее, пусть $M \subset X$, $2 \leqslant k \leqslant n$, $P \in \mathrm{cAff}_k(X)$, $Q \in \mathrm{cAff}_{k-1}(P)$.

Мы будем говорить, что Q – *локально опорная гиперплоскость* к множеству M в подпространстве P (и записывать это как $Q \in \mathrm{locTan}_P(M)$), если найдутся точка $x \in P \cap M$ и ее окрестность $\mathcal{O}(x)$ в P такие, что Q является опорной гиперплоскостью к $M \cap \mathcal{O}(x)$ в P. Утверждение, что Q – *опорная гиперплоскость* к множеству $M \cap P$ в подпространстве P будет пониматься обычным образом и записывается в виде $Q \in \mathrm{Tan}_P(M)$.

В теореме 4.2 дается ответ на давно стоящую задачу о характеризации в геометрических терминах чебышёвских множеств в пространствах типа $\ell^\infty(n)$. Этот вопрос был независимо поставлен В. М. Тихомировым и Х. Беренсом в 1980-х годах.

Теорема 4.2 (характеризация чебышёвских множеств в $\ell^\infty(n)$). *Множество $M \neq \varnothing$ является чебышёвским в $\ell^\infty(n)$ тогда и только тогда, когда одновременно выполнены следующие условия*:

a) *множество M замкнуто*;
b) *множество $M \cap P$ связно для любых $k = 1, \ldots, n$ и $P \in \mathrm{cAff}_k(\mathbb{R}^n)$*;
c) *для любых $k = 2, \ldots, n$, $P \in \mathrm{cAff}_k(\mathbb{R}^n)$ и $Q \in \mathrm{cAff}_{k-1}(P)$ из условия $Q \in \mathrm{locTan}_P(M)$ вытекает, что $Q \in \mathrm{Tan}_P(M)$ и пересечение $Q \cap M$ одноточечно.*

Развитием теоремы 4.2 на случай пространства c_0 является следующий результат.

Теорема 4.3. *Аппроксимативно компактное подмножество M пространства c_0 является чебышёвским в c_0 тогда и только тогда, когда одновременно выполнены следующие условия*:

a) *множество $M \cap H$ связно при всех $k \in \mathbb{Z}_+$ и $H \in \mathrm{cAff}^k(c_0)$*;
b) *для любых $k \in \mathbb{Z}_+$, $H \in \mathrm{cAff}^k(c_0)$ и $Q \in \mathrm{cAff}^{(k+1)}(H)$ из условия $Q \in \mathrm{locTan}_H(M)$ вытекает, что $Q \in \mathrm{Tan}_H(M)$ и пересечение $Q \cap M$ одноточечно.*

Отметим следующее красивое следствие из теорем 4.2–4.3.

Теорема 4.4. 1) *Чебышёвское множество в* $\ell^\infty(n)$ *является экстремально чебышёвским. Иными словами, если* Π *– брус в* $\ell^\infty(n)$, $M \cap \Pi \neq \varnothing$, $M \cap \operatorname{ri}\Pi = \varnothing$, *то пересечение* $M \cap \Pi$ *одноточечно.*

2) *Пусть* M *– аппроксимативно компактное чебышёвское множество в* c_0. *Предположим, что* Π *– замкнутый промежуток конечного дефекта в* c_0, $M \cap \Pi \neq \varnothing$, $M \cap \operatorname{ri}\Pi = \varnothing$. *Тогда пересечение* $M \cap \Pi$ *одноточечно.*

Наилучший результат о локальных свойствах солнц в конечномерных (BM)-пространствах дается в теореме 4.10 (определение и основные свойства класса (BM) даются в § 3.1.7; см. также стр. 29).

Пусть $\varepsilon > 0$, $M \subset X$. Отображение $\varphi : X \to M$ называют *мультипликативной* (*аддитивной*) *ε-выборкой*, если для всех $x \in X$ имеет место неравенство

$$\|x-\varphi(x)\| \leqslant (1+\varepsilon)\rho(x,M) \quad (\text{соответственно } \|x-\varphi(x)\| \leqslant \rho(x,M)+\varepsilon).$$

Важность ε-выборки в задачах наилучшего приближения раскрывается, в частности, в следующем замечании.

Замечание. Хорошо известно, что оператор наилучшего приближения обладает недостаточной устойчивостью даже в случае чебышёвских подпространств, не говоря о нелинейных множествах. К примеру, в классическом случае приближения многочленами в $\mathcal{P}_n$ в $C[0,1]$ оператор метрической проекции не является равномерно непрерывным на единичном шаре при $n \geqslant 2$. Более того, давно известны примеры чебышёвских подпространств с разрывной метрической проекцией (Е. В. Ошман, А. Л. Браун, В. И. Андреев); в невырожденных случаях метрическая проекция на множество дробно-рациональных функций в $C[0,1]$ всегда имеет точки разрыва. Для исправления этой ситуации был предложен способ повышения устойчивости приближения за счет сопоставления подходящим образом приближаемому элементу одного из его почти наилучших приближений. Так появилось понятие ε-выборки (ε-селекции).

Отметим, что из классической теоремы Майкла о селекции следует, что для всех $\varepsilon > 0$ существует непрерывная мультипликативная (аддитивная) ε-выборка на любое выпуклое подмножество линейного нормированного пространства.

Вопросами существования непрерывной ε-выборки и устойчивости оператора почти наилучшего приближения для классических объектов теории приближений занимались Д. Вулберт, О. А. Лисковец, В. И. Бердышев, С. В. Конягин, А. В. Маринов, И. Г. Царьков, П. В. Альбрехт, К. С. Рютин и Е. Д. Лившиц и др. Стоит подчеркнуть, что задача устойчивости оператора почти наилучшего приближения возникает не только в самой теории приближений и численных методах, но и в некорректных задачах, оптимальном управлении, математическом программировании и устойчивости решений общих экстремальных задач. Обзор современного состояния в этой области дан в недавней работе Д. Реповша и П. В. Семенова [247].

Теорема 4.10. *Пусть $X_n \in (BM)$ и пусть $M \subset X_n$ – солнце. Тогда*:

а) *M – (экстремально) монотонно линейно связно*;

б) *M – экстремально стягиваемо (в частности M – B-стягиваемо)*;

в) *M – экстремальный ретракт (в частности M – B-ретракт)*;

г) *M – экстремально солнечно (последнее означает, что пересечение M с любым брусом и, в частности, с замкнутым шаром является солнцем)*;

д) *на M существует непрерывная мультипликативная (аддитивная) ε-выборка при любом $\varepsilon > 0$.*

е) *для любого бруса $\Pi \subset X$ на множество $M \cap \Pi$ существует непрерывная мультипликативная (аддитивная) ε-выборка при любом $\varepsilon > 0$.*

В связи с теоремой 4.10 стоит отметить, что полиэдральное X_n лежит в классе (BM) если и только если любое солнце в X_n монотонно линейно связно.

Естественность пересечений с брусами показана в теореме 4.14. В частности, если $\Pi \neq \varnothing$ – замкнутое множество в X_n, то Π – брус если и только если $\Pi \cap M$ является монотонно линейно связным солнцем для любого монотонно линейно связного солнца M, $M \cap \Pi \neq \varnothing$.

В теореме 4.15 установлено, что пересечение произвольного строгого протосолнца M в $C(Q)$ с телесным брусом $\Pi \subset C(Q)$ является строгим протосолнцем при естественном предположении, что $M \cap \operatorname{int} \Pi \neq \varnothing$. При этом, если строгое солнце $M \subset C(Q)$ ограниченно компактно, а Π – произвольный брус в $C(Q)$, $M \cap \Pi \neq \varnothing$, то $M \cap \Pi$ – солнце (не обязательно являющееся строгим солнцем). Теорема 4.16 утверждает, что телесные брусы Π в $C(Q)$ характеризуются свойством, что пересечение Π с произвольным строгим протосолнцем M в $C(Q)$, $M \cap \operatorname{int} \Pi \neq \varnothing$, является строгим протосолнцем. В теореме 4.17 дается характеризация строгих солнц в $C(Q)$ в терминах аппроксимативных свойств их пересечений с брусами.

Теорема 4.15. *Имеют место следующие утверждения*:

а) *Пусть M – строгое протосолнце в $C(Q)$, Π – телесный брус в $C(Q)$, причем $M \cap \operatorname{int} \Pi \neq \varnothing$. Тогда $M \cap \Pi$ – строгое протосолнце в $C(Q)$.*

б) *Пусть M – строгое протосолнце в $C(Q)$, Π – замкнутый брус в $C(Q)$, причем $M \cap \operatorname{int} \Pi \neq \varnothing$ и $M \cap \Pi$ является множеством существования. Тогда $M \cap \Pi$ – строгое солнце в $C(Q)$.*

в) *Пусть M – ограниченно компактное строгое солнце в $C(Q)$, Π – брус в $C(Q)$, $M \cap \Pi \neq \varnothing$. Тогда $M \cap \Pi$ – монотонно линейно связное солнце в $C(Q)$.*

В теореме 4.19, уточняющей теорему 4.2, дана характеризация замкнутых множеств $\Pi \subset \mathbb{R}^n$, пересечение с которыми чебышёвского множества (солнца, строгого солнца) M в $\ell^\infty(n)$ сохраняет (в естественной постановке) аппроксимативные свойства множества M. Оказывается, что такие множества Π в точности являются брусами в $\mathbb{R}^n$. (Полный ответ на аналогичный вопрос для двумерного пространства с произвольной нормой дается в теоремах 4.24–4.26; случай общих банаховых пространств рассмотрен в теореме 4.14.)

Теорема 4.19. *Пусть $\varnothing \neq \Pi \subset \mathbb{R}^n$. Имеют место следующие утверждения*:

а) Π *является брусом в $\ell^\infty(n)$ если и только если $\Pi \cap M$ является солнцем в $\ell^\infty(n)$ для всякого солнца M в $\ell^\infty(n)$, $M \cap \Pi \neq \varnothing$;*

б) Π *является телесным брусом в $\ell^\infty(n)$ если и только если $\Pi \cap M$ является строгим солнцем в $\ell^\infty(n)$ для любого строгого солнца M в $\ell^\infty(n)$ такого, что $M \cap \operatorname{int} \Pi \neq \varnothing$;*

в$_1$) *Пусть Π – брус в $\ell^\infty(n)$. Тогда $\Pi \subset \mathrm{T}(M \cap \Pi)$ для любого чебышёвского множества M в $\ell^\infty(n)$, $M \cap \Pi \neq \varnothing$;*

в$_2$) *Пусть множество $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ связно, замкнуто и пусть включение $\Pi \subset \mathrm{T}(M \cap \Pi)$ выполнено для любого чебышёвского множества M в $\ell^\infty(n)$ такого, что $M \cap \Pi \neq \varnothing$. Тогда Π – брус.*

(Напомним, что $\mathrm{T}(M) := \{x \notin M \mid |\operatorname{card} P_M x| = 1\}$; см. стр. 7.)

В теоремах 4.20–4.22 получены характеризации чебышёвских множеств, солнц и строгих солнц в $\ell^\infty(n)$ в терминах аппроксимативных свойств их пересечений с брусами в $\mathbb{R}^n$. К примеру, множество $M \subset \mathbb{R}^n$ является чебышёвским в $\ell^\infty(n)$ если и только если для любых точек $x, y \in \mathbb{R}^n$ таких, что $\mathrm{m}(x, y) \cap M \neq \varnothing$, любая точка из оболочки $\mathrm{m}(x, y)$ имеет единственную ближайшую в $[[x, y]] \cap M$.

Благодарности. В первую очередь автор хочет выразить глубокую благодарность своему научному руководителю и научному консультанту И. Г. Царькову за постановку задач и обсуждение. Автор глубоко признателен А. В. Арутюнову, М. В. Балашову, С. А. Богатому, В. И. Бердышеву, С. В. Бердышеву, Х. Беренсу, П. А. Бородину, А. Л. Брауну, А. А. Васильевой, М. И. Дьяченко, Г. Е. Иванову, Г. М. Иванову, Е. Д. Лившицу, Б. С. Кашину, С. В. Конягину, У. Х. Каримову, А. С. Кочурову, А. В. Маринову, А. В. Михалёву, Х. Морено, О. Нигарду, Г. Нюрнбергеру, Е. С. Половинкину, В. Ю. Протасову, К. С. Рютину, С. А. Теляковскому, В. М. Тихомирову, А. В. Фурсикову, Я. Д. Хардтке, Е. В. Щепину, Н. И. Черныху за полезные обсуждения.

И самое главное: я бесконечно благодарен своей горячо любимой жене Виктории за неизменную любовь и заботу, за глубокое понимание и чуткость, несмотря на долгие годы жизни с человеком, который часто наполовину отсутствует мысленно, а иногда и (полностью) физически.

Глава 1. Выпуклость чебышёвских множеств. Число компонент связности дополнения чебышёвских множеств и солнц

В данной главе в § 1.1 рассматривается классическая задача о выпуклости чебышёвских множеств в линейных нормированных и несимметрично нормированных пространствах. На несимметричный случай обобщается характеризация В. И. Бердышева–А. Брондстеда–А. Л. Брауна пространств, в которых всякое чебышёвское множество выпукло (теорема 1.1) при условии, что размерность пространства $n \leqslant 4$ или если для пространства выполнено условие Брауна $[\![\mathrm{F}_n]\!]$ о граневых системах выпуклых множеств (см. стр. 17).

В § 1.2 рассматривается задача о структуре дополнения к чебышёвским множествам, солнцам и строгим солнцам (в симметричном и несимметричном случаях) и раскрывается ее связь с классической задачей о характеризации пространств, в которых всякое чебышёвское множество выпукло. Дается характеризация конечномерных несимметрично нормированных пространств, содержащих строгое солнце с заданным количеством компонент связности дополнения (теорема 1.3), что дополняет полученный ранее результат для солнц, полученный автором ранее. Для чебышёвских множеств сходную характеризацию удается получить в случае, если для пространства выполнено условие Брауна $[\![\mathrm{F}_n]\!]$ и, в частности, если пространство имеет размерность $n \leqslant 4$ (теоремы 1.5 и 1.6).

В § 1.3 рассматривается новая задача о выпуклости чебышёвского множества M в линейном нормированном или несимметрично нормированном пространстве $(X, \|\cdot\|)$ при дополнительном условии $M \subset H$, где H – подпространство в X. В теореме 1.7 дается ответ на классический вопрос Л. П. Власова об ацикличности (стягиваемости) ограниченно компактных солнц (см., например [50; гл. 4]) в частном случае, когда солнце содержится в двумерном подпространстве произвольного нормированного или несимметрично нормированного пространства. В качестве следствия отсюда получается, что любое такое солнце M является P-стягиваемым и на него для любого $\varepsilon > 0$ существует непрерывная ε-выборка. Даются достаточные признаки и необходимые признаки выпуклости чебышёвских множеств M и ограниченных чебышёвских множеств M в X при условии $M \subset H$ (теоремы 1.8, 1.9 и 1.10).

В §1.4 изучается вопрос о выпуклости ограниченных чебышёвских множеств, лежащих в гиперплоскости. В 1958 г. Ефимов и Стечкин [57] сформулировали следующую задачу: *охарактеризовать конечномерные линейные нормированные пространства, в которых всякое ограниченное чебышёвское множество выпукло*. Полный ответ на этот вопрос был получен И. Г. Царьковым в [102] (в симметричном случае). Рассматриваемая в задача для несимметрично нормированных пространств была поставлена в 1990-х годах С. Б. Стечкиным, который был активным сторонником рассмотрения задач геометрической теории приближений в несимметричном случае. Автор [20] перенес эту характеризацию на случай несимметрично нормированных пространств (данный результат не включается в диссертацию). В теореме 1.11 даются достаточные условия выпуклости ограниченного чебышёвского множества, лежащего в гиперплоскости. В теореме 1.12 для конечномерного (не)симметрично нормированного пространства X и гиперплоскости $H \subset X$, $\dim H \geqslant 3$, строится норма на X, относительно которой любое ограниченное чебышёвское множество $M \subset H$ в X будет выпукло, однако найдется неограниченное невыпуклое чебышёвское множество $M_1 \subset H$ в X.

1.1. Выпуклость чебышёвских множеств в конечномерных нормированных и несимметрично нормированных пространствах. В данной главе предполагается, что X – конечномерное нормированное или несимметрично нормированное пространство.

В теореме 1.1 получено следующее обобщение классической теоремы Бердышева–Брондстеда–Брауна (теорема 1.C) о выпуклости чебышёвских множеств на случай несимметрично нормированных пространств. История данной задачи освещена во введении на стр. 14–17.

Напомним, что для данного непустого множества $M \subset X$ точка $s \in S$ называется *M-действующей* (здесь буква “M” означает рассматриваемое множество M), если

$$s \in (P_M x - x)/\rho \ \text{ для некоторого } \ x \notin M, \ \text{ где } \ \rho = \rho(x, P_M x).$$

Теорема 1.1. *Пусть X – линейное нормированное или несимметрично нормированное пространство*, $\dim X = n < \infty$. *Предположим, что выполнено условие Брауна* $[\![\mathrm{F}_{n-1}]\!]$ *или* $n \leqslant 4$. *Тогда следующие условия эквивалентны*:

а) *каждое чебышёвское множество M в X выпукло*;

b) *каждая достижимая точка шара B является точкой гладкости;*
c) *каждая достижимая M-действующая точка шара B является точкой гладкости.*

Для доказательства теоремы 1.1 нам потребуются следующие определения.

Если $y \in S(x,r)$, то посредством $\operatorname{Exp}_{B(x,r)}(y)$ мы обозначаем наименьшую достижимую грань шара $B(x,r)$, содержащую точку y. Поскольку $\dim X < \infty$, то множество $\operatorname{Exp}_{B(x,r)}(y)$ всегда непусто.

Пусть $M \subset X$ – замкнутое множество, $x \in X \setminus M$, $\hat{y} \in P_M x$. Обозначим

$$J(x,\hat{y}) = J_M(x,\hat{y}) := -\operatorname{Exp}_{B(x,\rho(x,M))}(\hat{y}) + x + \hat{y}.$$

В случае, если M – чебышёвское множество, то точка $\hat{y} = P_M x$ определена однозначно и мы пишем для краткости $J(x)$. Нам потребуется следующий результат (Брондстед [147]).

Лемма 1.A. *Пусть X – несимметрично нормированное пространство*, $\dim X = n < \infty$ *и пусть $M \subset X$ – замкнутое множество*, $x \in X \setminus M$, *а η – точка светимости из M для x. Тогда если $z \in J(x,\eta)$, то*

1) $\eta \in P_M z$;
2) $\rho(z,M) = \rho(x,M) = \rho(x,\eta)$;
3) η *– точка светимости из M для z.*

Если $y \in X$, $M \subset X$, то для краткости будем писать $\rho(y)$ вместо $\rho(y,M)$.

Следующая лемма фактически доказана (но явно не сформулирована) Брауном в [2, стр. 336–338] в нормированном случае и играет важную роль в доказательстве теорем 1.1 и 1.5. Для несимметрично нормированных пространств рассуждения Брауна проходят без изменения.

Напомним, что открытый опорный конус к шару $B(x,\|x-y\|)$ в его граничной точке y определяется следующим образом (см. [50], [87]):

$$\mathring{K}(y,x) := \bigcup_{r>0} \mathring{B}\big(-ry + (r+1)x, (r+1)\|x-y\|\big). \tag{1.1}$$

Лемма 1.1. *Пусть X – несимметрично нормированное пространство*, $\dim X = n < \infty$, *и пусть $M \subset X$ – чебышёвское множество.*

Пусть $x \notin M$. Предположим, что выполнено условие $[\![\mathrm{F}_{n-1}]\!]$ или $n \leqslant 4$, а также, что

$$\text{для всякой точки } z \notin M \text{ такой, что } x \in \mathring{K}(P_M z, z), \text{ достижимая грань шара } B(z, \rho(z)), \text{ определяемая точкой } P_M z, \text{ не содержит достижимых точек шара } B(z, \rho(z)). \tag{1.2}$$

Тогда найдется точка $z \notin M$ такая, что $x \in \mathring{K}(P_M z, z)$ и $\dim J(z) = 0$, т.е. $P_M z$ – достижимая точка шара $B(z, \rho(z))$.

Замечание 1.1. Условие (1.2) в лемме 1.1 является существенным. Если взять в пространстве $\ell^\infty(2)$ в качестве чебышёвского множества евклидов круг радиуса 1 с центром в точке с декартовыми координатами $(0, 2)$, а в качестве точки x – начало координат, то легко видеть, что не существует точки $z \in X \setminus M$ такой, что $x \in \mathring{K}(P_M z, z)$ и $P_M z \in \exp B(z, \rho(z))$.

В нелинейной теории приближений часто оказываются важными геометрические свойства, более слабые, чем выпуклость. В соответствии с геометрической формой теоремы Хана–Банаха замкнутые выпуклые множества характеризуются тем, что любую точку вне такого множества можно строго отделить от него посредством (замкнутой) гиперплоскости (открытого полупространства). Оказывается, что аналогичный результат (известный, как критерий Колмогорова ближайшего элемента) верен для солнц (строгих (прото)солнц) при замене открытого полупространства на открытый опорный конус: *точка, не принадлежащая солнцу, строго отделяется от него посредством выпуклого открытого опорного конуса.* Это утверждение содержится в теореме 1.A (см., например, А. Брондстед [146], Е. В. Ошман [87; лемма 3] и Л. П. Власов [50; гл. 3] и комментарии на стр. 57 там же).

Теорема 1.A. *Имеют место следующие утверждения:*

1. *Множество $M \subset X$ является солнцем в X тогда и только тогда, когда для каждой точки $x \notin M$ найдется точка $y \in P_M x$ такая, что $\mathring{K}(y, x) \cap M = \varnothing$.*

2. *Множество $M \subset X$ является строгим солнцем в X тогда и только тогда, когда для каждой точки $x \notin M$ множество ее ближайших точек $P_M x$ непусто и для любой точки $y \in P_M x$ выполнено равенство $\mathring{K}(y, x) \cap M = \varnothing$.*

3. *Множество* $M \subset X$ *является* α*-солнцем в* X *тогда и только тогда, когда для каждой точки* $x \notin M$ *найдется точка* $y \in S(x, \rho(x, M))$ *такая, что* $\mathring{K}(y, x) \cap M = \varnothing$.

Данный результат также верен в произвольных несимметрично нормированных пространствах [119].

Лемма 1.1 играет важную роль при обобщении теоремы 1.C.

Доказательство теоремы 1.1. Предположим, что справедливо условие $[\![\mathrm{F}_{n-1}]\!]$ (напомним, что $[\![\mathrm{F}_{n-1}]\!]$ выполнено для всех $n \leqslant 4$).

Далее, предположим, что всякая достижимая M-действующая точка единичного шара B является точкой гладкости.

Мы докажем выпуклость M, установив, что каждая точка $x \in X \setminus M$ может быть отделена от M посредством замкнутой гиперплоскости.

Пусть $x \in X \setminus M$. Предположим, что (1.2) не выполнено. Тогда найдется точка $z \notin M$ такая, что $x \in \mathring{K}(P_M z, z)$ и достижимая грань $\mathrm{Exp}_{B(z,\rho(z))}(P_M z)$ содержит достижимую точку η. По лемме 1.A точка η является M-действующей. В силу минимальности достижимой грани, любая опорная гиперплоскость к шару $B(z, \rho(z))$, проходящая через z, также проходит и через η, а по предположению точка η является точкой гладкости шара $B(z, \rho(z))$. Это влечет, что $P_M z$ – также точка гладкости и, следовательно, конус $\mathring{K}(P_M z, z)$ является открытым полупространством. Поэтому точка z, а вместе с ней и x, может быть отделена от множества M гиперплоскостью – границей полупространства $\mathring{K}(Pz, z)$.

Теперь предположим, что выполнено (1.2). Тогда по лемме 1.1 найдется точка $z \in X \setminus M$ такая, что

$$x \in \mathring{K}(P_M z, z) \quad \text{и} \quad \dim J(z) = 0,$$

т.е. $P_M z$ – достижимая точка шара $B(z, \rho(z, M))$. Но в этом случае по предположению точка $P_M z$ является точкой гладкости шара $B(z, \rho(z, M))$ и, следовательно, конус $\mathring{K}(P_M z, z)$ является открытым полупространством, граница которого – искомая гиперплоскость – отделяет точку x от множества M.

Если же существует негладкая достижимая точка шара B, то тогда пространство X содержит невыпуклое чебышёвское множество – это утверждение известно для пространств любой конечной размерности (см. А. Брондстед [147], В. И. Бердышев [32]). Теорема 1.1 доказана. $\square$

1.2. Структура дополнения к чебышёвским множествам и солнцам. Структура дополнения к чебышёвским множествам и солнцам и, в частности, задача о числе компонент связности множества, изучались в работах А. Р. Алимова [119], [120], [122], [4]. Легко проверить, что дополнение к ограниченному солнцу всегда связно (ср. А. Л. Браун [155; § 1.4.2]). В конечномерном пространстве всякое чебышёвское множество является солнцем (см., например, [50]) и, следовательно, дополнение к ограниченному чебышёвскому множеству связно. Интересно также отметить, что задача о структуре дополнения к чебышёвским множествам и солнцам имеет связь с проблемой выпуклости чебышёвских множеств (см. теоремы 1.C, 1.1 и 1.5).

Напомним, что точки $s_1, \dots, s_n \in S$ называются *попарно далекими* [119] (или образующими антиподальное семейство [143; § 9.11]), если для тел $B_i = B - s_i$, $i = 1, \dots, n$, выполнены условия

$$0 \in B_i, \quad B_i \cap \operatorname{int} B_j = \varnothing, \qquad i, j = 1, \dots, n, \tag{1.3}$$

т.е. сдвиги B_i тела B не пресекаются внутренностями и имеют общую точку. В симметричном случае условие (1.3) эквивалентно тому, что $\|s_i - s_j\| = 2$, $i \neq j$ (см., например, [143; § 9.11]).

Обозначим:

- $k(B)$ – мощность максимального антиподального семейства шара B (максимальное число неперекрывающихся сдвигов шара B, имеющих общую точку); в конечномерном X число $k(B)$ всегда конечно;
- $k_{\mathrm{exp}}(B)$ – мощность максимального антиподального семейства шара B, состоящего из *достижимых* точек;
- $k_{\mathrm{act,exp}}(B \,|\, M)$ – максимальное число *M-действующих* достижимых попарно далеких точек сферы S (для фиксированного множества M); здесь напомним, что для данного непустого множества $M \subset X$ точка $s \in S$ называется *M-действующей* (здесь буква “M” означает рассматриваемое множество M), если $s \in (P_M x - x)/\rho$ для некоторого $x \notin M$, где $\rho = 1/\rho(x, P_M x)$.

Достаточно очевидно, что если $\dim X = n < \infty$, то

$$\begin{gathered} 2 \leqslant k_{\mathrm{exp}}(B) \leqslant k(B) \leqslant 2^{\dim X}, \\ k_{\mathrm{act,exp}}(B \,|\, M) \leqslant k_{\mathrm{exp}}(B) \ \text{ для любого } M \subset X; \end{gathered} \tag{1.4}$$

причем оценка сверху в первом неравенстве достигается в том и только в том случае, если B есть n-мерный параллелепипед [119], [143;

Theorem 9.11.1]. Например, если B – единичный шар пространства $\mathbb{R}^n$ с обычной евклидовой нормой, то $k(B) = k_{\exp}(B) = 2$; если B – аффинный правильный шестиугольник или треугольник на плоскости, то $k(B) = k_{\exp}(B) = 3$; если же $B \subset \mathbb{R}^3$ – "*игральная кость*" (трехмерный куб со сглаженными вершинами), то $k(B) = 4$, в то время как $k_{\exp}(B) = 2$.

В задаче о числе компонент связности дополнений чебышёвских множеств и солнц получены следующие результаты. Теорема 1.2 установлена в [119], теорема 1.3 содержится в [122] и [4], теорема 1.4 доказана в [120], [122], теорема 1.5 – в [4] (теоремы 1.2 и 1.4 приведены для полноты изложения и не включаются в результаты диссертации).

Характеризация пространств (не обязательно конечномерных), содержащих солнце с заданным количеством компонент связности в дополнении, дается следующей теоремой (Алимов [119]; данный результат не включается в диссертацию).

Теорема 1.2. *Пусть X – линейное нормированное или несимметрично нормированное пространство, ν – кардинальное число. Для того, чтобы в X существовало солнце с ν компонентами связности дополнения необходимо и достаточно, чтобы $k(B) \geqslant \nu$.*

Следующая теорема (Алимов [122], [4]) дает ответ на вопрос о числе компонент связности дополнения к строгому солнцу в конечномерном пространстве. Ответ на аналогичную задачу для чебышёвских множеств дается в теоремах 1.4, 1.5 (Алимов [4]; теорема 1.4 не включается в диссертацию и приводится для полноты изложения).

Теорема 1.3. *Пусть X – линейное нормированное или несимметрично нормированное пространство, $\dim X < \infty$. Пусть также ν – натуральное число. Для того, чтобы в X существовало строгое солнце с ν компонентами связности дополнения необходимо и достаточно, чтобы $k(B) \geqslant \nu$.*

Теорема 1.4. *Пусть X – линейное нормированное или несимметрично нормированное пространство, $\dim X = n < \infty$. Пусть $\nu \in \{1, \dots, k_{\exp}(B)\}$. Тогда в X найдется чебышёвское множество с ν компонентами связности дополнения.*

Теорема 1.5. *Пусть X – линейное нормированное или несимметрично нормированное пространство, $\dim X = n < \infty$. Предположим,* *что выполнено условие Брауна* $[\![\mathrm{F}_{n-1}]\!]$ *или* $n \leqslant 4$. *Предположим также, что* $M \subset X$ – *чебышёвское множество в* X, *дополнение к которому состоит из* ν *компонент связности. Тогда* $k_{\mathrm{act,exp}}(B \mid M) \geqslant \nu$. *В частности*, $k_{\exp}(B) \geqslant \nu$.

Нам потребуется следующий вспомогательный результат.

Лемма 1.2. *Пусть* X – *линейное нормированное или несимметрично нормированное пространство*, $\dim X = n < \infty$ *и пусть* $M \subset X$ – *чебышёвское множество. Предположим, что выполнено одно из следующих утверждений*:

1) $n \leqslant 4$;
2) *выполнено* $[\![\mathrm{F}_{n-1}]\!]$;
3) M *выпукло*.

Тогда найдется достижимая M*-действующая точка* $s \in S$.

Замечание 1.2. Для любого натурального $n \geqslant 3$ найдутся *негладкое* линейное нормированное пространство X размерности n и строгое солнце $M \subset X$ такие, что единичная сфера пространства X не содержит M-действующих достижимых точек. В качестве единичного шара искомого пространства можно взять n-мерный куб со сглаженными вершинами (“игральную кость”), а в качестве строгого солнца M – гиперплоскость, параллельную любой из гиперграней куба.

Доказательство леммы 1.2. Если множество M выпукло, то существование достижимой M-действующей точки $s \in S$ доказано в [120; предложение 6]. Если выполнено 1) или 2), то нужное нам утверждение следует из леммы 1.1. Действительно, пусть $x \notin M$. Если выполнено (1.2), то по лемме 1.1 найдется точка $z \notin M$ такая, что $P_M z \in \exp B(z, \rho(z))$, т.е. точка $\tau(z) \in S$ – искомая достижимая M-действующая точка.

Если же условие (1.2) не выполнено, то это означает, что найдется точка $z \notin M$, такая, что достижимая грань $\mathrm{Exp}_{B(z,\rho(z))}(P_M z)$ шара $B(z, \rho(z))$ содержит достижимую точку z. Но тогда по лемме 1.A точка $P_M z$ является ближайшей точкой к точке $z^* = z + P_M z - z \in J(z)$. А из того, что z – достижимая точка шара $B(z, \rho(z)$ следует, что $P_M z$ – достижимая точка шара $B(z^*, \rho(z^*))$. Итак, $\tau(z^*)$ – искомая достижимая M-действующая точка. $\square$

Доказательство теоремы 1.5. В силу (1.4) имеем $\nu \leqslant 2^n$. Если $\nu = 1$, то неравенство $k_{\mathrm{act,exp}}(B \mid M) \geqslant 1$ следует из леммы 1.2.

Предположим, что $\nu \geqslant 2$ и пусть $\Omega_1, \dots, \Omega_\nu$ – компоненты связности множества $X \setminus M$. Для $i \in \{1, \dots, \nu\}$ положим

$$M_i = X \setminus \Omega_i = M \cup \{\Omega_i \mid 1 \leqslant j \leqslant \nu,\ j \neq i\}.$$

Ясно, что каждое из M_i также является чебышёвским множеством, при этом для каждого $x \in \Omega_i$ имеем $P_M x = P_{M_i} x$ ($i = 1, \dots, \nu$). Для каждого i, применяя лемму 1.2, находим M_i-действующую точку $s_i = \tau(x_i) \in S$ (которая также является M-действующей точкой), $x_i \in \Omega_i$. Окончательно, в [120; лемма 6] доказано, что точки $s_1, \dots, s_\nu$ являются попарно далекими. Теорема 1.5 доказана. $\square$

Доказательство теоремы 1.3. Если $M \subset X$ – строгое солнце с ν компонентами связности в дополнении, то $k(B) \geqslant \nu$ по теореме 1.2.

Обратно, предположим, что $k(B) \geqslant \nu$. Нам нужно построить строгое солнце в X с ν компонентами связности в его дополнении. По теореме 1.2 найдутся ν попарно далеких точек $s_1, \dots, s_\nu \in S$. Лемма 2 из [120] утверждает, что точки s_i, $i = 1, \dots, \nu$, могут быть выбраны экстремальными точками сферы S. По [119] множество

$$X \setminus \bigcup_{i=1,\dots,\nu} \mathring{K}(0, -s_i)$$

является солнцем в X. Если для некоторого i точка s_i является достижимой точкой S, то тогда лемма 5 из [120] утверждает, что найдется множество $M_i = D_i \subset \mathring{K}(0, -s_i)$ такое, что множество $X \setminus D_i$ является чебышёвским (и, конечно, строгим солнцем).

Предположим, что для некоторого i точка s_i является экстремальной, но не достижимой точкой шара B. Обозначим посредством K_i замыкание конуса $\mathring{K}(0, -s_i)$. Точка s_i также не является достижимой точкой конуса K_i. Это влечет, что линейная размерность d конуса (т.е. размерность максимального аффинного подпространства, содержащегося в K_i) отлична от нуля. Посредством H обозначим подпространство линейности конуса K_i, т.е., $H = \{x \mid x + K = K\}$, $\dim H = d$. Пусть $H^\perp$ – подпространство в $\mathbb{R}^n$ (здесь $n := \dim X$), ортогональное к H. Так как $K_i^\perp := K \cap H^\perp$ – выпуклый замкнутый конус, то из определения числа d следует, что 0 – достижимая точка конуса $K_i^\perp$. Следовательно, 0 – достижимая точка шара $B^\perp := B(-s_i, 1) \cap H^\perp$ пространства $H^\perp$, и, по вышеупомянутой лемме 5 из [120], найдется выпуклое множество $D_i^\perp \subset K_i^\perp$ такое, что множество $H^\perp \setminus H^\perp D_i^\perp$ является чебышёвским множеством в $H^\perp$. Теперь определим

$$D_i = \{D_i^\perp + x \mid x \in H\} \subset K_i. \tag{1.5}$$

То, что $X \setminus \operatorname{int} D_i$ является строгим солнцем в X немедленно следует из (1.5) и определений D_i, H и $H^\perp$.

Теперь докажем, что множество $M = X \setminus \cup_{i=1,\dots,\nu} \operatorname{int} D_i$ является строгим солнцем в X. По доказанному выше, каждое множество вида $X \setminus \operatorname{int} D_i$ является строгим солнцем в X. Так как для разных i, j пересечение $\mathring{K}(0, -s_i) \cap \mathring{K}(0, -s_j)$ пусто, то из включения $D_i \subset \mathring{K}(0, -s_i)$ вытекает, что $D_i \cap D_j = \varnothing$, $i \neq j$. Это влечет, что множество

$$X \setminus \bigcup_{i=1,\dots,\nu} \operatorname{int} D_i$$

является строгим солнцем в X с ν компонентами связности в дополнении. Теорема 1.3 доказана. □

Обозначим:

- $\widehat{\mathrm{ch}}(B) = \sup\{\nu \mid$ в пространстве $X = X_B$ существует чебышёвское множество с ν компонентами связности дополнения$\}$;
- $\hat{\mathrm{s}}(B) = \sup\{\nu \mid$ в пространстве $X = X_B$ существует солнце с ν компонентами связности дополнения$\}$;
- $\widehat{\mathrm{ss}}(B) = \sup\{\nu \mid$ в пространстве $X = X_B$ существует строгое солнце с ν компонентами связности дополнения$\}$.

Из теорем 1.2–1.5 вытекает следующий результат.

Теорема 1.6. *Пусть X – линейное нормированное или несимметрично нормированное пространство. Тогда*:

a) $\hat{\mathrm{s}}(B) = k(B)$;
b) *если* $\dim X < \infty$, *то* $\widehat{\mathrm{ss}}(B) = k(B)$;
c) *если* $\dim X = n < \infty$ *и если выполнено условие Брауна* $[\![\mathrm{F}_{n-1}]\!]$ *или* $n \leqslant 4$, *то* $\widehat{\mathrm{ch}}(B) = k_{\exp}(B)$.

1.3. Аппроксимативные свойства множеств, содержащихся в подпространстве. Выпуклость чебышёвских множеств, содержащихся в подпространстве. Рассматривается задача о выпуклости чебышёвского множества M в линейном нормированном или несимметрично нормированном пространстве $(X, \|\cdot\|)$ при дополнительном условии $M \subset H$, где H – подпространство в X. Пусть B – единичный шар в X. Устанавливается, что если $|\cdot|_{H,\theta}$ – несимметричная норма на H, определяемая функционалом Минковского множества $(B-\theta)\cap H$ относительно 0, где $\|\theta\| < 1$ – произвольно, то M – чебышёвское множество в $(H, |\cdot|_{H,\theta})$ при любом выборе θ. Исходя из этого утверждения даются достаточные признаки и необходимые признаки выпуклости чебышёвских множеств M и ограниченных чебышёвских множеств M в X при условии $M \subset H$.

Ниже мы считаем, что B – единичный шар относительно некоторой фиксированной несимметричной нормы (см. определение несимметричной нормы на стр. 17) на конечномерном пространстве X (иными словами, B – выпуклое замкнутое ограниченное тело в X, $0 \in \operatorname{int} B$. Как обычно, обозначим $\mathring{B} = \operatorname{int} B$.

Пусть H – подпространство в X и пусть $\theta \in \mathring{B}$. Положим

$|\cdot|_\theta$ – несимметричная норма на X, задаваемая функционалом Минковского тела $\mathring{B} - \theta$ относительно точки 0;
$|\cdot|_{H,\theta}$ – несимметричная норма на H, индуцированная несимметричной нормой $|\cdot|_\theta$.

Шар, сферу с центром x и радиусом r и т. п. объекты относительно несимметричной нормы $|\cdot|_\theta$ обозначим $B_\theta(x,r)$, $S_\theta(x,r)$ и т. д.; подобным образом нижний индекс у некоторого объекта показывает, относительно какой (несимметричной) нормы он определяется.

Предложение 1.1. *Несимметричные нормы $\|\cdot\|$ и $|\cdot|_\theta$ эквивалентны при любом выборе $\theta \in \mathring{B}$, причем*

$$\begin{aligned} &B_\theta(0,r) \subset B(0,1) \iff 0 < r \leqslant (1 + \|-\theta\|)^{-1}, \\ &B(0,R) \subset B_\theta(0,r) \iff 0 < R \leqslant r(1 - \|\theta\|). \end{aligned} \tag{1.6}$$

Кроме того, при фиксированном H несимметричные нормы $|\cdot|_{H,\theta}$ эквивалентны на H для любого $\theta \in \mathring{B}$.

Мы докажем это утверждение чуть ниже.

Пусть $\operatorname{Hom}_x^k(\cdot)$ – гомотетия с центром $x \in X$ и коэффициентом $k \geqslant 0$.

Следующее утверждение вполне понятно.

Предложение 1.2. *Пусть* $\omega \in B(y,r)$, $k \geqslant 0$. *Тогда*

$$\mathrm{Hom}^k_\omega(B(y,r)) = B(\omega + k(y-\omega), kr). \tag{1.7}$$

Для линейных нормированных пространств следующий факт широко известен (см., например, Власов [50; предложение 0.2]). На случай несимметрично нормированных пространств он переносится без изменений:

$$\mathring{B}(x,r) \subset \mathring{B}(x',r') \iff \|x-x'\| \leqslant r'-r, \qquad x,x \in X,\ \ r,r' \geqslant 0. \tag{1.8}$$

Доказательство предложения 1.1. По определению $B_\theta(0,1) = B(-\theta,1)$. Далее,

$$B_\theta(0,r) = \mathrm{Hom}^r_0(B_\theta(0,1)) = \mathrm{Hom}^r_0(B(-\theta,1)) = B(-r\theta,r),$$

где последнее равенство получено из (1.7). Применяя (1.8), получим $B_\theta(0,r) = B(-r\theta,r) \subset B(0,1)$ тогда и только тогда, когда $r \leqslant 1/(1 + \|-\theta\|)$, что доказывает первое включение в (1.6). Второе включение в (1.6)доказывается аналогично. □

Следующее утверждение (Алимов [8]) на первый взгляд кажется достаточно неожиданным, однако оно вполне естественно в контексте несимметричных приближений. Наш вопрос о приближении множествами, лежащими в подпространстве, оказывается одной из таких задач: сечение симметричного тела (шара B) аффинным подпространством H вовсе не обязано быть симметричным! Это сечение определяет (несимметричную) норму на H, а множество $M \subset H$, если оно было чебышёвским множеством в X, по предложению 1.3 останется чебышёвским множеством в H.

Лемма 1.3. *Пусть M является, соответственно, чебышёвским множеством, солнцем или строгим солнцем в пространстве* $(X, \|\cdot\|)$. *Тогда*:

1. *Множество M обладает аналогичным свойством в пространстве* $(X, |\cdot|_\theta)$ *для любого* $\theta \in \mathring{B}$.
2. *Если* $(H, |\cdot|_{H,\theta})$ – *аффинное подпространство в X и $M \subset H$, то M обладает аналогичным свойством в пространстве* $(H, |\cdot|_{H,\theta})$ *для любого* $\theta \in \mathring{B}$.

Также аналогичный результат верен также для α-солнц и полусолнц (определение полусолнц дано в [50]).

В п. 2 леммы 1.3 существенным является условие $M \subset H$. Легко построить примеры, показывающие, что пересечение $M \cap H$, где M – чебышёвское множество в X, $M \not\subset H$, не обязано быть чебышёвским множеством в H.

Доказательство леммы 1.3. I. Пусть M – чебышёвское множество в пространстве $(X, \|\cdot\|)$. Установим, что множество M сохраняет это свойство в пространстве $(X, |\cdot|_\theta)$. Пусть $x \notin M$. По предложению 1.1 это влечет, что $\rho_\theta(x, M) := \inf_{z\in M} |z-x|_\theta > 0$. Без ограничения общности считаем $x = 0$, $\rho_\theta(x, M) = 1$.

Покажем, что $\rho(-\theta, M) = 1$. По определению $B_\theta(0,1) = B(-\theta, 1)$. Поэтому $\mathring{B}(-\theta,1)\cap M = \varnothing$. Предположим противное: $\mathring{B}(-\theta, 1+\delta)\cap M = \varnothing$ для некоторого $\delta > 0$. Из (1.7) имеем, что $B(-\theta, 1+\delta) = B_\theta(\delta\theta, 1+\delta)$. Поскольку $|-\theta|_\theta < 1 - \varepsilon_0$ при некотором $\varepsilon_0 > 0$, то (1.8) нам дает, что $B_\theta(0, 1+\varepsilon) \subset \mathring{B}(\delta\theta, 1+\delta)$ для всех $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. Получили противоречие, поскольку, с одной стороны, $B_\theta(0, 1+\varepsilon) \cap M = \varnothing$, а с другой стороны $1 = \rho_\theta(0, M) = \inf_{z\in M} |z|_\theta$.

По условию точка $-\theta$ имеет единственную ближайшую в $(X, \|\cdot\|)$ точку $\hat{y}$ из M. По доказанному выше, $\|\hat{y} + \theta\| = 1$. Теперь, так как $B_\theta(0,1) = B(-\theta, 1)$, то $\hat{y}$ – единственная ближайшая точка в норме $|\cdot|_\theta$ для 0, т.е. M – чебышёвское множество в пространстве $(X, |\cdot|_\theta)$.

Пусть теперь M – солнце в $(X, \|\cdot\|)$. Рассмотрим точку $x \notin M$. Выше мы установили, что $\rho_\theta(x, M) > 0$. Не ограничивая общности считаем $x = 0$ и $\rho_\theta(0, M) = 1$. Как и раньше имеем:

$$B_\theta(0,1) = B(-\theta,1), \qquad \mathring{B}(-\theta,1) \cap M = \varnothing, \qquad S(-\theta,1)\cap M \neq \varnothing.$$

Пусть $\hat{y}$ – солнечная точка в $(X, \|\cdot\|)$ для $-\theta$. По теореме 1.A опорный конус

$$\mathring{K}(\hat{y}, -\theta) = \bigcup_{\alpha>1} \mathring{B}\big(-\alpha\theta + (1-\alpha)\hat{y}, \alpha\big) \tag{1.9}$$

не пересекается с M. По предложению 1.2 имеем:

$$B\big(-\alpha\theta + (1-\alpha)\hat{y}, \alpha\big) = \\ = \mathrm{Hom}^\alpha_{\hat{y}}(B(-\theta,1)) = \mathrm{Hom}^\alpha_{\hat{y}}(B_\theta(0,1)) = B_\theta\big(\hat{y}(1-\alpha), \alpha\big).$$

Поэтому опорный конус

$$\mathring{K}_\theta(\hat{y}, 0) = \bigcup_{\alpha>1} \mathring{B}\big(\hat{y}(1-\alpha), \alpha\big)$$

не пересекается с M, что, по теореме 1.А влечет, что M – солнце в пространстве $(X, |\cdot|_\theta)$.

Таким же образом устанавливается утверждение леммы для строгих солнц.

II. Пусть H – аффинное подпространство в X. Для простоты считаем, что $0 \in H$. Пусть $M \subset H$ – чебышёвское множество в $(X, \|\cdot\|)$. Установим, что M сохраняет это свойство в пространстве $(H, |\cdot|_{H,\theta})$.

Пусть $x \in H \setminus M$. Зафиксируем $\theta \in \mathring{B}$. Поскольку M – чебышёвское множество в $(X, \|\cdot\|)$, то $\rho_{H,\theta}(0, M) > 0$.

Для простоты считаем $\rho_{H,\theta}(0, M) = 1$. Имеем: $\mathring{B}_{H,\theta}(0,1) \cap M = \varnothing$. По определению, $\mathring{B}_{H,\theta}(0,1) = \mathring{B}(-\theta, 1) \cap H$. Поскольку $M \subset H$, то $\mathring{B}(-\theta, 1) \cap M = \varnothing$. Далее, из того, что $\rho_{H,\theta}(0, M) = 1$, имеем $S(-\theta, 1) \cap M \neq \varnothing$, и, так как M – чебышёвское множество в $(X, \|\cdot\|)$, то это пересечение состоит из одной точки. Поэтому M – чебышёвское множество в $(H, |\cdot|_{H,\theta})$.

Для строгих солнц и α-солнц рассуждения аналогичны. Лемма 1.3 доказана. $\square$

Из леммы 1.3 и известного факта, что солнце в двумерном пространстве X является P-стягиваемым[2] множеством (см., например, Беренс и Хетцельт [136], Алимов [2], Браун [158] и теорему 4.23 ниже), мы получаем следующее утверждение (Алимов [8]; см. также теорему 4.10), обобщающее одну теорему Брауна ([158; § 4]), полученную им в частном случае для конечномерных симметричных нормированных пространств.

Теорема 1.7. *Пусть X – линейное несимметрично нормированное пространство, H – подпространство в X, $\dim H = 2$, и пусть $M \subset H$ – солнце в X. Тогда множество M P-стягиваемо и для любого $\varepsilon > 0$ существует непрерывная ε-выборка на M.*

Отметим, что ограниченно компактное (в частности, замкнутое множество в конечномерном пространстве) P-ацикличное множество в банаховом пространстве является солнцем [50; теорема 4.4] (ацикличные множества подробно рассматриваются ниже в § 3.1.3). Однако вопрос, будет

[2]Топологическое пространство X *стягиваемо* (в точку), если тождественное отображение этого пространства в себя гомотопно отображению в точку. Множество M *P-стягиваемо*, если $P_M x$ стягиваемо для любой точки $x \in X$.

ли произвольное солнце в произвольном конечномерном линейном нормированном пространстве X P-ацикличным (или хотя бы P-связным) до сих пор открыт (см. Карлов и Царьков [66], Браун [158]). Ответ на этот вопрос положителен в случае, когда X – гладкое пространство (тогда каждое солнце в X выпукло) и в случаях $X = \ell^\infty(n)$ (Беренс и Хетцельт [137]), $X = c_0$ (теорема 3.4), $X \in (BM)$ (теорема 4.10) или в случае $\dim X \leqslant 2$ (теорема 4.23).

Для исследования выпуклости чебышёвских множеств, содержащихся в подпространстве H пространства X, мы используем два подхода, в каждом из которых лемма 1.3 играет ключевую роль.

При *первом подходе*, рассматривая семейство сечений

$$(\mathring{B} - \theta) \cap H, \qquad \theta \in \mathring{B},$$

шара B подпространством H, нам достаточно найти хотя бы одно "хорошее" сечение $B_{H,\hat\theta}$ такое, что в пространстве $(H, |\cdot|_{H,\hat\theta})$ все чебышёвские множества выпуклы. Поскольку по лемме 1.3 множество M является чебышёвским в $(H, |\cdot|_{H,\hat\theta})$, то M будет выпукло. К примеру, это условие выпуклости будет выполнено, если сечение $B_{H,\hat\theta}$ гладкое в H.

Второй подход – интегрированный. Мы его умеем применять лишь при $\dim H = 2$. При таком подходе все сечения $B_{H,\theta}$ могут быть "плохими" – в каждом из пространств $(H, |\cdot|_{H,\theta})$ может существовать невыпуклое чебышёвское множество, – однако любое чебышёвское множество $M \subset H$ в X оказывается выпуклым.

Рассмотрим первый подход. Пусть $M \subset H$ – чебышёвское множество в X, $\theta \in \mathring{B}$. Рассечем шар $B - \theta$ подпространством H. Получится шар $B_{H,\theta}$ в подпространстве H; он определяет несимметричную норму $|\cdot|_{H,\theta}$ на H. По лемме 1.3 M – чебышёвское множество в $(H, |\cdot|_{H,\theta})$. Теперь для решения вопроса о выпуклости множества M можно воспользоваться любыми достаточными условиями выпуклости в H, которые имеются в нашем арсенале. Следующий результат установлен автором [8] (см. § 1.1).

Теорема 1.8. *Пусть $H \subset X$ – подпространство, $\dim H < \infty$, и пусть $M \subset H$ – чебышёвское множество в X. Предположим, что найдется такая точка $\theta \in X$, $\|\theta\| < 1$, что выполнено хотя бы одно из следующих условий*:

а) $\operatorname{sm} B_{H,\theta} = B_{H,\theta}$ (*т. е. любая точка сферы* $S_{H,\theta}$ *является ее точкой гладкости*);

б) *если* $\dim H = 3$ *или* 4, *то* $\exp B_{H,\theta} \subset \operatorname{sm} B_{H,\theta}$ (*т. е. любая достижимая точка шара* $B_{H,\theta}$ *является его точкой гладкости*).

Тогда множество M *выпукло.*

Аналогичный результат можно сформулировать для солнц и α-солнц M в пространстве X, лежащих в некотором подпространстве $H \subset X$:

> *солнце* M *выпукло, если шар* B *можно так рассечь подпространством* H, *что сечение* $B_{H,\theta}$ *будет гладким множеством в* H ($\operatorname{sm} B_{H,\theta} = S_{H,\theta}$).

Утверждение а) теоремы 1.8 следует из того, что в конечномерном пространстве H с гладкой единичной сферой всякое чебышёвское множество выпукло, а б) следует из известного критерия выпуклости чебышёвского множества в пространстве размерности 3 или 4 (см. теорему 1.1).

Прежде, чем перейти к рассмотрению второго подхода, посмотрим, когда наша задача вырождена, т. е. когда в H содержатся только одноточечные чебышёвские множества M в X. Например, задача тривиальна, если $X = \ell^\infty(n)$, а H – подпространство в X, параллельное некоторой собственной грани F единичного куба B, $\dim H = \dim F$. Понятно, что в этом случае $M \subset H$ не может содержать более двух точек. Итак, зафиксировав H, $\dim H < \infty$, обозначим

$$\operatorname{tr}_H(S) = \{A \subset S \mid A = S \cap (H + \theta) \text{ для некоторого } \theta \in S\},$$

– "след" сдвигов подпространства H на единичной сфере S в $(X, \|\cdot\|)$. К примеру, если H – гиперплоскость, а $h \in X^*$ и $\operatorname{Ker} h = H$, то $\operatorname{tr}_H(S)$ состоит из двух достижимых граней сферы S^*, на которых h достигает максимума и минимума на S.

Итак, предположим, что

$$\operatorname{card} A = 1 \text{ для всякого } A \in \operatorname{tr}_H(S). \tag{1.10}$$

Это условие гарантирует, что в H всегда содержится нетривиальное чебышёвское множество в X. Действительно, рассмотрим произвольное строго выпуклое замкнутое подмножество $M_1 \subset H$ (здесь и ниже строгая выпуклость выпуклого множества понимается в классическом смысле – граница множества не содержит отрезков). Утверждение, что

M_1 – чебышёвское множество в $(H, |\cdot|)$, где $|\cdot|$ – произвольная несимметричная норма на H, является классическим. Из этого и из леммы 1.3 следует, что если $x \notin M_1$ и $\mathring{B}(x,r) \cap H \neq \varnothing$, то x имеет единственную ближайшую точку в M_1. А для остальных точек $x \notin M_1$ предыдущее утверждение выполнено в силу (1.10). Обратно, если в H содержатся нетривиальные чебышёвские множества M в X, то, понятно, $\max\{\dim A \mid A \in \mathrm{tr}_H(S)\} < \dim H$. Видно, что это условие и (1.10) не сходятся, однако здесь мы не ставим задачи характеризации подпространств H, которые содержат нетривиальное чебышёвское множество M в X.

Теперь напомним следующее обобщение задачи о выпуклости чебышёвских множеств с классического случая одного пространства на случай системы пространств, рассмотренное автором в [2; гл. 2] (см. также [46]).

Рассмотрим систему $\mathfrak{X} = \{(Y, \|\cdot\|_i)\}_{i\in I}$, где Y – действительное линейное пространство, $\dim Y < \infty$, $\|\cdot\|_i$ – несимметричная норма на Y $(i \in I)$, I – некоторое множество индексов. Множество $M \subset Y$ называется *чебышёвским относительно системы* $\mathfrak{X}$, если M является чебышёвским множеством в пространстве $(Y, \|\cdot\|_i)$ для любого $i \in I$. Если $\mathfrak{X}$ состоит только из одного пространства, то это определение совпадает с обычным определением чебышёвского множества.

Пусть $S_i = S_i(0,1)$ – единичная сфера i-го пространства $(Y, \|\cdot\|_i)$, $i \in I$. Система точек $\mathcal{P} := \{p_i \in S_i\}_{i\in I}$ называется *достижимой относительно* $\mathfrak{X}$, если для тела $W_{\mathfrak{X}} := \overline{\mathrm{conv}}(\cup_{i\in I}\{S_i - p_i\})$ точка 0 принадлежит границе тела $W_{\mathfrak{X}}$ и является достижимой; система точек $\mathcal{P}$ называется *гладкой*, если точка $0 \in \mathrm{bd}\, W_{\mathfrak{X}}$ является точкой гладкости тела $W_{\mathfrak{X}}$.

Автором [2; теорема 2.1] получена характеризация системы $\mathfrak{X}$ двумерных несимметрично нормированных пространств в которой всякое чебышёвское множество относительно $\mathfrak{X}$ выпукло (данный результат не включается в результаты диссертации).

Теорема 1.9. *Пусть $\mathfrak{X} = \{(Y, \|\cdot\|_i)\}_{i\in I}$ – система двумерных несимметрично нормированных пространств. Для того, чтобы каждое чебышёвское относительно $\mathfrak{X}$ множество было выпукло, необходимо и достаточно, чтобы каждая достижимая относительно $\mathfrak{X}$ система точек $\{p_i \in S_i\}_{i\in I}$ была гладкой.*

Оказалось, что понятие множества, чебышёвского относительно системы пространств, естественным образом возникает в задаче приближения множествами M, содержащимися в подпространстве H. Именно, сечения сдвигов $B-\theta$ единичного шара B подпространством H дают нужное нам семейство $\mathfrak{X} = \{(H, \|\cdot\|_{H,\theta})\}_{\theta \in \mathring{B}}$. В силу леммы 1.3 множество M является чебышёвским относительно системы пространств $\mathfrak{X}$. Следующий результат получен автором [7].

Теорема 1.10. *Пусть $H \subset X$ – подпространство*, $\dim H = 2$. *Предположим, что выполнено условие* (1.10). *Тогда следующие два условия эквивалентны*:

a) *любое чебышёвское множество $M \subset H$ в X выпукло*[3]

b) *любая достижимая относительно набора $\mathfrak{X} = \{(H, \|\cdot\|_{H,\theta})\}_{\theta \in \mathring{B}}$ система точек $\{p_\theta \in S_{H,\theta}\}_{\theta \in \mathring{B}}$ является гладкой.*

Доказательство теоремы 1.10. Рассуждаем от противного. Для доказательства a)⇒b) предположим, что каждое чебышёвское множество $M \subset H$ в X выпукло и что нашлась достижимая негладкая система точек $\mathcal{P} := \{p_\theta \in S_{H,\theta}(0,1)\}_{\theta \in \mathring{B}}$. Имеем: $0 \in \exp W_{\mathfrak{X}}$, $0 \notin \operatorname{sm} W_{\mathfrak{X}}$, поэтому найдутся две различные опорные прямые G_1 и G_2 к телу $W_{\mathfrak{X}}$ в точке 0, такие, что $G_i \cap W_{\mathfrak{X}} = \{0\}$ $(i = 1, 2)$. Для $i \in \{1, 2\}$ через G_i^+ обозначим замкнутое полупространство с границей G_i и не содержащее $W_{\mathfrak{X}}$. Пусть $M := G_1^+ \cup G_2^+$. По теореме 1.A множество M – солнце, а так как $G_i \cap W_{\mathfrak{X}} = \{0\}$, то M – чебышёвское множество в любом пространстве $(X, |\cdot|_{H,\theta}) \in \mathfrak{X}$. Из этого и из (1.10) вытекает, что M – чебышёвское множество в $(X, \|\cdot\|)$. Мы получили противоречие с исходной посылкой, поскольку M невыпукло.

Обратная импликация доказывается с использованием леммы 1.3 и полностью аналогична рассуждениям при доказательстве теоремы B из [2; стр. 56–58]. Теорема 1.10 доказана. □

1.4. Выпуклость ограниченных чебышёвских множеств, лежащих в подпространстве. В классическом случае задачи приближения произвольными множествами и задачи приближения ограниченными чебышёвскими множествами оказываются различными – удивительный факт, предугаданный С. Б. Стечкиным и установленный Царь-

[3]Напомним, что по (1.10) в подпространстве H всегда существуют неодноточечные чебышёвские множества в X.

ковым (см. [102], [104], [155], [158]). Царьков установил, в частности, что

$$\text{в конечномерном линейном нормированном пространстве всякое } \textit{ограниченное} \text{ чебышёвское множество (ограниченное } P\text{-ацикличное множество) выпукло тогда и только тогда, когда } \overline{\exp}\, S^* = S^*. \tag{1.11}$$

(Подробнее об ацикличных множествах см. § 3.1.3.)

Рассмотрим аналогичный вопрос о выпуклости ограниченных чебышёвских множеств M в X при условии $M \subset H$, H – гиперплоскость в X. Ниже, как обычно, $\operatorname{cl} A$ – замыкание множества A. Теорема 1.11 и следствие 1.1 получены автором [8].

Теорема 1.11. *Пусть* $\dim X < \infty$, $H = \operatorname{Ker} h \subset X$ *– гиперплоскость, и пусть* $M \subset H$ *– ограниченное чебышёвское множество в* X*. Предположим, что найдется* $\theta \in \mathring{B}$ *такое, что выполнено*

$$\operatorname{cl}\{\varphi \in S^*_{H,\theta} \mid \exists f \in \exp S^*,\ \exists \lambda = \lambda(f) > 0 \text{ такие, что } f|_H = \lambda \cdot \varphi\} = S^*_{H,\theta}, \tag{1.12}$$

где $S^*_{H,\theta}$ *– единичная сфера пространства, сопряженного к* $(H, |\cdot|_{H,\theta})$*. Тогда множество* M *выпукло.*

Следствие 1.1. *Пусть* $\dim X < \infty$, H *– гиперплоскость в* X *и пусть* $M \subset H$ *– ограниченное чебышёвское множество в* X*. Если хотя бы для одного из функционалов* $h_1, h_2 \in S^*$*, определяющих* H*, выполнено* $h_i \in \operatorname{int}_{S^*}(\overline{\exp S^*})$, $i = 1$ *или* 2, *то множество* M *выпукло.*

Прокомментируем эти утверждения. Результат Царькова (1.11) утверждает, в частности, что если "практически каждая" опорная гиперплоскость к сфере S содержит в пересечении с S ее точку гладкости, то любое ограниченное чебышёвское множество M в X выпукло. Аналогичным образом теорема 1.11 показывает, что каждое ограниченное чебышёвское множество $M \subset H$ в X выпукло, если для некоторого $\theta \in \mathring{B}$ для "практически каждой" гиперплоскости Γ в H, опорной к $S_{H,\theta}$, найдется гиперплоскость G в X, опорная к S, "параллельная" Γ и пересекающаяся с S по гладкой точке.

Следующая лемма достаточно интуитивно ясна: полукруг не выпуклый, следовательно, существуют гиперплоскости, отсекающие кусочки от концов полукруга; полусфера также не выпукла, и поэтому возможно отсечь гиперплоскостью от нее обод. Эти две ситуации являются типичными. Лемма 1.B получена Царьковым [102], см. также Браун [155].

Лемма 1.B. *Пусть* $M \subset X$, $\dim X < \infty$. *Если множество* M – *ограничено, замкнуто, невыпукло и* $X \setminus M$ *связно, то существуют открытое полупространство* $\mathring{G} \subset X$ *и множество* $\Sigma \subset \mathring{G} \cap M$ *такие, что*

(i) Σ *является относительной границей некоторого выпуклого множества и, следовательно,* Σ *гомеоморфно конечномерной сфере*;
(ii) Σ *является ретрактом* $\mathring{G} \cap M$.

Также нам понадобится следующий результат (см., например, Браун [155; p. 107]).

Лемма 1.C. *Пусть* $M \subset X$ – *чебышёвское множество с непрерывной метрической проекцией и* $x \in X$, $r > 0$. *Предположим, что* $B(x,r) \cap M \neq \varnothing$. *Тогда* $B(x,r) \cap M$ *есть ретракт шара* $B(x,r)$.

Замечание 1.3. Обобщение леммы 1.C на случай произвольных солнц в широком классе конечномерных нормированных пространств содержится в теореме 4.10.

Замечание 1.4. Автором получено обобщение характеризации Царькова (1.11) на случай произвольных конечномерных несимметрично нормированных пространств [20] (данный результат в диссертацию не включается).

Доказательство теоремы 1.11. Предположим, что множество M невыпукло. По лемме 1.3 M является чебышёвским множеством в $(H, |\cdot|_{H,\theta})$. Из того, что в конечномерном пространстве X чебышёвское множество является солнцем немедленно следует, что дополнение к чебышёвскому множеству в H связно, и поэтому, используя лемму 1.C, к M можно применить лемму 1.B. Выберем $\mathring{G}$ – полупространство в H и множество $\Sigma \subset \mathring{G} \cap M$ как в лемме 1.B. Без ограничения общности считаем $0 \in \operatorname{bd} \mathring{G}$. Выберем $\theta \in \mathring{B}$ таким образом, чтобы выполнялось (1.12).

Пусть $g \in S^*_{H,\theta}$ такой функционал, что $\operatorname{Ker} g = \operatorname{bd} \mathring{G}$ и $g(\Sigma) < 0$. По условию (1.12) для любого $\varepsilon > 0$ можно выбрать такой функционал $f \in \exp S^*$, что

$$\Sigma \subset \{z \mid f(z) < 0\} \quad \text{и} \quad (\lambda f)|_H \in \mathcal{O}_\varepsilon(g)$$

(т. е. $|\lambda f - g|_{H,\theta} < \varepsilon$), где константа $\lambda = \lambda(f)$ выбрана из (1.12).

Обозначим $F = \operatorname{Ker} f$, $\mathring{F} = \{z \in X \mid f(z) < 0\}$. Теперь из (1.12) следует, что если гиперплоскость F является опорной к некоторому шару $B(y,r)$ и $B(y,r) \subset \mathring{F}$, то пересечение $F \cap B(y,r)$ обязательно содержит некоторую точку гладкости v шара $B(y,r)$. Далее, поскольку $v \in \operatorname{sm} B(y,r)$, то определенный в (1.9) опорный конус $\mathring{K}(v,y)$ к шару $B(y,r)$ является открытым полупространством, очевидно, совпадающим с $\mathring{F}$. Поскольку в конечномерном пространстве чебышёвское множество является солнцем, то теорема 1.A нам дает, что $\mathring{K}(v,y) \cap M = \varnothing$. Выбирая α в (1.9) достаточно большим и обозначая

$$b = \mathring{B}(-\alpha v + (\alpha+1)y, (\alpha+1)\|y-v\|),$$

имеем

$$\Sigma \subset (b \cap M) \subset (\mathring{F} \cap M).$$

Итак, поскольку $\Sigma \subset b \cap M$, то по (ii) Σ – ретракт пересечения $b \cap M$, а по лемме F множество $M \cap b$ – ретракт шара b. Мы получили противоречие, поскольку по (i) Σ гомеоморфно конечномерной сфере, а конечномерная сфера не может быть ретрактом шара b (см., например, [111; § 7.4.21]). Теорема 1.11 доказана. $\square$

Утверждение теоремы 1.12 (Алимов [8]) восходит к одному результату Царькова [102], построившему на линейном пространстве X, $3 \leqslant \dim X < \infty$, норму $\|\cdot\|_T$, относительно которой всякое *ограниченное* чебышёвское множество в X выпукло, в то время как существует невыпуклое неограниченное чебышёвское множество в X.

Теорема 1.12. *Пусть* $\dim X < \infty$, $H \subset X$ *– гиперплоскость,* $\dim H \geqslant 3$. *Тогда на* X *существует норма, относительно которой любое ограниченное чебышёвское множество* $M \subset H$ *в* X *будет выпукло, однако найдется неограниченное невыпуклое чебышёвское множество* $M_1 \subset H$ *в* X.

Доказательство теоремы 1.12. Рассмотрим на H норму $\|\cdot\|_T$, построенную Царьковым в [102; стр. 85] (см. также [101]). Царьков показал, что любое ограниченное чебышёвское множество в $(H, \|\cdot\|_T)$ выпукло и построил пример невыпуклого неограниченного чебышёвского множества M_1 в $(H, \|\cdot\|_T)$. Используя этот пример, распространим норму $\|\cdot\|_T$ с H на X, оставив множество $M_1 \subset H$ без изменения.

Рассмотрим на X, отождествив его с $H\oplus\mathbb{R}$, норму $\|\cdot\|_C$, определяемую функционалом Минковского следующего тела C (бипирамиды):

$$C = \operatorname{conv}\{(0,1),\,(0,-1),\,(B_T,0)\},$$

где B_T – единичный шар в H в норме $\|\cdot\|_T$.

В [80; замечание 8.4] показано, что любое сечение тела C аффинной гиперплоскостью $H+(0,\alpha)$, $|\alpha|\leqslant 1$, есть сдвиг гомотетичного образа $\operatorname{Hom}_0^{1-|\alpha|}(B_T)$ шара B_T с коэффициентом $1-|\alpha|$ и центром в 0:

$$C\cap(H+\alpha) = \operatorname{Hom}_0^{1-|\alpha|}(B_T)+(0,\alpha) = (1-|\alpha|)B_T+(0,\alpha),\quad |\alpha|\leqslant 1. \tag{1.13}$$

Теперь пусть $M\subset H$ – произвольное чебышёвское множество в $(H,\|\cdot\|_T)$. Рассмотрим произвольную точку $x\in X\setminus M$. Пусть

$$r=\rho_C(x,M):=\inf_{z\in M}\|z-x\|_C$$

($r>0$, поскольку M замкнуто). Имеем два случая.

Пусть сначала $\mathring{B}_C(x,r)\cap H\neq\varnothing$. По (1.13) сечение $B_C(x,r)\cap H$ гометично шару B_T, поэтому, так как M – чебышёвское множество в $(H,\|\cdot\|_T)$, точка x имеет единственную ближайшую из M в норме $\|\cdot\|_C$. Теперь пусть $\mathring{B}_C(x,r)\cap H=\varnothing$. Поскольку $\dim H<\infty$, то $S_C(x,r)\cap H\neq\varnothing$. В силу определения бипирамиды C, это пересечение одноточечно и, понятно, принадлежит M. В этом случае x также имеет единственную ближайшую точку из M.

Итак, M_1 лежит в H и является невыпуклым неограниченным чебышёвским множеством в $(X,\|\cdot\|_C)$. С другой стороны, из цитированного в начале доказательства теоремы 1.12 утверждения Царькова для $(H,\|\cdot\|_T)$ следует, что любое ограниченное чебышёвское множество в $(X,\|\cdot\|_C)$, которое лежит в H, выпукло. Отметим, что в H содержатся нетривиальные ограниченные чебышёвские множества M в X (выпуклые, по доказанному). В качестве примера M можно взять произвольное строго выпуклое ограниченное подмножество в H. Теорема 1.12 доказана. $\square$

Глава 2. Теорема Банаха–Мазура об универсальности для пространств с несимметричным расстоянием

В данной главе рассматриваются классические линейные нормированные пространства и их обобщения – линейные пространства с несимметричной нормой и пространства с несимметричной метрикой. В § 2.1 дается определение линейного пространства с несимметричной нормой и приводится ряд их свойств. В § 2.2 приводятся теоремы Банаха–Мазура об универсальности пространства $C[0,1]$ в классическом случае для линейных нормированных пространств (теорема 2.C ниже) и для метрических пространств (теоремы 2.A и 2.B). В § 2.3 показывается (теорема 2.1), что каждое метризуемое сепарабельное линейное несимметрично нормированное пространство $(X, \|\cdot\|)$ может быть изометрично изоморфно вложено в классическое $C[0,1]$ как аффинное линейное многообразие (т.е. как сдвиг линейного многообразия); иными словами, единичный шар пространства X можно представить как пересечение единичного шара пространства $C[0,1]$ с некоторым *аффинным* линейным многообразием. При этом оказывается, что *неметризуемое* несимметрично нормированное пространство X никогда нельзя вложить в $C([0,1]^{\mathfrak{a}})$ ни при каком $\mathfrak{a}$. Для пространств с несимметричной метрикой в § 2.4 показано, что каждое такое пространство плотности $\mathfrak{a}$ изометрично части пространства $C([0,1]^{\mathfrak{a}})$ с преднормой $p(f) = \max\{0, \|f_+\|_C\}$ (теоремы 2.2 и 2.3).

2.1. Линейные пространства с несимметричной нормой. Напомним необходимые определения. Пусть X – действительное линейное пространство.

Несимметричная норма (иногда – *квазинорма*) на X это неотрицательный сублинейный функционал $\|\cdot\|$ такой, что для всех $x, y \in X$

1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
2) $\|\alpha x\| = \alpha\|x\|$ для всех $\alpha \geqslant 0$;
3) $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

Понятно, что если $B \subset X$ – выпуклое алгебраически ограниченное множество, содержащее начало координат в своем ядре, то его функционал Минковского $\|\cdot\|_B$ является несимметричной нормой:

$$\|x\|_B := \sup\{\sigma \geqslant 0 \,|\, x \notin \sigma B\}, \quad x \neq 0, \quad \|0\| = 0.$$

Обратно, если $\|\cdot\|$ – несимметричная норма на X, то шар $\{x \in X \mid \|x\| \leqslant 1\}$ – выпуклое алгебраически ограниченное множество, содержащее начало координат в своем ядре.

Для (несимметрично) нормированного пространства X и $x \in X$, $r > 0$ положим

$B(x,r) = \{y \in X \mid \|y - x\| \leqslant r\}$ – шар с центром x и радиусом r;
$\mathring{B}(x,r) = \{y \in X \mid \|y - x\| < r\}$ – открытый шар с центром x и радиусом r.

Основная T_1-топология (обозначим ее τ) на X задается базой открытых шаров $\{\mathring{B}(x,r)\}$, $x \in X$, $r > 0$. Как несложно заметить, она удовлетворяет первой аксиоме счетности (т.е. в X всякая точка имеет счетную базу окрестностей). Локальную базу пространства X в любой его точке x образуют открытые шары $\mathring{B}(x, 1/n)$. Поэтому [21; гл. 4] в таких пространствах точка x тогда и только тогда является точкой прикосновения множества $M \subset X$, когда имеется последовательность (x_n) точек множества M, сходящаяся к x, т. е. $\|x_n - x\| \to 0$ (вообще говоря, в несимметричном случае эта сходимость не влечет $\|x - x_n\| \to 0$).

Наряду с топологией τ на X могут быть введены другие естественные топологии, например, топология τ^{-1}, задаваемая базой шаров $\mathring{B}^{-1}(x,r) := \{y \in X \mid \|x - y\| < r\}$ – отражениями шаров $\mathring{B}(-x,r)$, и топология τ_{sym}, задаваемая предбазой $\{\mathring{B}(x,t),\ \mathring{B}^{-1}(x',r')\}$. Легко видеть, что топология τ_{sym} задается естественной нормой $\|x\|_{\mathrm{sym}} = \max\{\|x\|, \|{-x}\|\}$ пространства X.

В дальнейшем, говоря о топологии на несимметрично нормированном пространстве X мы, если не оговорено противное, будем иметь в виду топологию τ. В общем случае топологии τ и τ^{-1} различны. Это видно из следующего примера.

Пример. Определим несимметрично нормированное пространство $CL^1[0,1]$ следующим образом:

$$CL^1[0,1] := \{f \in C[0,1] \mid \|f\| := \|f_+\|_{C[0,1]} + \|f_-\|_{L^1[0,1]}\},$$

где $f_+(t) := \max\{f(t), 0\}$, $f_-(t) := \min\{f(t), 0\}$, $t \in [0,1]$. Легко видеть, что в этом пространстве

$$\mathring{B}^{-1}(0,r) \not\subset \mathring{B}(0,1) \quad \text{ни при каком } r > 0. \tag{2.1}$$

Действительно, при $t \in [0,1]$ функция $g(t) = (-t/r^3 + 1/r)_+$ лежит в $\mathring{B}^{-1}(0,r)$ для всех $0 < r < 1/\sqrt{2}$, но $\|g(t)\|_{C[0,1]} = 1/r \to +\infty$ при $r \to 0$. Как следствие, пространство $CL^1[0,1]$ неметризуемо (в топологии τ и, следовательно, в топологии τ^{-1}).

Пусть X – несимметрично нормированное пространство. Легко видеть, что метризуемость X эквивалентна его нормируемости (т. е. существованию на X нормы, определяющей топологию эквивалентную исходной). И в этом (и только в этом) случае топология τ совпадает с топологией τ^{-1}.

Ввиду важности данный результат сформулируем отдельно.

Предложение 2.1. *Пусть* $(X, \|\cdot\|)$ *– линейное пространство с несимметричной нормой. Тогда следующие условия эквивалентны*:

1) X *метризуемо*;
2) X *нормируемо* (*на* X *существует норма*, *определяющая топологию*, *эквивалентную исходной топологии* τ);
3) *топологии* τ *и* τ^{-1} *совпадают на* X. *Это*, *в свою очередь*, *эквивалентно следующему*:
   3.1) *топологии* τ *и* τ_{sym} *совпадают*;
   3.2) *топологии* τ^{-1} *и* τ_{sym} *совпадают*;
   3.3) *несимметричная норма* $\|\cdot\|$ *и норма* $\|\cdot\|_{\mathrm{sym}}$ *эквивалентны.*

Несимметричная преднорма $p(x) : X \to \mathbb{R}_+$ на линейном пространстве X определяется аналогично несимметричной норме, за исключением аксиомы равенства нулю: для несимметричной преднормы может выполняться $p(x) = 0$ при $x \neq 0$.

Несимметрично преднормированное линейное пространство $C([0,1],1,0)$ введено П. А. Бородиным в [39] (см. также С. Кобзаш [169; § 1.1.5]):

$$C([0,1],1,0) := \{f \in C[0,1] \,|\, p(f) := \|f_+\|_{C[0,1]}\}.$$

Таким образом, $p(f)$ – несимметричная преднорма функции f.

2.2. Теорема Банаха–Мазура об универсальности. Классический случай. В 1923 г. П. С. Урысон доказал, что существует "универсальное сепарабельное метрическое пространство", т.е. такое, которое содержит части, изометричные любому сепарабельному метрическому пространству. Впоследствии С. С. Банах и С. М. Мазур показали, что одним из таких универсальных пространств является пространство $C[0,1]$. Напомним две классические теоремы Банаха–Мазура об универсальности пространства $C[0,1]$ среди сепарабельных метрических пространств (теорема 2.A) и среди линейных нормированных пространств (теорема 2.C). (Одним из автором теоремы 2.A также называют М.-Р. Фреше; см., например, [182; Corollary 5.9]..

Теорема 2.A (Банах–Мазур). *Всякое сепарабельное метрическое пространство* (X,ρ) *изометрично части пространства* $C[0,1]$.

Иными словами, существует отображение $\varphi: X \to C[0,1]$ (не обязательно линейное) такое, что $\rho(x,y) = \|\varphi(x) - \varphi(y)\|_{C[0,1]}$ для всех $x, y \in X$.

Аналогом теоремы 2.A для несепарабельных метрических пространств является теорема 2.B, принадлежащая М. Кляйберу и У. Дж. Первину [219]).

Напомним ([111; стр. 53], [21; гл. 4, § 4]), что *плотность пространства* X определяется как наименьшее кардинальное число $d(X)$ вида $|A|$, где A – всюду плотное подмножество пространства X. Если $d(X) \leqslant \aleph_0$, то говорят, что пространство сепарабельно.

Теорема 2.B. *Пусть* $\mathfrak{a}$ *– бесконечный кардинал. Всякое метрическое пространство* X *плотности* $\mathfrak{a}$ *изометрично части пространства* $C([0,1]^{\mathfrak{a}})$.

Здесь, для бесконечного кардинала $\mathfrak{a}$, пространство $C([0,1]^{\mathfrak{a}})$ определяется как пространство непрерывных функций на тихоновском кубе $[0,1]^{\mathfrak{a}}$ из $\mathfrak{a}$ замкнутых интервалов $[0,1]$, наделенном равномерной метрикой. Поскольку плотность пространства $C([0,1]^{\mathfrak{a}})$ (для $\mathfrak{a} \geqslant \aleph_0$) в топологии равномерной нормы равна $\mathfrak{a}$ (см. [219]), то пространство X плотности $\mathfrak{a}$ не может быть изометрично вложено в $C([0,1]^{\mathfrak{b}})$ при $\mathfrak{b} < \mathfrak{a}$.

Для случая линейных нормированных пространств имеется более сильное утверждение, чем теорема 2.A – вложение можно сделать изоморфизмом.

Теорема 2.C (Банах–Мазур). *Всякое сепарабельное линейное нормированное пространство* X *изометрически изоморфно линейному многообразию пространства* $C[0,1]$. *Если* X *банахово, то* X *изометрически изоморфно подпространству пространства* $C[0,1]$.

Аналогом теоремы 2.C для несепарабельных линейных нормированных пространств является следующий результат (см., например, [235; следствие 2.6.22]), вытекающий из теоремы Банаха–Алаоглу о w^*-слабой компактности шара B^* сопряженного к линейному нормированному пространству X, хаусдорфова топология на B^* индуцирована w^*-слабой топологией пространства X^*.

Теорема 2.D. *Пусть X – линейное нормированное пространство. Тогда X изометрически изоморфно аффинному линейному многообразию пространства $C(B^*)$. Дополнительно, если X банахово, то X изометрически изоморфно подпространству в $C(B^*)$.*

Заметим, что хаусдорфов компакт B^* гомеоморфен тихоновскому кубу $[0,1]^{|B|}$, где B – единичный шар пространства X, $|B|$ – его мощность.

2.3. Теорема Банаха–Мазура об универсальности для несимметрично нормированных пространств. Новое направление теория универсальных пространств получила в работе П. А. Бородина [39] (см. также [46], [168; § 1.1] и теорему 2.E ниже) – им найдено пространство, универсальное для линейных пространств с несимметричной нормой. Бородин [39] установил, что если $(X, \|\cdot\|)$ – линейное пространство с несимметричной нормой, сепарабельное относительно нормы $\|x\|_{\mathrm{sym}} = \max\{\|x\|, \|-x\|\}$, то оно изометрично изоморфно линейному многообразию пространства $C([0,1],1,0)$, где последнее есть линейное пространство непрерывных функций $f \in C[0,1]$, снабженное *пред*нормой

$$p(f) = \max\{0, \|f_+\|_{C[0,1]}\}, \quad f_+(t) := \max\{f(t), 0\}, \quad t \in [0,1].$$

Отметим, что $C([0,1],1,0)$ не является несимметрично нормированным пространством.

Теорема 2.E. *Всякое несимметрично нормированное пространство X, сепарабельное относительно нормы $\|x\|_{\mathrm{sym}} = \max\{\|x\|, \|-x\|\}$, изометрически изоморфно линейному многообразию пространства $C([0,1],1,0)$, т. е. существует такое линейное отображение $\varphi : X \to C[0,1]$, $x \mapsto \varphi_x$, что*

$$\|x\| = \max_{t\in[0,1]} \bigl(\varphi_x(t)\bigr)_+ = p(\varphi_x), \quad x \in X.$$

Также в [39] построен пример сепарабельного несимметрично нормированного пространства X, не сепарабельного относительно нормы $\|x\|_{\mathrm{sym}}$.

В следующей теореме (Алимов [6]) мы устанавливаем еще одно свойство универсальности единичного шара пространства $C[0,1]$ и показываем, что *метризуемые* сепарабельные несимметрично нормированные пространства X можно изометрически изоморфно вложить в классическое $C[0,1]$ как аффинное линейное многообразие; иными словами, единичный шар пространства X можно представить как пересечение единичного шара пространства $C[0,1]$ с некоторым линейным многообразием, пересекающим шар по внутренней точке. Из доказательства теоремы 2.1 будет следовать, что *неметризуемое* несимметрично нормированное пространство X никогда нельзя вложить в $C([0,1]^{\mathfrak{a}})$ ни при каком $\mathfrak{a}$.

Теорема 2.1. *Пусть $(X,\|\cdot\|)$ – линейное пространство с несимметричной нормой. Пространство $(X,\|\cdot\|)$ можно изометрически изоморфно вложить в $C[0,1]$ как аффинное линейное многообразие L в том и только в том случае, если X метризуемо и сепарабельно.*

Отметим, что, по предложению 2.1, если X – несимметрично нормированное пространство $(X,\|\cdot\|)$ метризуемо, то несимметричная норма $\|\cdot\|$ и норма $\|\cdot\|_{\mathrm{sym}}$ эквивалентны, поэтому неважно, относительно какой из несимметричных норм $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|_{\mathrm{sym}}$ требовать сепарабельность X.

Посредством $\mathring{b}_{C(Q)}$ (соответственно, $b_{C(Q)}$) обозначим открытый (соответственно, замкнутый) единичный шар пространства $C(Q)$ относительно равномерной нормы. В теореме 2.1 *изометричность* понимается в следующем смысле: существует точка $\theta \in \mathring{b}_{C[0,1]} \cap L$ такая, что функционал Минковского множества $b_{C[0,1]} \cap L$ относительно θ совпадает с функционалом Минковского шара B пространства X, т. е. с несимметричной нормой $\|\cdot\|$. Под *изоморфностью* отображения φ пространства X и линейного многообразия L мы понимаем линейность биекции $\varphi(x)-\theta$.

Замечание 2.1. Пусть $\theta \in \mathring{b}_{C[0,1]}$ и пусть L – аффинное линейное многообразие в $C[0,1]$, $\theta \in L$. Выпуклое множество $b_{C[0,1]} \cap L$ порождает функционал Минковского ψ в L относительно точки θ. Поскольку $\theta \in \mathring{b}_{C[0,1]}$, то любое несимметрично нормированное пространство $(X,\|\cdot\|)$, несимметричная норма $\|\cdot\|$ которого совпадает с ψ, обязано быть топологически эквивалентным некоторому линейному нормированному пространству. Это показывает существенность метризуемости X в теореме 2.1.

Отметим, что пространство $CL^1[0,1]$ сепарабельно относительно любой из топологий τ, τ^{-1}, τ_{sym}. Поэтому по теореме Бородина (теорема 2.E) оно может быть изометрично изоморфно вложено как линейное многообразие в пространство $C([0,1],1,0)$. Однако $CL^1[0,1]$ не метризуемо. Поэтому $CL^1[0,1]$ не может быть линейно изометрично вложено как аффинное линейное многообразие в $C([0,1]^{\mathfrak{a}})$ ни для какого кардинального числа $\mathfrak{a}$.

Доказательство теоремы 2.1. Как и выше, мы обозначаем $B = B(0,1)$. Пусть несимметрично нормированное пространство $(X, \|\cdot\|)$ метризуемо. По предложению 2.1 существует норма $|\cdot|$ на X, эквивалентная несимметричной норме $\|\cdot\|$. Посредством $b(x,\delta)$ обозначим шар $\{y \in X \mid |y-x| \leqslant \delta\}$ в норме $|\cdot|$. Заменяя при необходимости норму $|\cdot|$ на ее произведение со скаляром, эквивалентность нормы $|\cdot|$ и несимметричной нормы $\|\cdot\|$ можно переписать в виде включения

$$b(0,r) \subset B \subset b(0,r') \subset b(0,1) \quad \text{для некоторых} \;\; 0 < r < r' < 1. \tag{2.2}$$

В пространстве $X \times \mathbb{R}$ рассмотрим выпуклое тело

$$U = \operatorname{conv}\big(B \times \{1\}, b(0,1) \times \{0\}\big),$$

определим точку $v = 0 \times \{1+r\}$ и положим $V = U \cup \operatorname{conv}(v, B \times \{1\})$. Установим выпуклость V.

Сначала проверим, что $[v,z] \subset V$ для любой точки $z \in U$. Для доказательства этого, в силу выпуклости множеств U и $\operatorname{conv}(v, B \times \{1\})$, достаточно проверить, что

$$u := [v,z] \cap (X \times \{1\}) \in B \times \{1\}. \tag{2.3}$$

Докажем (2.3). Пусть $z \in U$. Тогда $z \in X \times \{\mu\}$ при некотором $\mu \in [0,1]$. Известно [80; (117)], что

$$U \cap (X \times \{\lambda\}) = \big((1-\lambda) b(0,1) + \lambda B\big) \times \{\lambda\} \quad \forall \lambda \in [0,1].$$

Отсюда следует, что

$$z = (\mu x + (1-\mu) y) \times \{\mu\} \quad \text{при некоторых} \;\; x \in B, \; y \in b(0,1). \tag{2.4}$$

Отрезок $[v,z]$ пересекается с аффинной гиперплоскостью $X \times \{1\}$ в точке

$$u = \frac{1-\mu}{1+r-\mu} v + \frac{r}{1+r-\mu} z.$$

Нам нужно показать, что $u \in B \times \{1\}$. Это, с учетом (2.4) эквивалентно тому, что

$$u_0 := \frac{r}{1+r-\mu}(\mu x + (1-\mu y)) \in B. \tag{2.5}$$

Так как по (2.2) $\|y\| \leqslant 1/r$, то из (2.5) имеем

$$\|u_0\| \leqslant \frac{r}{1+r-\mu}\left(\mu + \frac{1-\mu}{r}\right) = \frac{1+\mu r-\mu}{1+r-\mu} \leqslant 1,$$

поскольку $0 \leqslant \mu \leqslant 1$, $0 < r < 1$. Отсюда $u_0 \in B$ и $u \in B \times \{1\}$, т.е. (2.1) верно.

Теперь из (2.1) с помощью несложных рассуждений из двумерной геометрии следует, что $[v', z] \subset V$ для любых точек $v' \in \operatorname{conv}(v, B \times \{1\})$, $z \in U$. Итак, V – выпуклое множество, причем

$$V \cap (X \times \{1\}) = B \times \{1\}. \tag{2.6}$$

Определим множество $W = V \cup (-V)$. Пусть $w = 0 \times \{1 + \frac{2r'}{1-r'}\}$. Поскольку по (2.2) $0 < r < r' < 1$ и $B \subset b(0, r')$, то $V \subset \operatorname{conv}(w, b(0,1))$. Теперь из выпуклости V с учетом предыдущего включения следует, что W также выпукло.

Центрально-симметричное ограниченное выпуклое тело W определяет норму $\|\cdot\|_W$ на $X \times \mathbb{R}$. По условию X сепарабельно относительно $|\cdot|$ (соответственно, пусть $\mathcal{A}$ – счетное всюду $|\cdot|$-плотное множество в X). Понятно, что $\mathcal{A} \times \mathbb{Q} \subset X \times \mathbb{R}$ также счетно и, как легко видеть, всюду плотно в $X \times \mathbb{R}$ относительно нормы $\|\cdot\|_W$.

Итак, линейное нормированное пространство $(X \times \mathbb{R}, \|\cdot\|_W)$ сепарабельно. По теореме 2.C его можно линейно изометрично вложить в $C[0,1]$ как линейное многообразие. Пусть $\varphi : X \times \mathbb{R} \to C[0,1]$ – линейное изометричное вложение $X \times \mathbb{R}$ в $C[0,1]$, $M = \varphi(X \times \mathbb{R})$ – линейное многообразие в $C[0,1]$. Поскольку $0 \times \{1\} \subset \operatorname{int} W$, то $\varphi(0 \times \{1\}) =: \theta \in \mathring{b}_{C[0,1]}$. Линейный оператор φ переводит аффинную гиперплоскость $X \times \{1\}$ в аффинное линейное многообразие $L \subset C[0,1]$. Поскольку по (2.5) $W \cap (X \times \{1\}) = B \times \{1\}$, то в силу изометричности вложения множество $L \cap b_{C[0,1]}$ изометрично множеству B. В частности, функционал Минковского множества $L \cap b_{C[0,1]}$ относительно точки $\theta = \varphi(0 \times \{1\})$ совпадает с функционалом Минковского тела B, т.е. с несимметричной нормой $\|\cdot\|$. $\square$

2.4. Теорема Банаха–Мазура об универсальности для пространств с несимметричной метрикой. Наряду с линейными несимметрично нормированными пространствами X и несимметрично преднормированными пространствами мы будем также рассматривать (не обязательно линейные) множества X, наделенные несимметричной метрикой ϱ. Функционал $\varrho : X \times X \to \mathbb{R}_+$ называется *несимметричной метрикой* (иногда – *квазиметрикой*), если для всех $x, y, z \in X$ выполнено

1) неравенство треугольника: $\varrho(x, y) \leqslant \varrho(x, z) + \varrho(z, y)$ и
2) аксиома равенства нулю: $\varrho(x, 0) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Как и в линейном случае несимметрично нормированных пространств X, топология на X, снабженном несимметричной метрикой ϱ, задается базой открытых шаров $\{\mathring{B}(x, r)\}$, где $\mathring{B}(x, r) = \{y \in X \mid \rho(x, y) < r\}$.

Известно, что у метрического пространства вес[4] совпадает с его плотностью[5]. Оказывается, что симметричность метрики здесь не по существу, и если X – пространство с несимметричной метрикой ϱ, то вес X равен его плотности, т. е. $dX = wX$. Доказательство этого факта полностью повторяет рассуждения в [21; стр. 130] для случая метрических пространств.

Обобщением теорем 2.A и 2.B на случай сепарабельных и несепарабельных пространств с несимметричной метрикой являются следующие утверждения. Сформулируем отдельно сепарабельный и несепарабельный случаи.

Теорема 2.2. *Пространство X с несимметричной метрикой ϱ изометрично вкладывается в несимметрично преднормированное пространство $C([0, 1], 1, 0)$ в том и только в том случае, когда X сепарабельно относительно метрики $d(x, y) = \max\{\varrho(x, y), \varrho(y, x)\}$.*

Теорема 2.3. *Пусть $\mathfrak{a}$ – бесконечное кардинальное число. Пространство X с несимметричной метрикой ϱ можно изометрично вложить в несимметрично преднормированное пространство $C([0, 1]^{\mathfrak{a}}, 1, 0)$ в*

---

[4]Наименьшее кардинальное число, являющееся мощностью какой-либо базы пространства X (очевидно, все равно – открытой или замкнутой), называется *весом* пространства X.

[5]*Плотность* пространства X – это наименьшее кардинальное число $\mathfrak{m}$, что в пространстве X имеется всюду плотное множество мощности $\mathfrak{m}$.

том и только в том случае, когда X имеет плотность $\leqslant \mathfrak{a}$ относительно метрики $d(x,y)=\max\{\varrho(x,y),\varrho(y,x)\}$.

Замечание 2.2. Выше мы отмечали, что если $\mathfrak{a}$ – бесконечное кардинальное число, то плотность пространства $C([0,1]^{\mathfrak{a}})$ относительно топологии, порожденной равномерной нормой $\|\cdot\|_{C([0,1]^{\mathfrak{a}})}$, равна $\mathfrak{a}$. Поскольку всегда $p(f)\leqslant\|f\|_{C([0,1]^{\mathfrak{a}})}$ для любой функции $f\in C([0,1]^{\mathfrak{a}})$, то из предыдущего утверждения с помощью несложных рассуждений следует, что плотность пространства $C([0,1]^{\mathfrak{a}},1,0)$ относительно топологии, порожденной несимметричной преднормой $p(\cdot)$ также равна $\mathfrak{a}$.

Доказательство теорем 2.2 и 2.3. Обозначим через P всюду плотное относительно метрики d подмножество в X, $|P|=\mathfrak{a}$. Так как $\mathfrak{a}=\aleph_0\cdot\mathfrak{a}$, то элементы множества P можно обозначить посредством $\{p_i^n\}$, $n\in\mathbb{N}$, $i\in A$, где A – множество индексов мощности $\mathfrak{a}$.

Зафиксируем произвольно $q\in X\setminus P$ и положим $w_i^n(p_j^k)=\varrho(p_i^n,p_j^k)-\varrho(q,p_j^k)$. По неравенству треугольника $w_i^n(p_j^k)\leqslant\varrho(p_i^n,q)$, $w_i^n(p_j^k)\geqslant-\varrho(q,p_i^n)$, откуда

$$|w_i^n(p_j^k)|\leqslant\max\{\varrho(p_i^n,q),\varrho(q,p_i^n)\}=d(p_i^n,q)\qquad\forall k,n\in\mathbb{N},\ i,j\in A.$$

Отсюда $0\leqslant(1+w_i^n(p_j^k)/d(p_i^n,q))/2\leqslant1$. Если в средней части предыдущего неравенства зафиксировать k,i,j, то получим последовательность по n, лежащую в $[0,1]$. Известно [259; p. 150], что существует последовательность непрерывных функций $v_n:[0,1]\to[0,1]$ такая, что если $(c_n)\subset[0,1]$, то найдется точка $t\in[0,1]$ такая, что $v_n(t)=c_n$ для всех $n\in\mathbb{N}$. Применяя этот результат к последовательности $(1+w_i^n(p_j^k)/d(p_i^n,q))/2$, получим точку $t_{ij}^k\in[0,1]$ такую, что $v_n(t_{ij}^k)=(1+w_i^n(p_j^k)/d(p_i^n,q))/2$, откуда

$$w_i^n(p_j^k)=d(p_i^n,q)\{2v_n(t_{ij}^k)-1\}.$$

Множество всех t_{ij}^k обозначим через T. Определим функцию $f^n:T\to\mathbb{R}$ посредством $f^n(t_{ij}^k)=w_i^n(p_j^k)$. Поскольку функции v_n непрерывны, то f^n можно непрерывно продолжить на замыкание T и, далее, линейно на весь отрезок $[0,1]$; продолжение f^n снова обозначим через f^n. Определим $f_i^n=f^n\circ\pi_i$, где π_i – естественная проекция. Покажем, что

$$\sup_{t\in[0,1]^{\mathfrak{a}}}(f_i^n(t)-f_j^k(t))=\varrho(p_i^n,p_j^k)\quad\text{для любых }\ i,j\in A,\ k,n\in\mathbb{N}.\quad(2.7)$$

Пусть точка $t_r^n \in [0,1]^{\mathfrak{a}}$ такова, что $\pi_h(t_r^m) = t_{hr}^m$ для всех $h \in A$. Тогда

$$f_i^n(t_r^m) - f_j^k(t_r^m) = f^n \circ \pi_i(t_r^m) - f^k \circ \pi_j(t_r^m) = f^n(t_{ir}^m) - f^k(t_{jr}^m) = \\ = w_i^n(p_r^m) - w_j^k(p_r^n) = \varrho(p_i^n, p_r^m) - \varrho(p_j^k, p_r^m) \leqslant \varrho(p_i^n, p_j^k).$$

С другой стороны,

$$f_i^n(t_j^k) - f_j^k(t_j^k) = f^n(t_{ij}^k) - f^k(t_{jj}^k) = w_i^n(p_j^k) - w_j^k(p_j^k) = \varrho(p_i^n, p_j^k).$$

Окончательно, если $t \in [0,1]^{\mathfrak{a}}$ не имеет вид t_r^m, то из линейности функций f^n, f^k вне $\bar{T}$ следует, что $f_i^n(t) - f_j^k(t) \leqslant \varrho(p_i^n, p_j^k)$, т.е. (2.7) доказано.

Пусть теперь $u : p_i^n \mapsto f_i^n$. Тогда u – изометрия P на множество всех функций $\{f_i^n\}$. Продолжим u на всё X. Если $x \in X$, то найдется последовательность $(q_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}} \subset P$ сходящаяся к x в метрике d. Так как (q_ν) сходится, то она является последовательностью Коши относительно метрики d, следовательно, $(u(q_\nu))$ – последовательность Коши в $C([0,1]^{\mathfrak{a}})$ относительно равномерной нормы. Она сходится к непрерывной функции $f_x \in C([0,1]^{\mathfrak{a}})$. Легко видеть, что f_x не зависит от выбора последовательности, сходящейся к x.

Теперь для $x, y \in X$ предположим, что $q_\nu \to x$, $\bar{q}_\mu \to y$, где $(q_\nu) \subset P$, $(\bar{q}_\mu) \subset P$. Тогда $d(q_\nu, \bar{q}_\mu) \to d(x,y)$. По (2.6)

$$\sup_{t\in[0,1]^{\mathfrak{a}}} (u(q_\nu)(t) - u(\bar{q}_\mu(t)) = d(q_\nu, q_\mu).$$

Переходя к пределу, получаем

$$d(x,y) = \sup_{t\in[0,1]^{\mathfrak{a}}} (f_x(t) - f_y(t)) = p(f_x - f_y),$$

т.е. u изометрично отображает X на некоторое подмножество пространства $C([0,1]^{\mathfrak{a}})$. Теорема 2.3 доказана. $\square$

Глава 3. Монотонная линейная связность и солнечность чебышёвских множеств и солнц

В данной главе изучаются введенные автором монотонно линейно связные множества и раскрывается связь понятия монотонно линейно связного множества с рядом задач геометрической теории приближений (по определению замкнутое множество монотонно линейно связно, если любые его две точки можно соединить монотонной кривой, лежащей во множестве – см. § 3.1.4). Показывается, что ограниченно компактное монотонно линейно связное множество экстремально ограниченно клеточноподобно (т.е. его пересечение с любым замкнутым брусом и, значит, замкнутым шаром клеточноподобно при условии ограниченности пересечения), а в конечномерном случае – экстремально стягиваемо. Для ряда пространств устанавливается монотонная линейная связность произвольных солнц и, как следствие, их P- и B-клеточноподобность и, значит, P- и B-ацикличность (в конечномерном случае – P- и B-стягиваемость), что частично замыкает известную теорему Л. П. Власова [50; гл. 4], которая утверждает, что в банаховом пространстве ограниченно компактное P-ацикличное множество является солнцем. Отсюда вытекает, что в таких пространствах для всех $\varepsilon > 0$ на солнце существует непрерывная ε-выборка (непрерывная выборка из оператора почти наилучшего ε-приближения). В частном случае приближения обобщенными дробно-рациональными функциями в $C(Q)$ (множество таких дробей является строгим протосолнцем) существование непрерывной ε-выборки для всех $\varepsilon > 0$ было установлено С. В. Конягиным [74]. Мы обобщаем результат Конягина на случай обобщенных дробно-рациональных функций более общего вида. Аналогичный вопрос для случая приближения сплайнами с нефиксированными узлами рассмотрен Е. Д. Лившицем [81], [82].

В § 3.1.1 вводится важное понятие оболочки Банаха–Мазура $\mathrm{m}(M)$ ограниченного множества M, определяемой, как пересечение всех замкнутых шаров, содержащих M. Далее, мы напоминаем понятие m-связного (связного по Менгеру) множества, а также, следуя К. Франчетти, У. Чени [187] и А. А. Васильевой [47], [48], [49], определяем интервал

$$[\![x, y]\!] := \{z \in X \mid \min \varphi(z) \in [\varphi(x), \varphi(y)] \qquad \forall \varphi \in \operatorname{ext} S^*\}$$

для двух элементов x, y линейного нормированного пространства X. В равномерном случае $[[x, y]] = \{z \in C(Q) \mid z(t) \in [x(t), y(t)]\ \forall t \in Q\}$.

В § 3.1.2 вводятся пространства класса (*MeI*) и (*Ex-w*s*), содержащие все действительные сепарабельные банаховы пространства. Параграф § 3.1.3 имеет общетопологический характер и посвящен определению и свойствам ацикличных и клеточноподобных множеств.

На пространствах класса $(MeI) \cap (Ex\text{-}w^*s)$ (в частности, на сепарабельных банаховых пространствах) оказывается возможным ввести ассоциированную норму $|\cdot|$ (см. § 3.1.5). Важность ассоциированной нормы $|\cdot|$ заключается в том, что относительно нее m-связное (а значит, и монотонно линейно связное множество) является $|\cdot|$-метрически выпуклым, что позволяет привлечь к исследованию таких множеств аппарат теории метрической выпуклости.

В § 3.1.4 дается определение монотонно линейно связного множества. Именно, замкнутое подмножество $M \subset X$ называется *монотонно линейно связным*, если любые две точки из M можно соединить непрерывной монотонной кривой $k(\tau)$, $0 \leqslant \tau \leqslant 1$, т.е. такой кривой, что $f(k(\tau))$ является монотонной функцией по τ для любого $f \in \operatorname{ext} S^*$. Данное понятие введено автором в [12].

В § 3.1.6 мы распространяем известную теорему Рейнуотера–Симонса о слабой сходимости последовательностей на случай сходимости относительно ассоциированной нормы $|\cdot|$ на пространствах класса (*Ex-w*s*) (в частности, на сепарабельных пространствах). Таким образом, хотя в общем случае слабая сходимость не метризуема, оказывается, что относительно ассоциированной нормы сходимость последовательностей равносильна слабой сходимости. Обобщенная теорема Рейнуотера–Симонса (теорема 3.1) нам потребуется при доказательстве того, что в сепарабельном банаховом пространстве непустое ограниченно слабо компактно m-связное множество монотонно линейно связно (теорема 3.3).

В § 3.1.7 изучаются введенные Брауном (*BM*)-*пространства.* Пространства X класса (BM) (в частности, $\ell^\infty(n)$ и c_0) являются “хорошими” с той точки зрения, что в них (если X конечномерно или $X = c_0$) всякое солнце m-связно (см. Браун [156], Алимов [11], [18]) и, следовательно, монотонно линейно связно. Поскольку известно, что ограниченно компактное P-ацикличное множество является солнцем (Власов, [50; теорема 4.4]), то в таких пространствах P-ацикличность ограниченно компактного множества влечет монотонную линейную связность. Это дает ответ на давно стоящий вопрос, восходящий к Л. П. Власову, о P-ацикличности ограниченно компактных солнц.

В § 3.2 исследуется монотонная линейная связность и солнечность связных по Менгеру множеств в банаховых пространствах. Устанавливается, что в широком классе банаховых пространств (в частности, в сепарабельных) ограниченно компактное m-связное (связное по Менгеру) множество монотонно линейно связно и является солнцем. Далее, показывается, что пересечение ограниченно компактного монотонно линейно связного (m-связного) множества с замкнутым шаром экстремально ограниченно клеточноподобно (имеет шейп точки) и, в частности, экстремально ограниченно ациклично (в конечномерном случае – экстремально стягиваемо) и является солнцем (теорема 3.2). Мы показываем, что ограниченно слабо компактное m-связное множество монотонно линейно связно (теорема 3.3). Полученные результаты позволяют обобщить классический результат С. В. Конягина о существовании непрерывных ε-выборок для всех $\varepsilon > 0$ на множество дробно-рациональных функций $\mathcal{R}_{n,m}$ в $C[0,1]$ или их обобщений в $C(Q)$.

В § 3.3 изучается монотонная линейная связность солнц в пространствах типа $C(Q)$. Впервые предъявляется пример (негладкого) бесконечномерного пространства (пространство $X = c_0$), в котором всякое солнце связно и, более того, монотонно линейно связно (теорема 3.4). Напомним, что наилучший общий результат о связности солнц утверждает, что в банаховом пространстве любое компактное солнце связно (Кощеев [75]). Обратно, показывается, что монотонно линейно связное аппроксимативно компактное подмножество пространства c_0 является солнцем. Также в c_0 строится пример (не аппроксимативно компактного) монотонно линейно связного проксиминального множества, не являющегося α-солнцем (и значит, не являющегося солнцем). В § 3.3.1 рассматривается случай общих пространств $X = C(Q)$, Q – метризуемый компакт, для которого мы показываем, что в $C(Q)$ ограниченно компактное строго солнце (в частности, ограниченно компактное чебышёвское множество) монотонно линейно связно (теорема 3.5). В теореме 3.6 показывается, что образ компактного строгого солнца M в $C(Q)$ при фактор-отображении по координатному подпространству L конечной коразмерности является компактным экстремально стягиваемым строгим солнцем в факторпространстве $C(Q)/L$.

В § 3.4 рассматривается солнечность монотонно линейно связных множеств и чебышёвских множеств в абстрактных линейных нормированных пространствах. Показывается, что монотонно линейно связное чебышёвское множество является солнцем. Этот результат является первым, где солнечность чебышёвского множества устанавливается при наложении на него структурных ограничений типа связности. В более общем случае утверждается следующее (теорема 3.7). Пусть M – монотонно линейно связное подмножество линейного нормированного пространства. Предположим, что $P_M x = \{y\}$ для некоторого $x \notin M$. Тогда x – точка солнечности (y – точка светимости).

В § 3.5 рассматриваются R-слабо выпуклые множества, введенные Ж. Виалем и активно исследуемые в работах Е. С. Половинкина, Г. Е. Иванова и М. В. Балашова, М. С. Лопушански и др. Интерес к R-слабо выпуклым множествам обусловлен их приложениями к теории экстремальных задач, задачам оптимального управления, теории дифференциальных игр, минимизации при наличии ограничений, теории приближений и теории многозначных отображений (см., например, Г. Е. Иванов [61], Г. Е. Иванов и М. В. Балашов [31], [62], Г. Е. Иванов и М. С. Лопушански [64], [65], А. Р. Алимов [125], [124] и цитированную там литературу).

Мы рассматриваем вопрос об m-связности (связности по Менгеру) и монотонной линейной связности R-слабо выпуклых множеств в пространстве $C(Q)$ и в общих банаховых пространствах. При исследовании данного вопроса естественно возникает класс пространств (BEL) с линейной вкладываемостью шаров (такие пространства определяются в § 3.5.2), а также пространства с длиннореберными (реберно-антиподальными) шарами. Сразу отметим, что $C(Q)$ и $\ell^1(n) \in (BEL)$. Устанавливается, что R-слабо выпуклое множество M в пространстве $X \in (BEL)$ m-связно (связно по Менгеру) при естественном ограничении на разброс точек M (теоремы 3.9 и 3.12). Показано, что замкнутое подмножество M конечномерного пространства $X \in (BEL)$ является R-слабо выпуклым множеством при некотором $R > 0$ если и только если M есть дизъюнктное объединение монотонно линейно связных солнц, причем хаусдорфово расстояние между любыми компонентами связности множества M не менее $2R$ (теорема 3.10). В теореме 3.11 дается характеризация R-слабо выпуклых множеств в конечномерных пространствах $X \in (BEL)$ в терминах их солнечности. Попутно дается характеризaция трехмерных пространств с длиннореберным единичным шаром (теорема 3.8) и устанавливается ряд свойств таких пространств.

3.1. Оболочка Банаха–Мазура. Монотонно линейно связные и m-связные множества. Ацикличность и клеточноподобность. Теорема Рейнуотера–Симонса. Ассоциированная норма. (BM)-пространства.

3.1.1. *Оболочка Банаха–Мазура.* Следуя Брауну [156] для ограниченного множества $\varnothing \neq M \subset X$ определим *оболочку Банаха–Мазура* $\mathrm{m}(M)$ множества M (также называемую *покрытием* или *шаровой оболочкой*), по определению являющейся пересечением всех замкнутых шаров, содержащих множество M.

Подмножество $M \subset X$ называется m-*связным* (*связным по Менгеру*) [156], если

$$\mathrm{m}(\{x, y\}) \cap M \neq \{x, y\}$$

для любых различных точек $x, y \in M$. Для краткости далее обозначаем

$$\mathrm{m}(\{x, y\}) = \mathrm{m}(x, y).$$

Важным свойством оболочки Банаха–Мазура $\mathrm{m}(\cdot, \cdot)$ (по крайней мере, в сепарабельных пространствах X) является то, что $z \in \mathrm{m}(x, y)$ если и только если z лежит метрически между x и y относительно так называемой ассоциированной (по Брауну) нормы $|\cdot|$ (см. лемму 3.1 ниже).

Вполне очевидно, что

$$\mathrm{m}(x, y) = \bigcap_{R \geqslant \|x-y\|/2} D_R(x, y), \tag{3.1}$$

где $D_R(x, y) := \cap_{x,y \in B(z,R)} B(z, R)$ – сильно выпуклый отрезок с концевыми точками x, y (см. (3.5)).

К примеру, в пространстве $C(Q)$ структура $\mathrm{m}(M)$ вполне ясна (см., например, Браун [156; теорема 3.1]):

$$\mathrm{m}(x, y) = \{z \mid z(q) \in [x(q), y(q)], \quad q \in Q\} =: [[x, y]]. \tag{3.2}$$

Аналогичное представление также верно и в пространстве $C_0(Q)$ (Q – локально компактное хаусдорфово пространство) – это следует из характеризации экстремальных элементов (“значение в точке”) единичной сферы сопряженного пространства к $C_0(Q)$, полученной Брозовским, Дойчем и Моррисом в [152].

Перейдем к определению интервала. Следуя [187], [47], [48], для $f_1, f_2 : Q \to \mathbb{R}$ определим *интервал* $[[f_1, f_2]]$ функций:

$$[[f_1, f_2]] = \big\{ f \in C(Q) \mid f(t) \in [f_1(t), f_2(t)] \quad \forall\, t \in Q \big\}. \tag{3.3}$$

По аналогии с (3.3) определим *интервал* в произвольном линейном нормированном пространстве X:

$$[[x, y]] := \big\{ z \in X \mid \min\{\varphi(x), \varphi(y)\} \leqslant \varphi(z) \leqslant \max\{\varphi(x), \varphi(y)\} \\ \forall \varphi \in \operatorname{ext} S^* \big\}; \tag{3.4}$$

здесь и далее $\operatorname{ext} S^*$ – множество экстремальных (крайних) точек единичной сферы S^* сопряженного пространства X^* (аналогия объясняется тем, что каждый экстремальный функционал $f \in C(Q)^*$ (или $f \in C_0(Q)^*$) имеет вид $f(x) = \pm x(t)$, где $x \in C(Q)$ или $x \in C_0(Q)$, $t \in Q$).

Сразу заметим, что включение

$$\mathrm{m}(x, y) \supset [[x, y]] \tag{3.5}$$

имеет место в любом X (см., например, Франчетти и Роверси [188; Theorem 3.1]). Действительно, [200; p. 55] (см. также [243]), замкнутое выпуклое множество M является пересечением шаров если и только если для любой точки вне M найдется замкнутый шар, содержащий M, но не содержащий эту точку. Теперь осталось вспомнить понятный результат (вытекающий из того, что $\|x\| = \sup_{f \in \operatorname{ext} S^*} f(x)$), что точку, не принадлежащую замкнутому шару, всегда можно строго отделить от шара посредством экстремальной гиперплоскости.

3.1.2. *Пространства класса* (*MeI*) *и* (*Ex-w*s*). Следуя Брауну [156], а также Франчетти и Роверси [188], введем в рассмотрение класс пространств X, который мы обозначаем (*MeI*):

$$(MeI) \qquad \mathrm{m}(x, y) = [[x, y]] \quad \text{для всех} \quad x, y \in X.$$

Сокращение (*MeI*) происходит от английского “The hull $\mathrm{m}(x, y)$ equals the interval $[[x, y]]$ for all x, y”. Автору не известны банаховы пространства, не лежащие в классе (*MeI*).

Сразу заметим, что включение $\mathrm{m}(x,y) \supset [\![x,y]\!]$ имеет место в любом линейном нормированном пространстве X (см., например, Франчетти и Роверси [126]). Также известно (Алимов [126], Франчетти и Роверси [188]), что равенство $\mathrm{m}(x,y) = [\![x,y]\!]$ имеет место для достаточно широкого класса пространств, и в частности, для пространств, на единичной сфере которых гладкие точки всюду плотны (такой класс содержит слабо асплундовы а, следовательно, и сепарабельные пространства). По поводу равенства $\mathrm{m}(x,y) = [\![x,y]\!]$ для асплундовых пространств см. также П. Теран [261].

Несложно показать, что класс (*MeI*) содержит пространства $C(Q)$, Q – хаусдорфов компакт, и в частности, пространство ℓ^∞ (как пространство непрерывных функций на стоун-чеховской компактификации натурального ряда) $\beta\mathbb{N}$.

Также отметим, что если пространство X таково, что $\operatorname{ext} S^*$ лежит в замыкании множества w^*-полуострых точек шара B^* (*условие Морено*), то $[\![x,y]\!] = \mathrm{m}(x,y)$ для всех $x, y \in X$; такому условию, в частности, удовлетворяют конечномерные пространства и пространства со свойством пересечения Мазура). Напомним, что точка $f \in S^*$ называется *w^*-полуострой* точкой сопряженного шара B^* (см., например, [196]), если для любого $\varepsilon > 0$ найдется w^*-срез $S\ell$ шара B^* такой, что $\operatorname{diam}(\{f\} \cup S\ell) < \varepsilon$. Здесь $S\ell(B^*, x, \delta) := \{g \in S^* \mid g(x) > 1 - \delta\}$, $0 < \delta < 1$, $x \in X$.

Действительно, предположим, что для пространства, удовлетворяющего условию Морено, выполнено $0 \in \mathrm{m}(x,y)$, $0 \notin [\![x,y]\!]$ при некоторых $x, y \in X$. Поскольку $0 \notin [\![x,y]\!]$, то $\inf f([\![x,y]\!]) > 0$ при некотором $f \in \operatorname{ext} S^*$, а следовательно, и при некотором f, являющемся w^*-полуострой точкой сферы S^*. В [196] показано, что в банаховом пространстве функционал $f \in S^*$ является w^*-полуострой точкой если и только если для любого ограниченного множества C такого, что $\inf f(C) > 0$, найдется замкнутый шар B' такой, что $C \subset B'$ и $0 \notin B'$. Следовательно, в нашей ситуации найдется шар B', содержащий $[\![x,y]\!]$, но не содержащий 0. Противоречие с тем, что $0 \in \mathrm{m}(x,y)$.

Отметим, что условие Морено не выполнено для пространства ℓ^1 (на единичном шаре пространства ℓ^∞ отсутствуют w^*-полуострые точки [237]), но однако согласно указанной теореме Франчетти–Роверси в ℓ^1 равенство (3.2) имеет место.

Отметим также следующий результат (см. П. Теран [261]): если X банахово и если $\mathrm{m}(x,y)$ компактно при некоторых $x,y \in X$, то

$$\mathrm{m}(x,y) = [\![x,y]\!]. \tag{3.6}$$

В конечномерном случае равенство $[\![x,y]\!] = \mathrm{m}(x,y)$ установлено Брауном [156] (и обобщено П. Тераном, см. (3.6)). Также отметим, что (3.2) имеет место для пространств с антиподальным единичным шаром (множество P называется *антиподальным*, если для любых его элементов x и y P содержится в замкнутой гиперполосе, содержащей x и y в своей границе – такие точки x и y называются антиподальными).

Нам также понадобится следующий класс пространств, введенный Франчетти и Роверси [188]:

(Ex-w^*s) $\qquad\qquad$ $\operatorname{ext} S^*$ w^*-сепарабельно.

При этом в определении класса (Ex-w^*s) мы всегда предполагаем, что

$$F = (f_i)_{i\in I} \subset \operatorname{ext} S^* \quad w^*\text{-плотно в } \operatorname{ext} S^*, \quad \operatorname{card} I \leqslant \aleph_0, \quad F = -F.$$

Сокращение (Ex-w^*s) происходит от немецкого “Die Extrempunktmenge der konjugierten Einheitskugel ist w^*-separabel”. Согласно известному результату Линденштраусса и Фелпса множество экстремальных точек единичного шара рефлексивного бесконечномерного пространства несчетно, тем не менее мы увидим чуть ниже, что класс (Ex-w^*s) содержит все сепарабельные линейные нормированные пространства.

Несмотря на то, что вопрос о массивности границ линейных нормированных пространств изучался многими авторами, среди которых упомянем М. И. Кадеца, В. П. Фонфа, Й. Линденштраусса, Р. Фелпса, О. Нигаарда, Т. А. Абрахамсена, М. Пёльдвере (к примеру, в обзоре [242] О. Нигаард рассматривает ряд вопросов, связанных с густыми (thick) и w^*-густыми множествами), вопрос о w^*-сепарабельности множества $\operatorname{ext} S^*$ практически не изучался.

Из теоремы Крейна–Мильмана сразу следует, что любое пространство из класса (Ex-w^*s) имеет w^*-сепарабельный единичный шар B^*. Последнее условие эквивалентно [171] тому, что X изометрично изоморфно подпространству из ℓ^∞. Характеризация пространств класса (Ex-w^*s) не известна. Также отметим, что имеются [171], [131] примеры пространств типа $C(K)$ (где K – несепарабельный хаусдорфов компакт) или вида

$X = \ell_1 \oplus \ell_2(\Gamma)$ (где $|\Gamma| = \mathfrak{c}$) таких, что X^* w^*-сепарабельно, а единичный шар B^* – нет.

Далее, если X – сепарабельное линейное нормированное пространство, то w^*-топология единичного шара B^* сопряженного пространства X^* метризуема. Соответственно, шар B^* w^*-сепарабелен ([182], Corollary 3.104). Поэтому *любое сепарабельное пространство лежит в классе* (Ex-w^*s). Также отметим, что класс (Ex-w^*s) содержит *несепарабельное* пространство ℓ^∞ (как пространство непрерывных функций на стоун-чеховской компактификации натурального ряда $\beta\mathbb{N}$ – данный компакт сепарабелен, но неметризуем). При этом $C(Q)$ на несепарабельном Q и $c_0(\Gamma)$ на несчетном Γ не лежат в (Ex-w^*s).

Было бы интересно получить характеризацию пространств класса (Ex-w^*s).

Кратко суммируя сказанное выше относительно классов пространств (MeI) и (Ex-w^*s) отметим, что

> класс (MeI) $\cap$ (Ex-w^*s) содержит все сепарабельные банаховы пространства (в частности, все пространства $C(Q)$ на метризуемом компакте Q) и несепарабельное пространство ℓ^∞.

3.1.3. *Ацикличные и клеточноподобные множества.* Данный вспомогательный параграф имеет общетопологический характер и посвящен определению и свойствам ацикличных и клеточноподобных множеств.

Теория гомологий (когомологий) связывает с каждым топологическим пространством X последовательность абелевых групп $H_k(X)$, $k = 0, 1, 2, \dots$ (группы гомологий) и $H^k(X)$, $k = 0, 1, 2, \dots$ (группы когомологий), которые являются гомотопическими инвариантами пространства: если два пространства гомотопически эквивалентны, то и соответствующие группы гомологий изоморфны. Существуют различные способы конструировать группы (ко)гомологий, из которых можно выделить следующие: конструкция, основанная на нервах покрытий, предложенная П. С. Александровым и обобщенная Э. Чехом; конструкция Л. Вьеториса, основанная на понятии истинных циклов и применимая к метрическим пространствам; конструкция, основанная на понятии сингулярных цепей (непрерывных образов симплициальных цепей).

Пусть A – произвольная нетривиальная абелева группа. Пространство (все пространства предполагаются метризуемыми) называется *ациклич-*

ным, если его группа чеховских *ко*гомологий с коэффициентами из A тривиальна (не имеет циклов, за исключением границы). Таким образом, определение ацикличности зависит от выбранной группы коэффициентов. Здесь отметим, что гомологии (Александрова–)Чеха не образуют теории гомологий, не удовлетворяя аксиоме точности, а когомологии Чеха(–Даукера) образуют теорию гомологий топологических пространств. С подробным изложением теории (ко)гомологий компактов, топологических и равномерных пространств можно ознакомиться в обзоре Мелихова [86].

В случае, если гомология (когомология) имеет компактный носитель (т.е. удовлетворяет аксиоме компактных носителей) и коэффициенты группы гомологий (когомологий) лежат в поле, то понятия гомологической и когомологической ацикличности совпадают [233]. Однако, в случае произвольной абелевой группы коэффициентов понятия гомологической и когомологической ацикличности могут быть различны. К примеру, 2-адический соленоид (предел обратного спектра последовательности $S^1 \xleftarrow{f} S^1 \xleftarrow{f} \ldots$, где $f = z^2$) ацикличен в гомологиях Чеха с коэффициентами в поле $\mathbb{Z}_2$, а в когомологиях Чеха ацикличности нет (см., например, [181]).

Ниже, если не оговорено противное, ацикличность будет пониматься относительно чеховских когомологий с коэффициентами в произвольной абелевой группе.

В соответствии с принятыми обозначениями (см. стр. 8), множество M *P-ациклично*, если $P_M x$ непусто и ациклично для любого x; множество M *B-ациклично* если пересечение M с любым замкнутым шаром ациклично.

Непустое компактное пространство называется *R_δ-множеством* (см. например [198; (2.11)]), если оно гомеоморфно пересечению счетной убывающей последовательности абсолютных ретрактов (или стягиваемых компактов [198; Theorem 2.13]). R_δ-множества естественно возникают как пространства решений задачи Коши, а также автономных и неавтономных дифференциальных включений [199], [177], [129]. Результаты такого типа восходят к Ароншайну.

Компакт Y называется *клеточноподобным* (имеющим шейп точки), если существует ANR (абсолютный окрестностный ретракт) Z и вложение $i : Y \to Z$ такое, что образ $i(Y)$ стягиваем в любой своей окрестности $U \subset Z$ (см. [198; (82.4)]); само клеточноподобное множество при этом не обязано быть стягиваемым. Согласно известной характеризации Д. Химана (см., например, [198; гл. I]) клеточноподобное множества суть пересечения вложенных счетных последовательностей стягиваемых компактов, откуда вытекает, что R_δ-множество всегда клеточноподобно [225; § 4.2], [208; p. 50]. Далее, поскольку всякое отображение компакта точечного шейпа в ANR гомотопически тривиально, то компакт шейпа точки (клеточноподобный) стягивается во всякой своей окрестности в любом объемлющем ANR. Как следствие, *классы R_δ-множеств и клеточноподобных (шейпа точки) компактов совпадают.*

Отметим, что клеточноподобность влечет ацикличность (относительно любой непрерывной теории (ко)гомологий) [225; p. 854], при этом имеются примеры ацикличных, но не клеточноподобных множеств, а также клеточноподобных, но не линейно связных множеств (синусоида топологов).

Браун [155; Corollary 1.6.2] доказал, что если ограниченно компактное подмножество M банахова пространства P-ациклично (относительно чеховских когомологий с коэффициентами в произвольной абелевой группе), то M B-ациклично. (На самом деле Браун [155] показал несколько больше: если M – P-ацикличное аппроксимативно компактное подмножество банахова пространства и если пересечение M с некоторым шаром B компактно, то $M \cap B$ ациклично.) Таким образом, ацикличность произвольного компактного m-связного множества влечет P- и B-ацикличность произвольного ограниченно компактного m-связного множества M. Это следует из того, что пересечение такого M с произвольным шаром $B(x, r)$ компактно и m-связно.

3.1.4. *Монотонная линейная связность.* В данном параграфе рассматривается монотонная линейная связность, являющаяся усилением понятия линейной связности – в отличие от линейной связности для монотонно линейного связного множества предполагается, что любые две его точки можно связать *монотонной* непрерывной кривой.

Пусть $k(\tau)$, $0 \leqslant \tau \leqslant 1$, – непрерывная кривая в линейном нормированном пространстве X. Следуя [152] говорим, что кривая $k(\cdot)$ *монотонная*, если $f(k(\tau))$ является монотонной функцией по τ для любого $f \in \operatorname{ext} S^*$.

Определение 3.1. Замкнутое подмножество $M \subset X$ называется *монотонно линейно связным* [12], если любые две точки из M можно соединить непрерывной монотонной кривой (дугой) $k(\cdot) \subset M$. Понятно, что любая монотонная кривая является простой (жордановой).

Отметим, что монотонно линейно связное множество всегда B-монотонно линейно связно (т.е. его пересечение с любым замкнутым (а следовательно, и с открытым [50]) шаром монотонно линейно связно; ср. Брозовский [152; Proposition 1.3]). Отсюда и из включения (3.5) вытекает, что

• *монотонно линейно связное множество необходимо экстремально монотонно линейно связно.*

Естественность m-связных множеств и монотонно линейно связных множеств при изучении связности солнц была показана в работах Х. Беренса и Л. Хетцельта, А. Л. Брауна и автора (см. [156], [12], [11], [126]): для монотонно линейно связного солнца удается ответить на давно стоящий вопрос о связности (ацикличности) пересечения солнца с шаром, что замыкает известную теорему Л. П. Власова о солнечности ацикличных множеств.

Сразу отметим, что существуют примеры конечномерных пространств, в которых имеются не m-связные (и, *a fortiori*, не монотонно линейно связные) чебышёвские множества и не m-связные солнца (см. замечание 3.4 на стр. 107).

Замечание 3.1. Используя (3.5) несложно проверить, что *монотонно линейно связное множество необходимо* m*-связно.* Обратное утверждение неверно даже для замкнутых множеств – соответствующий пример в $C[0,1]$ предложен Франчетти и Роверси [188] (см. также [12]): пусть

$$M = M_1 \cup M_{-1}, \tag{3.7}$$

где $M_\sigma = \{x \in C[0,1] \mid x(0) = \sigma\}$, $\sigma = \pm 1$. Тогда M состоит из двух выпуклых непересекающихся компонент, в то же время несложно проверить, что M m-связно.

Однако в c_0 и в произвольном конечномерном пространстве X_n эти свойства эквивалентны для замкнутых множеств (см. теорему 1 в [11] и лемму 3.A); утверждение для X_n следует из (3.5), равенства $\mathrm{m}(\cdot,\cdot) = [[\cdot,\cdot]]$ и теоремы 3.2). Некоторые достаточные условия монотонной линейной связности m-связного подмножества линейного нормированного пространства даны в теореме 3.2. Отметим, что в пространствах X_n со свойством $\overline{\operatorname{ext}} S^* = S^*$ класс монотонно линейно связных (m-связных) замкнутых множеств совпадает с классом замкнутых выпуклых множеств [243].

3.1.5. *Ассоциированная норма.* Пусть пространство X лежит в классе (Ex-w^*s) (в частности X – сепарабельное банахово пространство), $F = (f_i)_{i\in I}$ – семейство функционалов из определения класса (Ex-w^*s), $(\alpha_i) \subset \mathbb{R}$, $\alpha_i > 0$, $i \in I$ (см. § 3.1.2) и пусть $\sum \alpha_i < \infty$. Для $x \in X$ положим

$$|x| = \sum_{i\in I} \alpha_i |f_i(x)|. \tag{3.8}$$

Тогда $|\cdot|$ – норма на X, которую, следуя Брауну [156] мы называем *ассоциированной*. Ясно, что $|x| \leqslant \|x\| \sum \alpha_i$. Отметим, что Браун вводил ассоциированную норму только на конечномерных пространствах.

Важность ассоциированной нормы показывает следующий результат [18], который обобщает следствие 3.2 из [156], доказанное Брауном в случае $\dim X < \infty$.

Лемма 3.1. *Пусть X – банахово пространство из класса (MeI) $\cap$ (Ex-w^*s) (в частности, X – сепарабельное банахово пространство) и пусть $x, y \in X$. Следующие условия эквивалентны:*

a) $z \in \mathrm{m}(x, y)$;
b) $|f_i(x) - f_i(y)| = |f_i(x) - f_i(z)| + |f_i(z) - f_i(y)|$ *для всех* $i \in I$, *где* $F = (f_i)_{i\in I}$ – *семейство из определения класса* (Ex-w^*s);
c) $|x - y| = |x - z| + |z - y|$ (*т.е.* z *находится метрически между* x *и* y *относительно нормы* $|\cdot|$).

Доказательство леммы 3.1. Пусть $z \in \mathrm{m}(x, y)$. Так как $X \in$ (MeI), то по определению $f(z) \in [f(x), f(y)]$ для любого $f \in \operatorname{ext} S^*$. В частности, выполнено условие b) и, в силу (3.8), условие c). Обратно, пусть z находится $|\cdot|$-между x и y. Ясно, что $|f_i(x - y)| \leqslant |f_i(x - z)| + |f_i(z - y)|$. Отсюда и из (3.8) имеем $|f_i(x) - f_i(y)| = |f_i(x) - f_i(z)| + |f_i(z) - f_i(y)|$ для всех i. Как следствие $|f(x) - f(y)| = |f(x) - f(z)| + |f(z) - f(y)|$ для всех $f \in \operatorname{ext} S^*$, поскольку (f_i) w^*-плотно в $\operatorname{ext} S^*$. Окончательно, $z \in \mathrm{m}(x, y)$ в силу того, что $X \in$ (MeI). $\square$

В общем случае пространство $(X, |\cdot|)$ не является полным при полном пространстве $(X, \|\cdot\|)$. К примеру, в $X = c_0$ полагая $x_n = (1, \dots, 1, 0, \dots)$

мы имеем, что (x_n) – последовательность Коши относительно нормы $|\cdot|$. Ясно, что (x_n) не имеет сходящихся подпоследовательностей.

3.1.6. *Теорема Рейнуотера–Симонса о слабой сходимости для ассоциированной нормы.* В данном параграфе мы распространяем классическую теорему Рейнуотера–Симонса (см., например, [182; § 3.11.8.5]) на случай сходимости относительно ассоциированной нормы $|\cdot|$ на пространствах класса (*Ex-w*s*) (в частности, на сепарабельных пространствах). Теорема Рейнуотера–Симонса утверждает, что ограниченная последовательность (x_n) в банаховом пространстве X слабо сходится к $x \in X$ если и только если последовательность $(f(x_n))$ сходится к $f(x)$ для каждого функционала f из произвольной фиксированной границы Джеймса пространства X (например, для всех $f \in \operatorname{ext} S^*$). Таким образом, хотя в общем случае слабая сходимость не метризуема, имеется норма на $X \in$ (*Ex-w*s*), относительно которой сходимость *последовательностей* равносильна слабой сходимости.

Здесь напомним (см., например, [182; § 3.11.8]), что подмножество A единичной сферы S^* сопряженного пространства X^* называется *границей* (Джеймса) для пространства X, если для каждого $x \in X$ найдется $f \in A$ такой, что $f(x) = \|x\|$. Основополагающие работы в исследовании границ для линейных нормированных пространств и их массивности принадлежат М. И. Кадецу и В. П. Фонфу. Из теоремы Крейна–Мильмана легко вытекает, что множество $\operatorname{ext} S^*$ крайних точек сопряженного шара является границей для X. Однако существуют границы, вовсе не содержащие крайних точек [255].

Основным результатом § 3.1.6 является следующий результат.

Теорема 3.1. *Пусть $X \in$ (Ex-w*s) – банахово пространство, $F := (f_i)_{i\in I} \subset \operatorname{ext} S^*$ – набор функционалов из определения класса (Ex-w*s). Пусть (x_n) – $|\cdot|$-ограниченная последовательность в X. Рассмотрим следующие условия*:

a) $x_n \xrightarrow{|\cdot|} x$;
b) $f_i(x_n) \to f_i(x)$ *для любого* $i \in I$;
c) $x_n \xrightarrow{w} x$.

Тогда условия a) *и* b) *эквивалентны, любое из них обеспечивается выполнением условия* c). *Если X^* сепарабельно, то все три условия эквивалентны.*

Поскольку $|x| \leqslant \|x\| \sum \alpha_i$, то $\|\cdot\|$-ограниченная последовательность необходимо ограничена по норме $|\cdot|$.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. *Если* $\dim X = \infty$ *и* X^* *сепарабельно, то* X *не* $|\cdot|$*-полно.*

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. В импликации b)⇒c) в теореме 3.1 сепарабельность X^* существенна. Действительно, для пространства ℓ^1 рассмотрим финитные последовательности из ℓ^∞, состоящие из нулей и плюс-минус единиц, их счетное число и они w^*-плотны во множестве $\operatorname{ext} S^*$ (крайние точки S^* суть функционалы, сопоставляющие функции ее значение в точке). Однако из сходимости элементов из ℓ^1 на этих финитных последовательностях не следует их слабая сходимость. Данный факт отмечен П. А. Бородиным при обсуждении полученных результатов.

Напомним, что пространство X называется *пространством Шура*, если в нем слабо сходящиеся последовательности сходятся по норме. Классическим примером бесконечномерного пространства Шура является пространство ℓ^1.

СЛЕДСТВИЕ 3.2. $(X, |\cdot|)$ *является пространством Шура.*

Для доказательств следствия 3.2 заметим, что $|x| > \alpha_i |f_i(x)|$ при любом i по определению ассоциированной нормы. Как следствие, любой $f_i \in F$ лежит в $X^*_{|\cdot|}$. Теперь из условия b) теоремы 3.1 следует, что если (x_n) $w_{|\cdot|}$-слабо сходится, то (x_n) $|\cdot|$-сходится. Таким образом, для $|\cdot|$-ограниченной последовательности (x_n)

$$x_n \xrightarrow{w_{|\cdot|}} x \iff x_n \xrightarrow{|\cdot|} x. \tag{3.9}$$

Отсюда вытекает, что в $(X, |\cdot|)$ $w_{|\cdot|}$-компактность совпадает с сильной $|\cdot|$-компактностью и следовательно, рефлексивное $(X, |\cdot|)$ необходимо конечномерно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.1. Импликация a)⇒b) вполне понятна: если $x_n \xrightarrow{|\cdot|} x$ (по норме $|\cdot|$), то сумма $\sum \alpha_i |f_i(x_n) - f_i(x)|$ мала при всех достаточно больших n; как следствие, для каждого фиксированного j разность $|f_j(x_n) - f_j(x)|$ тоже мала при таких n.

Установим b)⇒a). Для каждого n в сумме

$$\sum_{i \in I} \alpha_i |f_i(x_n) - f_i(x)| \tag{3.10}$$

обозначим $a_i(n) := \alpha_i|f_i(x_n) - f_i(x)|$ и разобьем сумму (3.10) на две: при $i \leqslant N$ и при $i > N$ (N выберем позже). Поскольку по условию последовательность (x_n) равномерно ограничена, то во второй сумме выполнено $|f_i(x_n) - f_i(x)| \leqslant C$ (где C не зависит от i, n). Как следствие, вторая сумма ограничена сверху суммой $\sum_{i>N} C\alpha_i < \infty$. По $\varepsilon > 0$ выбираем N, при котором вторая сумма меньше ε. Первая же сумма конечная, там выбираем большие n.

Импликация c)⇒b) понятна. Предположим, что X^* сепарабельно. Докажем b)⇒c). Заметим, что для банахова пространства X следующие утверждения эквивалентны:

- для X имеется сепарабельная граница;
- граница $\operatorname{ext} B^*$ сепарабельна;
- пространство X^* сепарабельно

(определение границы Джеймса дано на стр. 91). Здесь обратные импликации понятны (в линейном нормированном пространстве сепарабельность (сильная) множества наследуется его произвольными подмножествами), а первое условие влечет последнее в силу известной теоремы Годфроя–Роде (см., например, [182; Theorem 3.122]), согласно которой $B^* = \overline{\operatorname{conv}}^{\|\cdot\|} A$ (здесь A – сепарабельная граница для X). Как следствие, шар B^* сепарабелен, а значит пространство X^* также сепарабельно.

Далее, нам потребуется понятие (I)-генерирующего множества, введенного Фонфом и Линденштрауссом. По определению, множество $C \subset B^*$ (I)-*генерирует* шар B^*, если

$$B^* = \overline{\operatorname{conv}} \left(\bigcup_i \overline{\operatorname{conv}}^{w^*} C_i\right) \tag{3.11}$$

при любом представлении $C = \bigcup C_i$ в виде объединения счетного семейства множеств C_i. В данном определении буква "I" происходит от латинского "intermedius" и объясняется тем, что

$$B^* = \overline{\operatorname{conv}}\, C \implies C \ (\mathrm{I}) - \text{генерирует } B^* \implies B^* = \overline{\operatorname{conv}}^{w^*} C.$$

Положим $C_i := \{f_1, \ldots, f_i\}$, $i \in I$ (где $F := (f_i)_{i \in I}$ – набор функционалов из определения класса (*Ex-*w^**s*)). Ясно, что $F = \bigcup C_i$. Далее,

$$B^* = \overline{\operatorname{conv}}^{\|\cdot\|} \operatorname{ext} B^* \tag{3.12}$$

по теореме (Кадеца–Фонфа–)Годфроя–Роде. Поскольку X^* сепарабельно, то граница $\operatorname{ext} B^*$ также сепарабельна. Далее, $\operatorname{ext} S^* \subset \overline{F}^{w^*}$ по определению класса (Ex-w^*s) и, следовательно, $\operatorname{ext} S^* \subset \big(\bigcup_i \overline{\operatorname{conv}}^{\,w^*} C_i\big)$. Окончательно, F (I)-генерирует шар B^* в силу (3.12) и (3.11).

Теперь осталось воспользоваться одним результатом Нигарда [241] (см. также Календа [215]), который утверждает, что если $C \subset B^*$ (I)-генерирует шар B^*, то C – множество Рейнуотера, т.е. множество со свойством: если ограниченная последовательность $(x_n) \subset X$ сходится поточечно на C, то (x_n) сходится слабо. Теорема 3.1 доказана. $\square$

Доказательство следствия 3.1. Рассуждая аналогично доказательству импликаций a)⇒b) и b)⇒a) в теореме 3.1 мы видим, что (x_n) является $|\cdot|$-последовательностью Коши если и только если $(f_i(x_n))$ является последовательностью Коши в $\mathbb{R}$ для любого $i \in I$. Как следствие, если X $|\cdot|$-полно, то отсюда вытекает, что X секвенциально $|\cdot|$-слабо полно. Легко проверяется, что секвенциально слабо полное пространство необходимо банахово. Для завершения доказательства осталось воспользоваться тем, что секвенциально слабо полное банахово пространство является рефлексивным пространством или содержит подпространство, изоморфное ℓ^1 (см., например, [239; Corollary 5.11]). $\square$

3.1.7. *(BM)-пространства.* Напомним [156], что линейное нормированное пространство X называется (BM)-*пространством*, если

$$B(0,\|x\|)\cap\big(\mathrm{m}(x,y)\setminus\{x\}\big) \neq \varnothing, \quad \text{если } x \neq 0 \text{ и } [x,x-y]\cap \mathring{B}(0,\|x\|) = \varnothing. \tag{3.13}$$

Пространства X класса (BM) (в частности, $\ell^\infty(n)$ и c_0) являются “хорошими” с той точки зрения, что в них (если X конечномерно или $X = c_0$) всякое солнце m-связно (см. Браун [156], Алимов [11], [18]) и, следовательно, монотонно линейно связно. Поскольку известно, что ограниченно компактное P-ацикличное множество является солнцем (Власов, [50; теорема 4.4]), то в таких пространствах P-ацикличность влечет монотонную линейную связность.

Класс (BM)-пространств содержит в себе все гладкие пространства, все двумерные пространства с полигональным единичным шаром, пространства $\ell^\infty(n)$, c_0, c, ℓ^∞, все замкнутые идеалы пространства $C(Q)$ (т.е. классы функций $f \in C(Q)$, таких, что $f|_T = 0$ для некоторого замкнутого $T \subset Q$), все подрешетки $C(Q)$ с единицей [188]. Строго выпуклое пространство лежит в классе (BM) если и только если оно гладкое [188; Proposition 8.2]. Класс (BM)-пространств замкнут по отношению к формированию конечной ℓ^∞-прямой суммы [156; § 5] и бесконечной c_0-прямой суммы сепарабельных (BM)-пространств [188; Theorem 8.7]. (Если X_1, X_2 – линейные нормированные пространства, то ℓ^∞-прямой суммой X_1 и X_2 называется прямая сумма X_1 и X_2 с нормой $\|(x_1,x_2)\|_\infty = \max\bigl\{\|x_1\|_{X_1}, \|x_2\|_{X_2}\bigr\}$.) Двумерное пространство X лежит в классе (BM) если и только если $\operatorname{sm} S^* \cap \operatorname{ext} S^* \subset \exp S^*$ (Браун [156]), это эквивалентно тому, что любая точка $s\in S$ является точкой гладкости или общей концевой точкой двух невырожденных отрезков из S.

Предложение 3.1. *Пространства ℓ^1, $n\geqslant 3$, и $\ell^1(n)$ не лежат в классе (BM).*

Достаточно рассмотреть случай $\ell^1(3)$. Рассмотрим $x=(1,0,0)$ и $y=(1,\frac12,\frac12)$. Легко видеть, что $[x,x-y]\cap \mathring{B}=\varnothing$. В силу равенства равенства $\mathrm{m}(\cdot,\cdot)=[\![\cdot,\cdot]\!]$ имеем

$$\mathrm{m}(x,y)=\bigl\{z\in f_i(z)\in[f_i(x),f_i(y)],\quad i=1,\dots,4\bigr\},$$

где $f_1=(1,1,1)$, $f_2=(1,1,-1)$, $f_3=(1,-1,1)$, $f_4=(-1,1,1)$. Отсюда $\mathrm{m}(x,y)=\{(1,\alpha,\alpha)\mid 0\leqslant\alpha\leqslant\frac12\}$ и видно, что $\mathrm{m}(x,y)\cap B=\{x\}$, т.е. (3.13) не выполнено.

Браун [159], [156] установил, что полиэдральные (BM)-пространства конечной размерности в точности являются ℓ^∞-прямыми суммами

$$X=X_1\oplus_\infty\cdots\oplus_\infty X_r \tag{3.14}$$

конечного набора симметричных полиэдральных пространств $X_1,\dots,X_r$ размерности 1 или 2. Шар пространства вида (3.14) всегда является зонотопом (т.е. проекцией n-мерного куба на подпространство) [159], но класс зонотопов не исчерпывается такими пространствами. Из характеризации Брауна (3.14) вытекает, что $\ell^1(n)\notin(BM)$.

Характеризация произвольных трехмерных (BM)-пространств получена Брауном [158]: X гладко или $X=Y\oplus_\infty\mathbb{R}$, где Y – двумерное (BM)-пространство

Напомним ещё одно определение.

Пусть $n,k\in\mathbb{N}$, $n>k\geqslant 2$. По определению линейное нормированное пространство X имеет *$n.k$-свойство пересечения* ($X\in(n.k.I.P)$), если для любых n замкнутых шаров $B(a_i, r_i)$, $i = 1, \dots, n$, для которого $\cap_{r=1}^{k} B(a_{i_r}, a_{i_r}) \neq \varnothing$ при любом выборе $1 \leqslant i_1 \leqslant \dots i_k \leqslant n$, выполнено $\cap_{i=1}^{n} B(a_i, r_i) \neq \varnothing$. В последнее время $(n.k.I.P)$-пространства активно изучаются в связи с задачами минимального заполнения конечных подмножеств банаховых пространств (П. А. Бородин, Б. Б. Беднов, Н. П. Стрелкова и др.).

По классической теореме Хелли если $\dim X = n$, то $X \in ((n+2).(n+1).I.P)$; как следствие, любое одно- или двумерное пространство лежит в классе $(4.3.I.P)$. Следовательно, $\oplus_\infty$-суммы таких пространств также обладают свойством $(4.3.I.P)$. О. Лима [230] установил и обратное утверждение. Таким образом

$$X \in (4.3.I.P) \iff X = X_1 \oplus_\infty \dots \oplus_\infty X_r, \quad \text{где} \quad \dim X_i \leqslant 2.$$

Отсюда и из (3.14) вытекает следующее утверждение.

Предложение 3.2. *В классе конечномерных полиэдральных пространств следующие свойства эквивалентны*:

а) $X \in (BM)$;
б) $X \in (4.3.I.P)$.

Отсюда, с учетом того, что если $X \in (4.3.I.P)$, $\dim X < \infty$, то $X \in (\infty.3.I.P)$ (см. Лима [229], Болтянский, Мартини, Солтан [142], § VIII, теорема 5), то мы имеем следующий результат: если $X \in (BM)$ конечномерно и полиэдрально, то $X \in (\infty.3.I.P)$).

Стоит добавить, что пространство $X \in \ell^\infty(n)$ лежит в классе (BM) и удовлетворяет более сильному свойству пересечения $(4.2.I.P)$, причем пространства $X \in \ell^\infty(n)$ в точности составляют класс конечномерных $(4.2.I.P)$-пространств (Хансен и Лима [205]).

Отметим ещё одно свойство конечномерных полиэдральных (BM)-пространств.

Напомним, что замкнутое ограниченное выпуклое множество M называется *множеством Мазура* (см. [201], [238]), если выполняется следующее свойство отделимости: для любой гиперплоскости H, находящейся на положительном расстоянии от K, найдется шар D такой, что $M \subset D$ and $H \cap D = \varnothing$. Линейное нормированное пространство, в котором класс множеств Мазура совпадает с классом пересечений замкнутых шаров, называется *пространством Мазура* (такой класс пространств введен А. С. Гранеро и др. [201], [238]). Пространства Мазура естественно возникают в связи с вопросом об устойчивости пересечений выпуклых подмножеств банахова пространства.

Предложение 3.3. *В классе конечномерных полиэдральных пространств следующие свойства эквивалентны*:

а) $X \in (BM)$;
б) X *является пространством Мазура.*

Доказательство предложения 3.3. Согласно [238; следствие 4.2] конечномерное полиэдральное пространство X является пространством Мазура если и только если семейство $\mathcal{M}_X$ пересечений замкнутых шаров в X устойчиво – это означает по определению, что $\overline{C+D} \in \mathcal{M}_X$ (замыкание векторной суммы множеств C и D), если $C, D \in \mathcal{M}_X$. Далее (см. [238; теорема 3.2]), в конечномерном полиэдральном пространстве семейство $\mathcal{M}_X$ устойчиво если и только если X представимо в виде (3.14). Для окончания доказательства остается вспомнить, что конечномерные полиэдральные (BM)-пространства характеризуются свойством (3.14). □

Следующий результат (Алимов [11]) доказан в Брауном [156] в частном случае $X = \ell^\infty(n)$.

Предложение 3.4. c_0, c, ℓ^∞ *являются* (BM)*-пространствами.*

Доказательство предложения 3.4. Пусть $X = c_0$, c или ℓ^∞. Рассмотрим $x \in X$, $\|x\| = 1$ и зафиксируем произвольно точку $y \in X$ такую, что

$$[x, x-y] \cap \mathring{B}(0, \|x\|) = \varnothing. \tag{3.15}$$

Проверим, что выполнено (3.13).

Для простоты считаем, что $x^{(i)} \geqslant 0$ для всех i. Докажем, что найдется номер j такой, что $y^{(j)} < 1$ (без этого предположения нам следовало бы установить существование такого i, что $y^{(i)} < 1$ в случае $x^{(i)} \geqslant 0$ или $y^{(i)} > -1$ в случае $x^{(i)} < 0$.)

Предположим противное: пусть $y^{(i)} \geqslant 1$ для любого $i \in \mathbb{N}$. Рассмотрим точку $x_\alpha = x - \alpha y \in (x, x-y)$, $0 < \alpha < 1$. Тогда $x_\alpha^{(i)} \leqslant 1 - \alpha$, $x_\alpha^{(i)} \geqslant x^{(i)} - \alpha\|y\| \geqslant -\alpha\|y\|$. Если $\alpha \to 0$, то надуйся $\alpha_0 > 0$ и $0 < \delta < 1$ такие, что $-\alpha_0\|y\| > -1 + \delta$. Поэтому

$$\|x_{\alpha_0}^{(i)}\| \leqslant \min\{1-\delta, 1-\alpha_0\},$$

откуда $\|x_{\alpha_0}\| < 1$. Но $x_{\alpha_0} \in (x, x-y)$ – противоречие с (3.15).

По доказанному найдется такой номер j, что $y^{(j)} < 1$. Определим точку u такую, что $u^{(i)} = x^{(i)}$ для $i \neq j$ и $u^{(j)} = y^{(j)}$. Ясно, что $u \in X$. Из равенства $\mathrm{m}(\cdot,\cdot) = [\![\cdot,\cdot]\!]$ следует, что $u \in \mathrm{m}(x,y)$ и $[u,x] \subset \mathrm{m}(x,y)$. Пусть $u_\beta = \beta x + (1-\beta)u$, $0 < \beta < 1$. Тогда

$$-(1-\beta)\|y\| \leqslant (1-\beta)y^{(j)} \leqslant u_\beta^{(j)} < \beta x^{(j)} + (1-\beta) \leqslant 1.$$

Отсюда вытекает, что $u_\beta \in B(0,1)$ для всех достаточно больших $\beta \to 1$. Следовательно, $u_\beta \in (\mathrm{m}(x,y) \setminus \{x\}) \cap B$, что и требуется. $\square$

3.2. Монотонная линейная связность и солнечность связных по Менгеру множеств в банаховых пространствах. Мы показываем, что в широком классе банаховых пространств (в частности, в сепарабельных) ограниченно компактное (ограниченно слабо компактное) m-связное (связное по Менгеру) множество монотонно линейно связно и является солнцем. Далее, показывается, что пересечение ограниченно компактного монотонно линейно связного (m-связного) множества с замкнутым шаром клеточноподобно (имеет шейп точки) и, в частности, ациклично (в конечномерном случае – стягиваемо) и является солнцем. Утверждается, что ограниченно слабо компактное m-связное множество монотонно линейно связно.

Основными результатами о связи классов m-связных и монотонно линейно связных множеств и их геометрически-топологических свойствах являются теоремы 3.2 и 3.3. Необходимость наложения на множество тех или иных ограничений (в теоремах 3.2 и 3.3 таким ограничением является компактность (сильная или слабая)) следует из примера Франчетти–Роверси (см. (3.7)) m-связного множества, являющегося дизъюнктным объединением двух выпуклых замкнутых множеств.

Теорема 3.2. *Пусть X – сепарабельное банахово пространство и пусть множество $M \subset X$ – замкнуто и* m*-связно. Предположим, что выполнено хотя бы одно из условий*:

a) *M ограниченно компактно (в норме $\|\cdot\|$ пространства X)*;
b) *M $|\cdot|$-замкнуто и $\mathrm{m}(x,y)$ $|\cdot|$-компактно для любых $x,y \in X$*;
c) *$\mathrm{m}(x,y)$ $\|\cdot\|$-компактно для любых $x,y \in X$.*

Тогда M монотонно линейно связно.

Если вдобавок M ограниченно компактно, то M экстремально ограниченно клеточноподобно и, в частности, B-клеточноподобно, B-ациклично (относительно любой непрерывной теории (ко)гомологий) и является солнцем.

Если X конечномерно, то, дополнительно, M экстремально стягиваемо (в частности, P- и B-стягиваемо) и на множество M существует непрерывная ε-выборка для всех $\varepsilon > 0$.

В теореме 3.2 экстремальная ограниченная клеточноподобность понимается следующим образом: если пересечение множества M с брусом ограничено, то оно клеточноподобно.

В качестве следствия из теоремы 3.2 вытекает следующее утверждение, полученное Брауном [156].

Следствие 3.3. *В конечномерном линейном нормированном пространстве замкнутое* m*-связное множество (монотонно линейно связное множество) является солнцем.*

Рассмотрим ещё одно применение теоремы 3.2.

Пусть $\varepsilon > 0$, $M \subset X$. Отображение $\varphi : X \to M$ называется *мультипликативной (аддитивной) ε-выборкой*, если для всех $x \in X$ имеет место неравенство

$$\|x-\varphi(x)\| \leqslant (1+\varepsilon)\rho(x, M) \quad (\text{соответственно } \|x-\varphi(x)\| \leqslant \rho(x, M)+\varepsilon).$$

Из классической теоремы Майкла о селекции следует, что для всех $\varepsilon > 0$ существует непрерывная мультипликативная (аддитивная) ε-выборка на любое выпуклое замкнутое подмножество линейного нормированного пространства.

Для $M \subset X$ и произвольного $\delta > 0$ положим

$$\mathring{P}^{\delta}_{M}x := \{y \in M \mid \|x-y\| < \rho(x, M) + \delta\}.$$

По определению подмножество $A \subset X$ называется *ретрактом* множества X, если существует непрерывное отображение $r : X \to A$, называемое ретракцией, такое, что $r|_A = \mathrm{id}\,|_A$, т.е. тождественное отображение id_A допускает непрерывное продолжение на все пространство X. Хорошо известно, что в конечномерном пространстве граница шара не является ретрактом шара. Однако в любом бесконечномерном пространстве сфера является липшицевой ретракцией шара [135; Corollary 3.5].

Напомним следующий общий результат (Царьков [109]), в котором дается характеризация замкнутых множеств в банаховых пространствах, для которых для любого $\varepsilon > 0$ найдется непрерывная ε-выборка.

Теорема 3.A. *Пусть X – банахово пространство, $M \subset X$ – непусто и замкнуто. Тогда следующие условия равносильны:*

a) $\mathring{P}_M^\delta x$ *является ретрактом шара для любых $x \in X$ и $\delta > 0$;*
b) $\mathring{P}_M^\delta x$ *стягиваемо по себе в точку для любых $x \in X$ и $\delta > 0$;*
c) M $\mathring{B}$*-бесконечно связно;*
d) M $\mathring{B}$*-стягиваемо,*
e) *Для любого $\varepsilon > 0$ существует непрерывная ε-выборка на M;*
f) *Для любой положительной полунепрерывной снизу функции $\psi : X \to (0, +\infty)$, $\psi(x) > \rho(x, M)$ $(x \in X)$, существует такое отображение $\varphi \in C(X, M)$, что $\|\varphi(x) - x\| < \psi(x)$ для всех $x \in X$;*
g) *Для любой полунепрерывной снизу функции $\theta : X \to (1, +\infty)$ существует такое отображение $\varphi \in C(X, M)$, что $\|\theta(x) - x\| \leqslant \theta(x)\rho(x, M)$ для всех $x \in X$.*

Отсюда видно, что непрерывность ε-выборки для всех $\varepsilon > 0$ (или обобщенной ψ-выборки) влечет очень жесткое структурное ограничение на множество.

Из теорем 3.2 и 3.A вытекает, что метрическая проекция на m-связное (монотонно линейно связное) замкнутое подмножество конечномерного пространства обладает непрерывной мультипликативной (аддитивной) ε-выборкой для всех $\varepsilon > 0$. По-видимому, можно надеяться, что аналогичный результат верен и в бесконечномерном случае для аппроксимативно компактных множеств.

Для пространств с линейной вкладываемостью шаров (см. § 3.5) и в частности, для в пространств $\ell^1(n)$, $C(Q)$, Q – метрический компакт и $C_0(Q)$, теорема 3.2 частично усиливает результаты Балашова и Иванова (теорема 3.D ниже; см. также [31], теорема 2.9 и лемма 4.18) о линейной связности R-слабо выпуклых (по Виалю) множеств. Именно, в пространствах с линейной вкладываемостью шаров пересечение R-слабо выпуклого множества с замкнутым или открытым шаром m-связно (см. теоремы 3.9 и 3.10 в § 3.5), а в случае замкнутости – монотонно линейно связно.

Замечание 3.3. С. В. Конягин [74] установил, что в случае, когда множество представляет собой дробно-рациональные функции $\mathcal{R}_{n,m}$ в

$C[0,1]$ или их обобщения

$$R_{V,W} = \{p/q \mid p \in V, \quad q \in W\}$$

в $C(Q)$ (где Q – связный хаусдорфов компакт, V, W – подпространства в $C(Q)$, причем для некоторого $w \in W$ выполнено $w(t) \neq 0$ для любого $t \in Q$), то непрерывная ε-выборка существует для всех $\varepsilon > 0$ (хотя метрическая проекция на $\mathcal{R}_{m,n}$ всегда имеет точки разрыва за исключением вырожденных случаев; см. также К. С. Рютин [90], Д. Реповш и П. В. Семенов [246; § 6.4], [247] и Д. Вулберт [265]). Отсюда и из теоремы 3.A вытекает $\mathring{B}$-стягиваемость множеств $\mathcal{R}_{m,n}$ и $R_{V,W}$ соответственно, в $C[0,1]$ и $C(Q)$ (Q – связный компакт, V, W – подпространства). Более ранний результат Вулберта [264], [265] утверждает меньше: множество $\mathcal{R}_{m,n}$ является $\mathring{B}$-связным (а значит, $\mathring{B}$-линейно связным по теореме Царькова [103]). Отметим, что фактически Вулберт [265] установил B-связность $\mathcal{R}_{m,n}$, при этом его рассуждения переносятся на случай $R_{V,W}$ с произвольными выпуклыми V, W. Соответственно, мы утверждаем, что $R_{V,W}$ B-линейно связно и, более того, монотонно линейно связно (а значит, экстремально монотонно линейно связно, см. [126; § 3]). Как следствие, отсюда и из теоремы 3.A вытекает, что множество $R_{V,W}$ является B-стягиваемым, а в случае замкнутости, B-ретрактом (последнее означает, что пересечение $R_{V,W}$ с любым замкнутым шаром пусто или является ретрактом шара).

Следует отметить, что множество дробно-рациональных функций $\mathcal{R}_{m,n}$ не является ограниченно слабо компактным в $C[0,1]$.

Применительно к $R_{V,W}$ из теоремы 3.2 в ряде частных случаев можно извлечь следующее. Рютин [90] при исследовании вопроса равномерной непрерывности оператора почти наилучшего обобщенного рационального приближения построил ряд примеров конечномерных подпространств V, W, для которых пересечение $R_{V,W} \cap B$ компактно в $C(Q)$ (Q – связный метрический компакт), где

$$R_{V,W} = \operatorname{cl}\{v/w \mid v \in V, \quad w \in W, \quad w > 0 \ \text{ на } Q\}.$$

По теореме Рютина [90] для любого $\varepsilon > 0$ существует равномерно непрерывная мультипликативная ε-выборка $\varphi : B \to R_{V,W}$, что ввиду теоремы 3.A дает $\mathring{B}$-стягиваемость пересечения $B \cap R_{V,W}$. Далее, для произвольных выпуклых V, W известно, что $R_{V,W}$ является строгим протосолнцем (Брозовский и Вегман [150], Ватсон и Чонг [162]). Соответственно, по теореме 4.15 пересечение $R_{V,W} \cap B$ является компактным строгим солнцем, по теореме 3.5 – монотонно линейно связно, а по теореме 3.2 – P- и B-клеточноподобно. Остается открытым вопрос о B-стягиваемости множеств $\mathcal{R}_{m,n}$ и $R_{V,W}$.

Из теоремы 3.2 вытекает следующее следствие.

Следствие 3.4. *Пусть X – банахово пространство из класса $(MeI) \cap (Ex\text{-}w^*s)$ (в частности X – сепарабельное банахово пространство) и пусть множество $M \subset X$ замкнуто. Предположим, что для некоторого $x \notin M$ $P_M x$ компактно и* m*-связно. Тогда $P_M x$ монотонно линейно связно, экстремально ограниченно клеточноподобно (в частности, P- и B-клеточноподобно), экстремально ограниченно ациклично (в частности, P- и B-ациклично) и является солнцем.*

В этой связи отметим, что

$$\text{если } M \subset X \in (MeI) \ \text{ m-связно, то } P_M x \text{ также m-связно.}$$

Действительно, пусть $u, v \in P_M x$. Так как M m-связно, то найдется $z \in \mathrm{m}(u,v) \cap M$, $z \neq u, v$. Предположим, что $z \notin S(x, \|x-u\|)$. Поскольку $\operatorname{ext} S^*$ является границей для X, то любую точку вне замкнутого шара (в нашем случае $B(x, \|x-u\|)$) всегда можно отделить от него экстремальным функционалом. Соответственно, $z \notin [\![u,v]\!]$. Получаем противоречие, поскольку $z \in \mathrm{m}(u,v)$, а в $X \in (MeI)$ всегда выполнено $\mathrm{m}(\cdot,\cdot) = [\![\cdot,\cdot]\!]$.

Для слабо компактных множеств мы имеем следующий результат.

Теорема 3.3. *Пусть X – сепарабельное банахово пространство и пусть $\varnothing \neq M \subset X$ ограниченно слабо компактно. Предположим, что M* m*-связно. Тогда M монотонно линейно связно.*

В теореме 3.2 первое утверждение идейно восходит к [188]. Монотонная линейная связность установлена в [12] (и также вытекает из теоремы 3.3), а оставшиеся утверждения следуют из леммы 3.3, которая будет доказана ниже. Конечномерный случай вытекает из п. а) и теоремы Брауна [157], согласно которой пересечение m-связного замкнутого подмножества конечномерного X с замкнутым шаром n-связно для всех $n \in \mathbb{Z}_+$ (т.е. каждое отображение во множество из k-сферы, $k \leqslant n$, непрерывно продолжается до отображения из $(k+1)$-мерного шара). Отсюда и из известной характеризации абсолютных ретрактов (см., например, [209;

Theorem 11.1]), M стягиваемо и локально стягиваемо. Отметим [11], что условие b) теоремы 3.2 *a fortiori* выполнено в пространстве $X = c_0$.

Нам потребуется следующий вспомогательный результат.

Напомним, что множество M называется *метрически выпуклым* или *d-выпуклым* (по Менгеру) [236] относительно метрики d, если для любых различных точек $x, y \in M$ множество $M \setminus \{x, y\}$ содержит точку z, находящуюся d-между x и y, т.е. $d(x, y) = d(x, z) + d(z, y)$.

Следующий результат принадлежит Менгеру [236], см. также [197; p. 24].

Лемма 3.A. *Пусть (Y, d) – d-выпуклое полное метрическое пространство. Тогда для любых $x, y \in Y$ существует изометрия $f : [0, d(x, y)] \to Y$ такая, что $f(0) = x$ и $f(d(x, y)) = y$. Как следствие, Y линейно связно.*

Доказательство теоремы 3.3. Достаточно рассмотреть ограниченное множество M. Хорошо известно (см., например, [182; Proposition 3.107]), что слабо компактное подмножество сепарабельного банахова пространства метризуемо, причем топология, порождаемая метрикой на M совпадает со слабой топологией на M. Также известно, что слабо компактное подмножество банахова пространства слабо полно (секвенциально слабо полно). В силу теоремы 3.1 в пространствах класса (*Ex-w^*s*), а следовательно, и в любых сепарабельных пространствах, w-полнота влечет $|\cdot|$-полноту относительно ассоциированной по Брауну нормы $|\cdot|$. Теперь для применения леммы 3.A осталось заметить, что в сепарабельном пространстве m-связность множества эквивалентна его $|\cdot|$-выпуклости (см. лемму 3.1).

Итак, по лемме 3.A любые две точки из M соединяются дугой $k(\,\cdot\,)$, осуществляющей изометрию. Применяя лемму 3.1 получаем, что $f_i(k(t))$ является монотонной функцией по t для каждого $i \in I$. Пусть теперь $f \in \operatorname{ext} S^*$. Так как X сепарабельно, то существует подпоследовательность (f_i) из F, w^*-сходящаяся к f. Поэтому функция $f(k(t))$ также является монотонной. Итак, любые две точки из M соединяются монотонной дугой, что и требуется. Теорема 3.3 доказана. $\square$

Пусть пространство X лежит в классе (*MeI*) и (*Ex-w^*s*) и пусть $F = (f_i) \subset \operatorname{ext} S^*$ – w^*-плотное в $\operatorname{ext} S^*$ семейство из определения класса (*Ex-w^*s*). Для каждого $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим ограниченный линейный оператор $s_n : X \to \ell^\infty(n)$, определенный как

$$s_n(x) = \bigl(f_1(x), \dots, f_n(x)\bigr).$$

Отметим, что всегда $\|s_n(x)\| \leqslant \|x\|$ и $\|s_n(x)\| \to \|x\|$ при $n \to \infty$. Последнее неравенство следует из того, что $\operatorname{ext} S^*$ является границей Джеймса для пространства X, т.е. $\|x\| = \max\{f(x) \mid f \in \operatorname{ext} S^*\}$.

Лемма 3.2. *Пусть X – банахово пространство из класса $(MeI) \cap$ $(Ex\text{-}w^*s)$ (в частности, X – сепарабельное банахово пространство) и пусть $\varnothing \ne M \subset X$ ограниченно компактно. Тогда*:

1) *Если M m-связно в X, то $s_n(M)$ монотонно линейно связно в $\ell^\infty(n)$ для всех $n \in \mathbb{N}$;*
2) *Если $s_n(M)$ m-связно в $\ell^\infty(n)$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то M монотонно линейно связно в X.*

Доказательство леммы 3.2. 1) Достаточно рассмотреть случай, когда M компактно. Требуемое утверждение для $s_n(M)$ следует из леммы 3.1 с учетом того, что замкнутое m-связное подмножество конечномерного пространства монотонно линейно связно.

2) Предположим теперь, что $s_n(M)$ m-связно в $\ell^\infty(n)$ для всех n. Пусть $x, y \in M$, $x \ne y$. Отсюда следует, что существует $\nu > 0$ такое, что если $n \geqslant \nu$, то $\|s_n(x) - s_n(y)\| \geqslant \varepsilon > 0$. Поскольку $s_n(M)$ m-связно, то, при необходимости переходя к подпоследовательностям, выберем такую точку $z_n \in M$, что $s_n(z_n) \in \mathrm{m}\bigl(s_n(x), s_n(y)\bigr)$ и

$$\|s_n(z_n) - s_n(x)\| = \|s_n(z_n) - s_n(y)\| = \frac{1}{2}\|s_n(x) - s_n(y)\| \geqslant \frac{\varepsilon}{2} > 0.$$

Последнее равенство следует из непрерывности в силу леммы 3.A, примененной к замкнутому m-связному множеству $s_n(M)$. Устремляя $n \to \infty$ в силу компактности M имеем, что $z_n \to z \in M$. Ясно, что $\|s_n(z_n - x)\| \to \|z - x\|$ и $\|s_n(z_n - y)\| \to \|z - y\|$. Отсюда $z \ne x$, $z \ne y$. Остается показать, что $z \in \mathrm{m}(x, y)$. При фиксированном $n \in \mathbb{N}$ из леммы 3.1 вытекает, что

$$\min[f_i(x), f_i(y)] \leqslant f_i(z_n) \leqslant \max[f_i(x), f_i(y)], \qquad i = 1, \dots, n,$$

поскольку $s_n(z_n) \in \mathrm{m}(s_n(x), s_n(y))$. Устремляя $n \to \infty$, получаем:

$$\min[f_i(x), f_i(y)] \leqslant f_i(z) \leqslant \max[f_i(x), f_i(y)], \qquad i \in I,$$

откуда $z \in \mathrm{m}(x, y)$ по лемме 3.1. Теперь монотонная линейная связность m-связного множества M обеспечивается теоремой 3.3. $\square$

Отметим, что п. 2) леммы 3.2 не используется при доказательстве теоремы 3.2 и леммы 3.3.

Лемма 3.3. *Пусть* $X \in (MeI) \cap (Ex\text{-}w^*s)$ *– банахово пространство (в частности, X сепарабельно или $X = \ell^\infty$) и пусть множество $\varnothing \neq M \subset X$ ограниченно компактно и* m*-связно. Тогда M P- и B-клеточноподобно, т.е. каждое из множеств*

$$P_M x, \quad M \cap B(x, r), \quad x \in X, \quad r > 0,$$

клеточноподобно. В частности, множество M P- и B-ациклично (относительно любой непрерывной теории (ко)гомологий).

Прежде, чем переходить к доказательству леммы 3.3, напомним, что *обратной системой* (*обратным спектром* – если система счетна) *топологических пространств* (см., например, [204; p. 56]) называется семейство $\mathcal{S} = \{X_\alpha, \pi_\alpha^\beta, \Sigma\}$, где множество Σ частично упорядочено отношением $\prec$, X_α – топологическое хаусдорфово пространство и $\pi_\alpha^\beta : X_\beta \to X_\alpha$ – непрерывное отображение для любых $\alpha \prec \beta$, при этом $\pi_\alpha^\alpha = \mathrm{id}_{X_\alpha}$ и $\pi_\alpha^\beta \pi_\beta^\gamma = \pi_\alpha^\gamma$ для всех $\alpha \prec \beta \prec \gamma$. Подпространство произведения $\prod_{\alpha\in\Sigma} X_\alpha$ называется обратным пределом системы $\mathcal{S}$ и обозначается

$$\varprojlim \mathcal{S} = \left\{ (x_\alpha) \in \prod_{\alpha\in\Sigma} X_\alpha \;\middle|\; \pi_\alpha^\beta(x_\beta) = x_\alpha \ \text{ для всех } \ \alpha \prec \beta \right\}$$

Если $\pi_\alpha : \varprojlim \mathcal{S} \to X_\alpha$ – ограничение проекции $p_\alpha : \prod_{\alpha\in\Sigma} X_\alpha \to X_\alpha$ на ось α (каноническая проекция), то $\pi_\alpha = \pi_\alpha^\beta \pi_\beta$ для всех $\alpha \prec \beta$,

Нам потребуется следующий известный результат, в котором первое утверждение содержится, например, в [177], а второе получено в [189] (см. также [129]). При этом утверждение a) является следствием классической теоремы А. Н. Тихонова о компактности; утверждение b) хорошо известно и принадлежит А. Г. Курошу и Н. Е. Стинроду.

Лемма 3.B. 1) *Пусть $\mathcal{S} = \{X_\alpha, \pi_\alpha^\beta, \Sigma\}$ – обратная система. Тогда предел $\varprojlim \mathcal{S}$ является замкнутым подмножеством произведения $\prod_{\alpha\in\Sigma} X_\alpha$. Далее, предположим, что для всякого $\alpha \in \Sigma$*

a) *X_α компактно, тогда предел $\varprojlim \mathcal{S}$ компактен;*
b) *X_α компактно и непусто, тогда $\varprojlim \mathcal{S}$ компактно и непусто;*
c) *X_α является континуумом, $\varprojlim S$ является континуумом;*
d) *X_α компактно и ациклично*[6]*, тогда предел $\varprojlim \mathcal{S}$ компактен и ацикличен;*

e) X_α *метризуемо и* Σ *счетно, то предел* $\varprojlim \mathcal{S}$ *метризуем.*

2) *Если* $\mathcal{S} = \{X_n, \pi_n^p, \mathbb{N}\}$ *– обратный спектр и каждое* X_n *компактно и клеточноподобно, то обратный предел* $\varprojlim \mathcal{S}$ *также компактен и является клеточноподобным множеством.*

Доказательство леммы 3.3. Достаточно рассмотреть случай, когда M компактно. Пусть Ω – семейство всех конечных подмножеств из $F \subset \operatorname{ext} S^*$. Поскольку множество конечных последовательностей натуральных чисел счетно, то Ω счетно. Множество Ω направлено по включению, т.е. направлено отношением $\prec$, определенным так: $A \prec B$ в том и только том случае, когда $A \subset B$. Для $A \in \Omega$ определим отображение $s_A : X \to \ell^\infty(A)$ следующим образом:

$$s_A(x) = \{f(x) \mid f \in A\}.$$

Ясно, что s_A – линейный ограниченный оператор. Если $A, B \in \Omega$, $A \subset B$, то имеется естественный оператор сужения $\ell^\infty(B) \to \ell^\infty(A)$ и, следовательно, имеется естественное отображение сужения s_{BA}. Хорошо известно, что семейство $\{s_A \mid A \in \Omega\}$ образует обратную систему по отношению к отображениям сужения. По п.1) леммы 3.B множества $s_A(M)$ являются компактными m-связными подмножествами пространства $\ell^\infty(A)$ и следовательно, по теореме Брауна [155; Theorem 1] бесконечно связными (и, следовательно, клеточноподобными и ацикличными множествами).

В теории обратных спектров хорошо известна следующая конструкция (см., например, [22], предложение 4.4, стр. 176). Пусть $(X, \pi) = (X_\alpha, \pi_\alpha^\beta, \Sigma)$ – обратная система множеств, а Z – произвольное фиксированное множество. Пусть, далее, для каждого $\alpha \in \Sigma$ задано отображение $g_\alpha : Z \to X_\alpha$, причем эти отображения таковы, что $\pi_\alpha^\beta g_\beta = g_\alpha$ всякий раз, когда $\alpha \leqslant \beta$. Тогда оказывается, что существует, и притом единственное, отображение $g : Z \to X_\infty := \varprojlim (X, \pi)$, обладающее свойством $\pi_\alpha \circ g = g_\alpha$ при всех α. При этом, если Z – топологическое пространство и все g_α суть непрерывные отображения, то $g : Z \to X_\infty$ непрерывно.

Поскольку $\{s_A \mid A \in \Omega\}$ – обратная система, то имеет место суперпозиция отображений $s_A = s_{BA} \circ s_B$ для $A, B \in \Omega$, $A \subset B$, где s_{BA} – отображение сужения (см. [178; p. 428]). Отсюда отображение $g : M \to M_\infty := \varprojlim s_A(M)$ непрерывно (по сказанному выше) и инъективно (см. [178; (6.9)]).

[6]Относительно любой непрерывной теории когомологий.

Докажем, его сюръективность. Предположим, что

$$(x_A)_{A\in\Omega} \in \varprojlim s_A(M) \subset \prod_{A\in\Omega} s_A(M).$$

Для каждого $A \in \Omega$ выберем $y_A \in M$ таким образом, что $s_A(y_A) = x_A$. Тогда $(y_A)_{A\in\Omega}$ является сетью (направленностью) в M и, вследствие компактности M, имеет предельную точку $y \in M$. Остается доказать, что $s_A(y) = x_A$ для каждого $A \in \Omega$. Рассмотрим $A, B \in \Omega$, $B \supset A$. Тогда $s_A(y_B) = s_B(y_B)|_A = x_A$. Переходя к пределу по подсети получаем, что $s_A(y) = x_A$.

Итак, отображение $g : M \to M_\infty$ непрерывно и по доказанному выше является биекцией. Хорошо известно [204; p. 169], что любое отображение компактного пространства в хаусдорфово замкнуто. Как следствие, непрерывное отображение компактного пространства в хаусдорфово является гомеоморфизмом. Поскольку обратный предел M_∞ хаусдорфов [204; p. 171], то предыдущее утверждение применимо к нашей ситуации. Итак, M гомеоморфно M_∞.

Далее, хорошо известно, что клеточноподобность (равно как и ацикличность) является топологическим свойством [198; p. 439]. Поскольку $M \simeq M_\infty$, то из леммы 3.B следует, что M клеточноподобно (и, следовательно, ациклично), так как по упомянутой теореме Брауна каждое из $s_A(M)$ обладает таким свойством. При этом утверждение 2) леммы 3.B применимо в силу известного результата, состоящего в том, что множество конечных последовательностей натуральных чисел счетно. Лемма 3.3 доказана. $\square$

Замечание 3.4. Ответ на обратный вопрос о монотонной линейной связности B-ацикличных (P-ацикличных) множеств в общем случае неизвестен. Отметим, что для любого $n \geqslant 3$ можно построить пример конечномерного пространства X_n, в котором существует не монотонно линейно связное чебышёвское множество (конечно, являющееся солнцем). Действительно, рассмотрим конечномерные пространства X_n со свойством $\overline{\operatorname{ext}} S^* = S^*$. Р. Фелпс [243] показал, что свойство $\overline{\operatorname{ext}} S^* = S^*$ выполнено для пространства X_n если и только если каждое выпуклое ограниченное замкнутое подмножество X_n представимо как пересечение замкнутых шаров; как следствие, в таком пространстве монотонная линейная связность замкнутого множества равносильна его выпуклости.

Далее, для любого $n \geqslant 3$, Царьков [102] построил пример пространства X'_n со свойством $\overline{\operatorname{ext}}\, S^* = S^*$, содержащего *неограниченное* невыпуклое чебышёвское множество M' (при этом любое *ограниченное* чебышёвское множество в таком X'_n выпукло). Таким образом, M' служит примером *не монотонно линейно связного B-ацикличного* (P-*ацикличного*) *множества* (*чебышёвского солнца*). Далее, в пространстве X_n со свойством $\overline{\operatorname{ext}}\, S^* = S^*$ класс брусов совпадает с классом выпуклых замкнутых множеств (Алимов [125]). Соответственно, имея в нашем распоряжение невыпуклое чебышёвское солнце M' в X'_n, мы можем найти такую прямую (брус), пересечение которой с M' несвязно и, следовательно, не может быть солнцем, поскольку по известной теореме Кощеева–Брауна (см. [75], [157], а также стр. 25) любое солнце в конечномерном пространстве линейно связно.

В связи с этим же вопросом отметим, что Браун [156] ввел важный класс линейных нормированных пространств – так называемые (BM)-пространства (см. § 3.1.7), которые оказались очень естественными в задаче об m-связности солнц. Пространства класса (BM) (в частности, $\ell^\infty(n)$ и c_0) являются "хорошими", поскольку в них всякое ограниченно компактное солнце m-связно (см. [156], [11]) и, следовательно, монотонно линейно связно. Поскольку по теореме Власова ограниченно компактное P-ацикличное множество является солнцем, то в таких пространствах P-ацикличность влечет монотонную линейную связность. Также отметим [159], что в конечномерном *полиэдральном* пространстве X_n каждое солнце монотонно линейно связно если и только если $X_n \in (BM)$. Соответственно, $\ell^1(n) \notin (BM)$, $n \geqslant 3$, и поэтому в $\ell^1(n)$ существует не монотонно линейно связное солнце. Однако не известно, будет ли такое солнце P-ацикличным (или даже хотя бы P-связным).

3.3. Монотонная линейная связность произвольного солнца в c_0. Монотонная линейная связность солнц и чебышевских множеств в пространствах типа $C(Q)$. Устанавливается монотонная линейная связность произвольного солнца в пространстве c_0. Доказывается частично обратный результат: аппроксимативно компактное монотонно линейно связное подмножество пространства c_0 является солнцем. Строится пример монотонно линейно связного подмножества c_0, являющегося множеством существования, но не являющегося солнцем. Показывается, что ограниченно компактное строгое солнце, в частности ограниченно компактное чебышёвское множество, в $C(Q)$ (Q – метрический компакт) монотонно линейно связно, в частности, P-ациклично. Устанавливается, что монотонно линейно связное чебышёвское множество в произвольном линейном нормированном пространстве является солнцем.

Как следствие из теорем 3.2 и 3.5 вытекает, что ограниченно компактное строгое солнце в $C(Q)$ экстремально P- и B-клеточноподобно (в частности, P- и B-клеточноподобно), и значит, экстремально ограниченно ациклично (P- и B-ациклично) и ограниченно экстремально солнечно (в частности, P- и B-солнечно).

3.3.1. *Монотонная связность солнц в пространствах типа $C(Q)$.* Отправной точкой при исследовании монотонной связности в теории приближений служит теорема Браесса [144], утверждающая монотонную линейную связность строгих солнц в пространстве $\ell^\infty(n)$, а также следующий результат Беренса и Хетцельта [137] (формулируемый в наших терминах).

Теорема 3.B. *Непустое подмножество пространства $\ell^\infty(n)$ является солнцем тогда и только тогда, когда оно замкнуто и монотонно линейно связно.*

В следующей теореме [11] впервые найдено бесконечномерное пространство, не являющееся неквадратным, в котором **всякое** солнце связно (и даже, более того, монотонно линейно связно).

Теорема 3.4. 1) *Произвольное солнце в c_0 монотонно линейно связно.*

2) m-*связное (и, тем более, монотонно линейно связное) аппроксимативно компактное непустое подмножество пространства c_0 является солнцем.*

3) *Пространство c_0 содержит замкнутое монотонно связное множество, не являющееся δ-солнцем.*

Таким образом, для аппроксимативно компактного множества в c_0 его солнечность эквивалентна его m-связности (монотонной линейной связности). Мы докажем теорему 3.4 ниже.

Для случая $X = C(Q)$, Q – метризуемый компакт, результат Кощеева [75] о B-связности ограниченно компактных строгих солнц в банаховых пространствах можно усилить следующим образом (Алимов [12; теорема 3]).

Теорема 3.5. *Ограниченно компактное строгое солнце в пространстве $C(Q)$ монотонно линейно связно и B-клеточноподобно.*

Второе утверждение в теореме 3.5 частично обращает хорошо известную теорему Власова, согласно которой ограниченно компактное P-ацикличное подмножество банахова пространства является солнцем.

Поскольку ограниченно компактное чебышёвское множество является солнцем (см., например, Власов [50; теорема 4.4]), то из теоремы 3.5 мы получаем

Следствие 3.5. *Ограниченно компактное чебышёвское множество в $C(Q)$ монотонно линейно связно.*

Теорема 3.5 будет доказана ниже.

Нам потребуются следующие вспомогательные утверждения. Предложение 3.5 есть следствие того, что $(X, |\cdot|)$ является пространством Шура (следствие 3.2).

Предложение 3.5. 1) *Каждое из пространств c_0, c и ℓ^∞ не является полным по отношению к ассоциированной норме $|\cdot|$;*

2) *для любых $u, v \in c_0$ множество $\mathrm{m}(u, v)$ является полным пространством по отношению к $|\cdot|$.*

Предложение 3.6. *Пусть $u, v \in c_0$. Тогда*

1) $\mathrm{m}(u, v)$ *– компактное подмножество c_0;*
2) *если $M \subset c_0$ – замкнуто, то $\mathrm{m}(u, v) \cap M$ является $|\cdot|$-компактным множеством.*

Доказательство предложения 3.6. Утверждение 1) следует из (3.2) и критерия компактности в c_0. 2) Рассмотрим произвольную последовательность $(x_n) \subset M \cap \mathrm{m}(u, v)$. Пусть x – ее $\|\cdot\|$-предельная точка в $\mathrm{m}(u, v)$, существующая по 1). Так как M – замкнуто, то $x \in M \cap \mathrm{m}(u, v)$. Теперь $|\cdot|$-компактность M следует из неравенства $|y| \leqslant \|y\| \sum \alpha_i$, которое выполнено для любого $y \in c_0$. $\square$

Доказательство теоремы 3.4. Предположим противное и рассмотрим солнце $M \subset c_0$, не являющееся m-связным. Тогда по определению существуют различные точки $u, v \in M$ такие, что

$$\big(\mathrm{m}(u,v) \setminus \{u,v\}\big) \cap M = \varnothing. \tag{3.16}$$

Рассмотрим определенную в (3.8) ассоциированную норму $|\cdot|$ на c_0.

1. Для каждого $\varepsilon > 0$ положим

$$\mathcal{O}_\varepsilon(M) = \{x \in X \mid \rho(x, M) := \inf_{z \in M} \|x - z\| \leqslant \varepsilon\}, \quad A_\varepsilon = \mathrm{m}(u,v) \cap \mathcal{O}_\varepsilon(M).$$

Мы покажем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $x_\varepsilon \in A_\varepsilon$ такое, что

$$|x_\varepsilon - u| = |x_\varepsilon - v| = \frac{1}{2}|u - v|.$$

Отсюда будет следовать, что если $\bar{x}$ – $|\cdot|$-предельная точка для x_ε, существующая по предложению 3.6, то $\bar{x} \in (\mathrm{m}(u,v) \setminus \{u,v\}) \cap M$, что противоречит предположению (3.16).

Мы можем считать, что $\varepsilon < \frac{1}{2}\|u - v\|$. Если $0 < \theta < \varepsilon/\|u - v\|$, то $v + \theta(u - v) \in A_\varepsilon$ и

$$|(v + \theta(u - v)) - u| > \frac{1}{2}|u - v|.$$

Предположим, что $x_0 \in A_\varepsilon$, $x_0 \neq u, v$, $|x_0 - u| \geqslant \frac{1}{2}|u - v|$ и что y – солнечная точка (точка светимости) для x_0. Из (3.16) имеем $x_0 \notin M$, поэтому $y \neq x_0$. Для простоты обозначений считаем $x_0 = 0$.

2. Поскольку y – солнечная точка для 0 и $u \in M$, то $[y, u] \cap \mathring{B}(0, \|y\|) = \varnothing$ (см. Власов [50; лемма 3.1]); это эквивалентно тому, что $[y, y - (y - u)] \cap \mathring{B}(0, \|y\|) = \varnothing$. Так как по предложению 3.4 c_0 является (BM)-пространством, то из (3.13) следует, что

$$B(0, \|y\|) \cap (\mathrm{m}(y, y - u) \setminus \{y\}) \neq \varnothing,$$

что эквивалентно тому, что

$$B(y, \|y\|) \cap (\mathrm{m}(0, u) \setminus \{0, u\}) \neq \varnothing.$$

Предположим, что w содержится во множестве $B(y, \|y\|) \cap (\mathrm{m}(0, u) \setminus \{0, u\})$. Тогда $[0, w]$ тоже содержится в нем. Кроме того, $\|w - y\| \leqslant \|y\| \leqslant \varepsilon$, так что

$$[0, w] \subset \mathcal{O}_\varepsilon(M) \quad \text{и} \quad (0, w] \subset \mathrm{m}(0, u) \setminus \{0, u\},$$

откуда, по лемме 3.1,

$$|w' - u| < |u| \quad \text{для любой точки } \ w' \in (0, w]. \tag{3.17}$$

Рассмотрим

$$a_\varepsilon = \inf\Bigl\{|z-u| \Bigm| z \in A_\varepsilon, \quad |z-u| \geqslant \frac{1}{2}|u-v|\Bigr\}. \tag{3.18}$$

Так как M замкнуто, то $\mathcal{O}_\varepsilon(M)$ тоже замкнуто, откуда множество A_ε является $|\cdot|$-компактным по предложению 3.6. Ясно, что множество

$$\Bigl\{z \mid |z-u| \geqslant \frac{1}{2}|u-v|\Bigr\}$$

$|\cdot|$-замкнуто. Поэтому в (3.18) инфимум достигается – скажем, в точке x_ε. Отсюда $x_\varepsilon \in A_\varepsilon$ и $|x_\varepsilon - u| \geqslant \frac{1}{2}|u-v|$.

Далее,

$$a_\varepsilon = |u - x_\varepsilon| = \frac{1}{2}|u-v| = |v - x_e|,$$

иначе в противном случае (3.17) даст нам точку

$$w' \in \mathcal{O}_\varepsilon(M) \cap \mathrm{m}(u,v), \qquad |w'-u| \geqslant |u-v|/2,$$

и окажется, что w' находится $|\cdot|$-ближе к u, чем x_ε – противоречие с (3.18).

Докажем утверждение 2) в теореме 3.4. Пусть $0 \notin M$, $\rho(0,M) = 1$. Поскольку M аппроксимативно компактно, то $P_M 0 \neq \varnothing$ компактно; кроме того, множество

$$I = \{i \in \mathbb{N} \mid \text{существует точка } y \in P_M 0 \text{ такая, что } |y^{(i)}| = 1\}$$

непусто и конечно. Обозначим $k = \max\{i \mid i \in I\}$.

Для доказательства солнечности M в c_0 воспользуемся леммой 3.1, примененной к конечномерному пространству $\ell^\infty(k)$. Определим

$$\begin{gathered} \hat{M} = M \cap \{z \mid -1 < z^{(j)} < 1 \ \ \forall\, j \geqslant k+1\}, \\ M' = \operatorname{proj}_{\mathbb{R}^k} \hat{M} = \{z = (z^{(1)}, \dots, z^{(k)}) \in \mathbb{R}^k \mid z \in \hat{M}\}. \end{gathered} \tag{3.19}$$

По определению k имеем, что $P_M 0 \subset \hat{M}$ и, следовательно, $\operatorname{proj}_{\mathbb{R}^k}(P_M 0) \subset M'$, т. е. оба множества из (3.19) непусты, причем M' содержится в конечномерном координатном подпространстве $\mathbb{R}^k$.

Пусть $\hat{z} \in \hat{M}$. Понятно, что $\hat{M} \cap \mathring{B}_{c_0} = \varnothing$, откуда $|\hat{z}^{(i)}| > 1$ для некоторого i. Из (3.19) имеем, что $i \in \{1, \dots, k\}$. Это влечет, что $|\operatorname{proj}_{\mathbb{R}^k} \hat{z}^{(i)}| > 1$. Следовательно, $M' \cap \mathring{B}_{\mathbb{R}^k} = \varnothing$.

Рассмотрим замыкание $\operatorname{cl} M'$ множества M' в $\mathbb{R}^k$. Убедимся, что $P_{M'}0 = P_{\operatorname{cl} M'}0$. Для этого рассмотрим последовательность $(y_n') \subset M'$, $y_n' \to y' \in P_{\operatorname{cl} M'}0$. Выберем $\hat{y}_n \in \hat{M}$ таким образом, что $\operatorname{proj}_{\mathbb{R}^k} \hat{y}_n = y_n'$. Из (3.19) вытекает, что $\rho_{\mathbb{R}^k}(0, \operatorname{cl} M') = 1$. Имеем: $(\hat{y}_n)$ – минимизирующая последовательность из $\hat{M} \subset M$ для 0. Поскольку M аппроксимативно компактно, то $(\hat{y}_n)$ содержит сходящуюся к некоторой точке $y \in M$ подпоследовательность. Ясно, что $\|y\| = 1$, т. е. $y \in P_M 0$. Теперь из (3.19) имеем, что $y \in \hat{M}$. Окончательно, $\operatorname{proj}_{\mathbb{R}^k} y = y' \in M'$, что и требовалось доказать.

Норма пространства c_0 естественным образом индуцирует на $\mathbb{R}^k$ ℓ^∞-норму, поэтому отождествим $\mathbb{R}^k$ с пространством $\ell^\infty(k)$. Тогда m-связность замкнутого множества в $\ell^\infty(k)$ равносильна его $|\cdot|$-выпуклости относительно ассоциированной нормы (3.8) (в нашем случае в качестве ассоциированной нормы можно взять ℓ^1-норму).

Множество M по условию замкнуто и m-связно. Установим, что $\operatorname{cl} M' \subset \ell^\infty(k)$ будет (метрически) ℓ^1-выпуклым множеством. Пусть $u, v \in \operatorname{cl} M'$, $(u_n), (v_n) \subset M'$, $u_n \to u$, $v_n \to v$. Выберем точки $\hat{u}_n, \hat{v}_n \in \hat{M}$ таким образом, что $\operatorname{proj}_{\mathbb{R}^k} \hat{u}_n = u_n$, $\operatorname{proj}_{\mathbb{R}^k} \hat{v}_n = v_n$. По лемме 3.A для каждого n найдется геодезический сегмент (монотонная кривая) $\hat{k}_n(\cdot) \subset M$ (его длина равна расстоянию между соединяемыми им точками), соединяющий $\hat{u}_n$ и $\hat{v}_n$. Из равенства $\mathrm{m}(\cdot,\cdot) = [\![\cdot,\cdot]\!]$ имеем, что $\hat{k}_n(\cdot) \subset \hat{M}$ и что $k_n(\cdot) := \operatorname{proj}_{\mathbb{R}^k} \hat{k}(\cdot) \subset M'$ является монотонной дугой, соединяющей u_n и v_n. В силу монотонности по t координатных функций $k_n^{(i)}(\cdot)$, $i = 1, \dots, k$, для каждого n найдется точка $z_n \in k_n(\cdot)$ такая, что $|z_n - u_n| = |u_n - v_n|/2$. В $\mathbb{R}^k$ последовательность (z_n) обладает сходящейся подпоследовательностью. Пусть z – ее предельная точка. Тогда $|z - u| = |u - v|/2$ и $z \in \mathrm{m}(u, v)$ по лемме 3.1.

Итак, множество $\operatorname{cl} M' \subset \mathbb{R}^k$ замкнуто и ℓ^1-выпукло причем

$$\mathring{B}_{\mathbb{R}^k}(0,1) \cap \operatorname{cl} M' = \varnothing, \quad \rho_{\mathbb{R}^k}(0, M') = 1 \quad \text{и} \quad P_{\operatorname{cl} M'}0 = P_{M'}0.$$

Применяя лемму 3.1 имеем, что $\operatorname{cl} M'$ – солнце в $\ell^\infty(k)$. Пусть y_0' – солнечная точка из $\operatorname{cl} M' \subset \ell^\infty(k)$ для 0; по доказанному выше, $y_0' \in M'$. Пусть $y_0 \in \hat{M}$ такая точка, что $\operatorname{proj}_{\mathbb{R}^k} y_0 = y_0'$.

Переставляя при необходимости координаты $1,\dots,k$, без ограничения общности считаем, что $y_0' = (1,\dots,1,\eta^{(l+1)},\dots,\eta^{(k)})$. Тогда

$$y_0 = (1,\dots,1,\eta^{(l+1)},\dots,\eta^{(k)},\eta^{(k+1)},\dots), \text{ где } |\eta^{(j)}| < 1 \text{ для всех } j \geqslant l+1. \tag{3.20}$$

Так как $\operatorname{cl} M'$ – солнце в $\ell^\infty(k)$, то

$$\mathring{K}_{\mathbb{R}^k}(y_0',0) \cap M = \varnothing \tag{3.21}$$

по теореме 1.A; здесь, по (3.29) и (3.20)

$$\mathring{K}_{\mathbb{R}^k}(y_0',0) = \{z \in \mathbb{R}^k \mid z^{(i)} < 1 \text{ для всех } i = 1,\dots l\},$$
$$\mathring{K}(y_0,0) = \{z \in c_0 \mid z^{(i)} < 1 \text{ для всех } i = 1,\dots l\}.$$

Установим, что

$$\mathring{K}(y_0,0) \cap M = \varnothing. \tag{3.22}$$

Из (3.21) и (3.19) вытекает, что $\hat{M} \cap \mathring{K}(y_0,0) = \varnothing$. Предположим, что (3.22) неверно. Тогда найдется точка $v \in M \cap \mathring{K}(y_0,0)$, $v \notin \hat{M}$. Так как замкнутое множество M по условию m-связно, то по лемме 3.A найдется геодезический сегмент $k(\cdot) : [0,1] \to M$, соединяющий v и y_0; считаем $k(0) = v$, $k(1) = y_0$.

Обозначим $\underline{J} = \{j \in [l+1,k] \mid |v^{(j)}| \geqslant 1\}$, $\bar{J} = \{j > k \mid |v^{(j)}| \geqslant 1\}$. Поскольку $v \in M \setminus \hat{M}$, то $\bar{J} \neq \varnothing$; кроме того, $\bar{J}$ и $\underline{J}$ конечны. Положим

$$t^* = \max\{t \in [0,1] \mid \text{найдется номер } j \in \bar{J} \cup \underline{J} \text{ такой, что } |k^{(j)}(t)| \geqslant 1\}.$$

Поскольку $y_0 \in \hat{M}$ и кривая $k(\cdot)$ непрерывна, то $t^* < 1$.

Далее, пусть $\underline{J}^* = \{j \in \underline{J} \mid |k^{(j)}(t^*)| = 1\}$, $\bar{J}^* = \{j \in \bar{J} \mid |k^{(j)}(t^*)| = 1\}$. По крайней мере одно из этих множеств непусто.

Предположим, что $\bar{J}^* \neq \varnothing$. Тогда $\|k(t^*)\| = 1$. Имеем: $k(t^*) \in P_M 0$, но, в силу условия $\bar{J}^* \neq \varnothing$, это противоречит определению k.

Теперь считаем, что $\underline{J}^* \neq \varnothing$ ($\bar{J}^* = \varnothing$ по доказанному выше). Имеем: $v \in \hat{M}$. Но ранее доказано, что $v \notin \hat{M}$. Противоречие.

Итак, предположение, что $\mathring{K}(y_0,0) \cap M \neq \varnothing$ было неверно, откуда M – солнце в c_0 по теореме 1.A. Пример монотонно линейно связного множества существования в пространстве c_0, не являющегося α-солнцем, строится в примере 3.1. Теорема 3.4 доказана. $\square$

Пример 3.1. Построим пример монотонно линейно связного множества существования в пространстве c_0, не являющегося α-солнцем (и, следовательно, солнцем). Рассмотрим конус $K = \{x \mid x^{(i)} \leqslant 1, \quad i = 1, 2, \dots\}$ и в качестве искомого множества M рассмотрим пересечение K с единичной сферой:

$$M := K \cap S = \{x \in S \mid x^{(j)} = 1 \ \text{ для некоторого } j = j(x)\} \tag{3.23}$$

(число таких j, для которых $x^{(j)} = 1$, конечно). Любая точка из M является ближайшей для точки $0 \notin M$, $\rho(0, M) = 1$.

Пусть $s \in S$. Для $\sigma = \pm 1$ положим $\Sigma_\sigma = \{i \in \mathbb{N} \mid s^{(i)} = \sigma\}$. Ясно, что $\operatorname{card} \Sigma_\sigma < \infty$. Предположим, что

$$\mathring{K}(s, 0) \cap M = \varnothing. \tag{3.24}$$

В силу определения Σ_σ опорный конус $\mathring{K}(s, 0)$ имеет вид

$$\mathring{K}(s, 0) = \{x \in c_0 \mid x^{(i)} < 1, \ \ i \in \Sigma_1, \ \ x^{(i)} > -1, \ \ i \in \Sigma_{-1}\}.$$

Рассмотрим точку $v \in c_0$, где

$$v^{(i)} \in (-1, 1), \quad i \in \Sigma_{\pm 1}, \quad v^j = 1 \ \text{ при некотором } j \notin \Sigma_{\pm 1}.$$

Ясно, что $v \in \mathring{K}(s, 0)$, а в силу (3.23) имеем $v \in M$, что противоречит предположению (3.24). Таким образом,

$$\mathring{K}(s, 0) \cap M \neq \varnothing \quad \text{для любой точки } \ s \in S. \tag{3.25}$$

Следовательно, по теореме 1.А множество M не является α-солнцем (а значит, и солнцем). Используя (3.25) непосредственно проверяется, что замкнутый шар $B(0, 1-\varepsilon)$ нельзя поместить в замкнутый шар $B(u, R)$ сколь угодно большого радиуса R, $B(u, R) \cap M = \varnothing$. Отсюда M не является почти выпуклым множеством, а значит и не является δ- и γ-солнцем (Власов, [50; теорема 3.3]).

Покажем, что M монотонно линейно связно. Для $v \in M$ положим $J(v) = \{j \mid v^{(j)} = 1\}$. Пусть $x, y \in M$. Рассмотрим точку

$$z = (z^{(i)}), \quad \text{где } \ z^i = \begin{cases} 1, & \text{если } i \in J(x) \cup J(y), \\ x^{(i)} & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Ясно, что $[x, z] \cup [z, y] \subset M$. Покоординатная монотонность естественной параметризации ломаной $[x, z] \cup [z, y]$ следует из построения.

Для доказательства теоремы 3.5 нам потребуются несколько вспомогательных утверждений (Алимов [12]), имеющих самостоятельный интерес.

Для подпространства $L \subset C(Q)$ посредством $\pi(\cdot)$ обозначим фактор-отображение $\pi : C(Q) \to C(Q)/L$. Пусть $L \in \mathrm{cAff}^k(C(Q))$ – координатное (экстремальное) подпространство конечной коразмерности k. Иными словами,

$$L = \{x \mid x(\theta_1) = 0,\ \ldots,\ x(\theta_k) = 0\}$$

для некоторого выбора различных точек $\theta_1, \ldots, \theta_k \in Q$. Несложно видеть, что $C(Q)/L$ естественным образом отождествляется с $\ell^\infty(k)$,

$$\|\pi(x/L)\|_{C(Q)/L} = \|s_k(x)\|_{\ell^\infty(k)},$$

при этом мы отождествляем $\pi(\cdot) = s_k(\cdot)$, где $s_k(x) = (x(\theta_1), \ldots, x(\theta_k))$.

Теорема 3.6. *Пусть M – компактное строгое солнце в $C(Q)$ и пусть $L \subset \mathrm{cAff}^k(C(Q))$ – координатное подпространство конечной коразмерности k. Тогда $\pi(M)$ – компактное строгое солнце в фактор-пространстве $C(Q)/L$.*

Лемма 3.4. *Пусть $M \subset C(Q)$ – ограниченно компактное строгое солнце в $C(Q)$. Предположим, что $M \cap \mathring{B}(\theta, r) \neq \varnothing$ для некоторых $\theta \in C(Q)$, $r > 0$. Тогда $M \cap B(\theta, r)$ – компактное строгое солнце в $C(Q)$.*

Замечание 3.5. Условие $M \cap \mathring{B}(\theta, r) \neq \varnothing$ в лемме 3.4 нельзя заменить на условие $M \cap B(\theta, r) \neq \varnothing$. Действительно, автором [5] (см. также замечание 4.1) построен пример строгого солнца M в $\ell^\infty(3)$ такого, что $M \cap \mathring{B}(\theta, r) = \varnothing$, $M \cap B(\theta, r) \neq \varnothing$ для некоторого шара $B(\theta, r)$, однако $M \cap B(\theta, r)$ не является строгим солнцем (являясь, однако, солнцем) в $\ell^\infty(3)$.

При доказательстве леммы 3.4 нам потребуется следующий результат Брозовского–Вегмана (см., например, Брозовский и Вегман [150], Брозовский и Вебер [151], Брозовский [148], Зингер [256; § 5.3]). Подмножество $M \subset C(Q)$ называется *регулярным* (по Брозовскому–Вегману), если для любых $x, y \in M$ и для любого замкнутого множества $A \subset Q$ такого, что $\inf_{t \in A} |x(t) - y(t)| > 0$, элемент y содержится в замыкании множества

$$\big(v_n(t) - y(t)\big)\big(x(t) - y(t)\big) > 0 \quad \text{для всех} \quad t \in A. \tag{3.26}$$

В этом случае пишем $(x, y) \in \mathrm{Reg}(M)$.

Лемма 3.C. *Пусть $M \subset C(Q)$. Тогда M регулярно в том и только том случае, если M – строгое протосолнце (т.е. для любых точек $x \in X \setminus M$ и $y \in P_M x$ выполнено $y \in P_M[(1-\lambda)y + \lambda x]$ для всех $\lambda \geqslant 0$).*

В лемме 3.C не предполагается, что $P_M x$ непусто для любого x. Однако, если $P_M x \neq \varnothing$ для любого x, то строгое протосолнце M есть строгое солнце.

Мы также воспользуемся следующим техническим результатом (Алимов [12]). Пусть $w, u, v \in C(Q)$, $u, v \in B(w, R)$, $\|w - v\| < R$. $\delta > 0$ обозначим $A_\delta = \{t \in Q \mid |u(t) - v(t)| \geqslant \delta\}$. Рассмотрим множество $\mathring{\mathrm{m}}_\delta(u, v)$, состоящее из всех точек $z \in C(Q)$, для которых выполнено включение

$$z(t) \in \begin{cases} \big(u(t), v(t)\big), & t \in A_\delta; \\ \big(\min\{u(t), v(t)\} - \delta, \max\{u(t), v(t)\} + \delta\big), & t \in Q \setminus A_\delta. \end{cases} \tag{3.27}$$

Предложение 3.7. *Если $0 < 2\delta < R - \|w - v\|$, то $\mathring{\mathrm{m}}_\delta(u, v) \subset \mathring{B}(w, R)$.*

Доказательство предложения 3.7. Пусть $z \in \mathring{\mathrm{m}}_\delta(u, v)$ и $t \in A_\delta$. Тогда $z(t) \in (u(t), v(t))$. Отсюда следует

$$|z(t) - w(t)| < \max\{|u(t) - w(t)|, |v(t) - w(t)|\} \leqslant R,$$

что и требуется. Пусть теперь $t \in Q \setminus A_\delta$. Тогда $u(t) - w(t) + \delta \leqslant |u(t) - w(t)| + \delta \leqslant |u(t) - v(t)| + |v(t) - w(t)| + \delta < \delta + R - 2\delta + \delta = R$, поскольку $|u(t) - v(t)| < \delta$ и

$$|v(t) - w(t)| < R - 2\delta, \quad v(t) - w(t) \leqslant |v(t) - w(t)| + \delta < R - 2\delta.$$

Как следствие $z(t) \in (\min\{u(t), v(t)\} - \delta, \max\{u(t), y(t)\} + \delta)$ и, следовательно, $|z(t) - w(t)| < R$. Предложение 3.7 доказано. $\square$

Доказательство леммы 3.4. Поскольку M ограниченно компактно, то и $M \cap B(\theta, r)$ ограниченно компактно, откуда, очевидно, $P_{M \cap B(\theta, r)} z \neq \varnothing$ для любого $z \in C(Q)$. Без ограничения общности считаем, что $0 \notin M \cap B(\theta, r)$, $\rho(0, M \cap B(\theta, r)) = 1$, $y \in P_{M \cap B(\theta, r)}$. Для доказательства строгой солнечности пересечения $M \cap B(\theta, r)$ нам по теореме 1.A нужно показать, что $\mathring{K}(y, 0) \cap (M \cap B(\theta, r)) = \varnothing$.

Для краткости обозначим $B = B(0, 1)$, $\mathring{B} = \mathring{B}(0, 1)$.

Если $B \cap \mathring{B}(\theta, r) = \varnothing$, то, из (3.29) следует, что $\mathring{K}(y, 0) \cap B(\theta, r) = \varnothing$, что и требуется. Итак, далее считаем, что $B \cap \mathring{B}(\theta, r) \neq \varnothing$.

Предположим противное: пусть $x \in \mathring{K}(y,0) \cap (M \cap B(\theta,r))$. Сначала рассмотрим случай $x \in \mathring{B}(\theta,r)$.

Так как $x \in \mathring{K}(y,0)$, то $[x,y] \cap \mathring{B} \neq \varnothing$ (см. Власов [50; лемма 3.1]). Это означает, что точка $x_\alpha := \alpha x + (1-\alpha)y$ при малых $\alpha > 0$ содержится в шаре $\mathring{B}$ (и, понятно, в шаре $\mathring{B}(\theta,r)$. Зафиксируем такое малое α. Выберем $\delta > 0$ из условий $2\delta < 1 - \|x_\alpha\|$, $2\delta < r - \|x_\alpha - \theta\|$, и положим

$$A_\delta = \{t \in Q \mid |x_\alpha(t) - y(t)| \geqslant \delta\}.$$

Ясно, что $A_\delta \neq \varnothing$. По предложению 3.7, примененному к наборам $y = u$, $x_\alpha = v$, $w = 0$, $R = 1$ и $y = u$, $x_\alpha = v$, $w = \theta$, $R = r$, получим, что $\mathring{\mathrm{m}}_\delta(x_\alpha, y) \subset \mathring{B} \cap \mathring{B}(\theta,r)$.

Для точек $y, x \in M$ и замкнутого множества A_δ выберем, в соответствии с леммой 3.C, последовательность $(v_n) \subset M$, такую, что

$$v_n \to y, \quad (v_n(t) - y(t))\,(x(t) - y(t)) > 0 \quad \text{для всех} \quad t \in A_\delta.$$

Установим, что для больших n выполнено $v_n \in \mathring{\mathrm{m}}_\delta(x_\alpha, y)$. Действительно, по δ выберем номер N такой, что $\|v_n - y\| < \delta$ для всех $n \geqslant N$. Если $t \in A_\delta$ и $n \geqslant N$, то $|x_\alpha(t) - y(t)| \geqslant \delta$, откуда $v_n(t) \in (y(t), x_\alpha(t))$; а если $t \in Q \setminus A_\delta$, то, поскольку $\|v_n - y\| < \delta$, то для v_n выполнено

$$v_n(t) \in (\min\{x_\alpha(t), y(t)\} - \delta, \max\{x_\alpha(t), y(t)\} + \delta).$$

Итак,

$$v_n \in \mathring{\mathrm{m}}_\delta(x_\alpha, y), \qquad n \geqslant N.$$

Выше, однако показано, что $\mathring{\mathrm{m}}(x_\alpha, y) \subset \mathring{B} \cap \mathring{B}(\theta,r)$, откуда $v_n \in M$, $v_n \in B(\theta,r)$, $v_n \in \mathring{B}$ при $n \geqslant N$. Это противоречит тому, что $\rho(0, B(\theta,r) \cap M) = 1$.

Пусть теперь $\|x - \theta\| = r$, $x \in \mathring{K}(y,0) \cap M$. По доказанному выше мы считаем, что множество $\mathring{K}(y,0) \cap \mathring{B}(\theta,r)$ не содержит точек из M. По условию найдется точка $w \in \mathring{B}(\theta,r) \cap M$. Для числа $\beta > 0$ рассмотрим точку $w_\beta = \beta w + (1-\beta)x$. Поскольку точка x содержится в открытом множестве $\mathring{K}(y,0)$, то $w_\beta \in \mathring{K}(y,0)$ при всех малых $\beta > 0$. Зафиксируем такое β. Так как $x, w_\beta \in \mathring{K}(y,0)$, то по определению,

$$x, w_\beta \in \mathring{B}(-dy, (d+1)) \quad \text{при достаточно большом} \quad d > 0.$$

Выберем число δ из условий $0 < 2\delta < r - \|w_\beta\|$, $0 < 2\delta < d + 1 - \|-dy - w_\beta\|$. Положим

$$A_\delta = \{t \mid |x(t) - w_\beta(t)| \geqslant \delta\}.$$

Для точек $x, w \in M$ и замкнутого множества A_δ выберем, в соответствии с леммой 3.C, последовательность $(v_n) \subset M$, такую, что

$$v_n \to x, \qquad (v_n(t) - x(t))\,(w(t) - x(t)) > 0 \ \text{ для всех } \ t \in A_\delta.$$

Выберем номер N такой, что $\|v_n - x\| \leqslant \delta$ при $n \geqslant N$. Как и выше, несложно установить, что $v_n \in \mathring{\mathrm{m}}_\delta(x, w_\beta)$ при $n \geqslant N$. По предложению 3.7, примененному к наборам $x = u$, $w_\beta = v$, $w = \theta$, $R = r$ и $x = u$, $w_\beta = v$, $w = -dy$, $R = (d+1)$, получим, что $\mathring{\mathrm{m}}_\delta(w_\beta, x) \subset \mathring{B}(\theta, r) \cap \mathring{B}(-dy, (d+1))$, т.е. $\mathring{\mathrm{m}}_\delta(w_\beta, x) \subset \mathring{B}(\theta, r) \cap \mathring{K}(y, 0)$. Но $v_n \in M$, $v_n \in \mathring{\mathrm{m}}_\delta(x, w_\beta)$, откуда

$$v_n \in \mathring{B}(\theta, r) \cap \mathring{K}(y, 0).$$

Противоречие с тем, что множество $\mathring{K}(y, 0) \cap \mathring{B}(\theta, r)$ не содержит точек из M.

Итак, предположение, что $\mathring{K}(y, 0) \cap (M \cap B(\theta, r)) \neq \varnothing$ было неверно и $M \cap B(\theta, r)$ – строгое солнце в $C(Q)$. Лемма 3.4 доказана. $\square$

Доказательство теоремы 3.6. Отождествим $C(Q)/L$ с пространством $\ell^\infty(k)$. Если $\pi(M) = \ell^\infty(k)$, то доказывать нечего. Пусть $x' \in \ell^\infty(k)$, $x' \notin \pi(M)$. Образ $\pi(M)$ компактного множества M при непрерывном отображении $\pi(\cdot)$ компактен в $\ell^\infty(k)$. Следовательно, $P_{\pi(M)}x' \neq \varnothing$. Пусть y' – ближайшая точка из $\pi(M)$ для x'. Не ограничивая общности считаем $x' = 0$, $\|x' - y'\| = 1$. Из того, что $\rho(x', \pi(M)) = 1$ следует, что если $z \in M$, то $\rho(z, L) \geqslant 1$.

Пусть $y \in \pi^{-1}(y')$. Тогда $\rho(y, L) = 1$. Поскольку L – координатное подпространство конечной коразмерности, то L является множеством существования, т. е. найдется $x \in L$ такой, что $\|x - y\| = 1$. Ясно, что $\pi(x) = x'$. Пусть $\Theta = \{\theta_{j_1}, \dots, \theta_{j_n}\} \subset \{\theta_1, \dots, \theta_k\}$ – все точки из Q, в которых $|y'(\theta_{j_i})| = 1$. Понятно, что $0 < n \leqslant k$. Пусть теперь

$$Z^\pm = \{\theta \in Q \mid (y - x)(\theta) = \pm 1\},$$
$$A^+ = \{\theta \in Q \mid (y - x) \geqslant 0\}, \qquad A^- = \{\theta \in Q \mid (y - x) \leqslant 0\}.$$

Ясно, что $\theta_{j_1}, \dots, \theta_{j_n} \in Z^\pm$,

Если неотрицательная часть $(y - x)_+$ функции $y - x$ не тождественно равна нулю, то обозначим $\delta = \max\{(y - x)(\theta) \mid \theta \in A\}$, $(0 < \delta \leqslant 1)$, и положим $D^+ = \{\theta \mid (y - x)(\theta) = \delta\}$. Теперь к замкнутым множествам $\Theta \cap A^+$ и D^+ применим большую лемму Урысона, получая функцию h'

такую, что

$$h'|_{\Theta\cap A^+} = 0, \quad h'|_{D^+} = 1/2, \quad 0 < h'|_{Q\setminus(\Theta\cap D^+)} < 1/2.$$

Если $(y-x)_+ \equiv 0$, то полагаем $h'|_{A^+} = 0$.

Аналогично рассматриваем неположительную часть $(y-x)_-$ функции $y-x$, получая функцию h''. Полагая $h = h' + h''$, имеем $h \in L$ и

$$h_\Theta = 0, \quad |h|_{D^+\cup D^-} = 1/2, \quad -1/2 < h(q) < 1/2 \text{ при } q \in Q\setminus(\Theta\cup D^+\cup D^-).$$

Тогда $(y-(x+h))(\theta_{j_i}) = (y-x)(\theta_{j_i}) = y(\theta_{j_i}) = \pm 1$, $|(y-(x+h))(\theta)| < 1$ при $\theta \in Q \setminus \Theta$.

Обозначим $\hat{x} = x+h$. Тогда $\hat{x} \in L$, $y \in P_M\hat{x}$. По теореме 1.A $\mathring{K}(y,\hat{x})\cap M = \varnothing$, а из (3.29)

$$\mathring{K}(y,\hat{x}) = \mathring{K}(y-\hat{x},0) + \hat{x} = \{z \mid \varepsilon_1 z(\theta_{j_1}) < \varepsilon_1, \ \ldots, \ \varepsilon_k z(\theta_{j_k}) < \varepsilon_k\},$$

где $\varepsilon_i = \operatorname{sign}((y-x)(\theta_{i_j})) = \{\pm 1\}$, $i = 1, \ldots, k$. Переходя в пространство $\ell^\infty(k)$ имеем, что $\pi(\mathring{K}(y,\hat{x})) = \mathring{K}(y',\pi(\hat{x})) = \mathring{K}(y',0) = \{z' \in \ell^\infty(k) \mid \varepsilon_1 z'^{(1)} < \varepsilon_1, \ \ldots, \ \varepsilon_k z'^{(k)} < \varepsilon_k\}$ и, поскольку $\mathring{K}(y,\hat{x}) \cap M = \varnothing$, то $\mathring{K}(y',0)\cap\pi(M) = \varnothing$, откуда $\pi(M)$ – строгое солнце в $\ell^\infty(k)$ по теореме 1.A. Теорема 3.6 доказана. □

Доказательство теоремы 3.5. Пусть $M \subset C(Q)$ – ограниченно компактное строгое солнце. Рассмотрим $x, y \in M$ и выберем достаточно большой шар $B(\theta, r)$ таким образом, чтобы $x, y \in \mathring{B}(\theta, r)$. По лемме 3.4 $M \cap B(\theta, r)$ – компактное строгое солнце в $C(Q)$. Для любого координатного подпространства $L \subset \operatorname{cAff}^k(C(Q))$ конечной коразмерности k множество $(M\cap B(\theta,r))/L$ является строгим солнцем в $C(Q)/L = \ell^\infty(k)$ по теореме 3.6. По известной теореме Беренса и Хетцельта (теорема 3.A ниже) солнца в $\ell^\infty(n)$ монотонно линейно связны. Применяя лемму 3.2, получаем, что множество $M \cap B(\theta, r)$, а следовательно, и исходное множество M m-связно, а из теоремы 3.2, поскольку M ограниченно компактно, следует монотонная линейная связность M.

3.4. Солнечность чебышёвских множеств. Вопрос о солнечности чебышёвских множеств изучался Н. В. Ефимовым, С. Б. Стечкиным, В. Кли, Л. П. Власовым, И. Г. Царьковым, С. В. Конягиным и др. Отметим работы Власова [50], Балаганского и Власова [29], Карлова и Царькова [66], Брауна [156], Брозовского, Дойча, Ламберта и Морриса [152].

В конечномерном пространстве чебышёвское множество является солнцем. Ч. Данхем [180] (см. тж. [152]) построил пример локально компактного чебышёвского множества в $C[0,1]$, не являющегося солнцем. В общем случае для доказательства солнечности множества на него накладываются, как правило, ограничения типа компактности или непрерывности метрической проекции P_M (см. Власов [50; гл. 3], Балаганский и Власов [29; гл. I, § 2]). Классическим является результат Л. П. Власова, который утверждает, что ограниченно компактное P-ацикличное множество (в частности, чебышёвское множество) в банаховом пространстве является солнцем [50; теорема 4.4]. Власов также показал, что в банаховом пространстве локально компактное чебышёвское множество с непрерывной метрической проекцией P_M является солнцем (см., например, [66]). Отметим также, что в $C(Q)$ или $C_0(Q)$ чебышёвское множество с непрерывной метрической проекцией (в частности, аппроксимативно компактное чебышёвское множество) является солнцем Браесс [144] и Алимов [123].

Имеет место следующий результат (Алимов [15], [16]): солнечность произвольного чебышёвского множества в линейном нормированном пространстве устанавливается при наложении структурных ограничений типа связности.

Теорема 3.7. *Пусть M – монотонно линейно связное подмножество линейного нормированного пространства. Предположим, что $P_M x = \{y\}$ для некоторого $x \notin M$. Тогда x – точка солнечности (y – точка светимости).*

Как следствие, монотонно линейно связное чебышёвское множество в линейном нормированном пространстве является солнцем.

Замечание 3.6. Теорему 3.7 можно рассматривать как первый результат, в котором солнечность чебышёвского множества устанавливается при наложении на него структурных ограничений типа связности. В частном случае пространств типа $C(Q)$ теорема 3.7 была получена автором в [12].

Доказательство теоремы 3.7. И. Зингеру и А. Л. Гаркави (см. также В. Фонф [97]) принадлежит удачная идея использовать в общих теоремах экстремальные функционалы единичной сферы S^* сопряженного пространства X^*. Полезным инструментом при этом явилась лемма о продолжении экстремальных функционалов, сформулированная Зингером в [59] и доказанная в полном объеме Г. Шоке [163] и Гаркави [51], [52].

В частности, Зингером получен следующий результат [257]. Пусть $G \subset X$ – линейное подпространство, $x \in X \setminus G$. Предположим, что для x существует элемент наилучшего приближения g_0 из G. Тогда найдется экстремальная гиперплоскость H_0, проходящая через точку g_0, отделяющая 0 от шара $B(x, \|x - g_0\|)$, и являющаяся опорной к нему.

Как следствие, для произвольного $x \in X$,

$$\|x\| = \max_{f \in S^*} f(x) = \sup_{f \in \max S^*} f(x). \tag{3.28}$$

Далее, пусть $y, x \in X$, $y \neq x$, $p := (y - x)/\|y - x\|$. Обозначим через Σ_p множество функционалов из S^*, достигающих в точке p своего максимума на единичном шаре B. Тогда [50; лемма 3.1]

$$\mathring{K}(y, x) = \{z \mid f(z) < f(y)\ \forall f \in \Sigma_p\} = \{z \mid f(z) < f(y)\ \forall f \in \Sigma_p \cap \operatorname{ext} S^*\}. \tag{3.29}$$

Здесь $\mathring{K}(y, x)$ – открытый опорный конус к шару $B(x, \|x - y\|)$ в его граничной точке y (см. (1.1))

Из указанного результата Зингера следует, что любая точка, не лежащая в замкнутом шаре отделима от него посредством экстремальной (аффинной) гиперплоскости (результат, являющийся частным следствием характеризации брусов через строгую отделимость экстремальными функционалами [126]).

Продолжая доказательство теоремы 3.7 предположим, что M – монотонно связное чебышёвское множество в X, не являющееся солнцем. Тогда согласно лемме 1.A найдется точка $x \notin M$ такая, что $\mathring{K}(y, x) \cap M \neq \varnothing$, где $P_M x = \{y\}$. Не ограничивая общности считаем, что $x = 0$ и $\rho(x, M) = 1$. Пусть $u \in M \cap \mathring{K}(y, x)$ и пусть $k(\tau)$, $0 \leqslant \tau \leqslant 1$, – непрерывная монотонная кривая, соединяющая y и u, $k(0) = y$, $k(1) = u$. По определению опорного конуса (1.1) найдется $r > 1$ такое, что

$$u \in \mathring{B}(z_r, \alpha_r) \subset \mathring{K}(y, x), \quad y \in S(z_r, \alpha_r),$$

где $z_r = -ry + (r+1)x$, $\alpha_r = (r+1)$. Обозначим

$$\mathring{k}(\cdot) := k(\cdot) \setminus \{u, y\}.$$

Тогда, в силу (3.28) и того, что $P_M x = \{y\}$ имеем

$$\mathring{k}(\cdot) \subset \mathring{B}(z_r, \alpha_r) \subset \mathring{K}(y, x).$$

Предположим, что $\mathring{k}(\cdot) \cap \mathring{B} = \varnothing$. Выберем последовательность точек $v_n \in \mathring{k}(\cdot)$, $v_n \to y$. В силу указанного результата Зингера об отделимости экстремальной гиперплоскостью для каждого n найдутся функционал $f_n \in \operatorname{ext} S^*$ и число $d_n \geqslant 1$ такие, что экстремальная гиперплоскость $\{z \mid f_n(z) = d_n\}$ отделяет точку v_n от шара B. Так как кривая $k(\cdot)$ монотонна, то $f_n(v_n) \in [f_n(y), f_n(u)]$. Поскольку шар B^* w^*-компактен, то последовательность (f_n) имеет в слабой топологии предельную точку $f \in S^*$. Поскольку $d_n \to 1$, то переходя к сетям имеем

$$f(y) = 1 \quad \text{и} \quad f(u) \geqslant 1.$$

В силу (3.29) последнее противоречит исходному предположению $u \in \mathring{K}(y, x)$.

Итак, случай $\mathring{k}(\cdot) \cap \mathring{B} = \varnothing$ невозможен. Но случай $\mathring{k}(\cdot) \cap \mathring{B} \neq \varnothing$ также невозможен, поскольку по предположению $\mathring{B} \cap M = \varnothing$, а $k(\cdot) \subset M$. Полученное противоречие доказывает теорему 3.7. $\square$

Ответ на обратный вопрос о монотонной связности чебышёвских множеств в общем случае не известен (см. замечание 3.4 на стр. 107). При этом, конечно, ответ положителен для конечномерных (BM)-пространств, в которых любое солнце (а значит, и чебышёвское множество) монотонно линейно связно.

3.5. Монотонная линейная связность R-слабо выпуклых множеств в линейных нормированных пространствах с линейной вкладываемостью шаров ($\boldsymbol{BEL}$). В последнее время интенсивное развитие получила теория R-слабо выпуклых множеств (см. монографию Г. Е. Иванова [61] и работы Г. Е. Иванова и М. В. Балашова [31], [62], Г. Е. Иванова и М. С. Лопушански [64], А. Р. Алимова [125], [124] и цитированную там литературу). Интерес к R-слабо выпуклым множествам обусловлен их приложением к теории экстремальных задач, задачам оптимального управления, теории дифференциальных игр, теории приближений и теории многозначных отображений (см., например, [61]).

Пусть $R > 0$ и $x, y \in X$, $\|x - y\| < 2R$. Множество

$$D_R(x,y) = \bigcap_{x,y \in B(z,R)} B(z,R)$$

называется *R-сильно выпуклым отрезком* [61], [31]. Подмножество $M \subset X$ называется *R-слабо выпуклым*[7] [31], если

$$(D_R(x,y) \setminus \{x,y\}) \cap M \neq \varnothing \qquad \forall\, x,y \in M, \quad 0 < \|x-y\| < 2R. \quad (3.30)$$

Ниже мы рассматриваем вопрос об m-связности (связности по Менгеру) и монотонной линейной связности R-слабо выпуклых множеств в пространстве $C(Q)$ и в более общих пространствах. При этом естественно возникает класс пространств (BEL) с линейной вкладываемостью шаров (такие пространства определяются ниже в § 3.5.2), а также пространства с длиннореберными (реберно-антиподальными) шарами (см. § 3.5.2). Сразу отметим, что $C(Q)$ и $\ell^1(n) \in (BEL)$). Устанавливается, что R-слабо выпуклое множество M в пространстве $X \in (BEL)$ m-связно (связно по Менгеру) при естественном ограничении на разброс точек M. Показывается, что замкнутое подмножество M конечномерного пространства $X \in (BEL)$ является R-слабо выпуклым множеством при некотором $R > 0$ если и только если M есть дизъюнктное объединение монотонно линейно связных солнц, причем хаусдорфово расстояние между любыми компонентами связности множества M не менее $2R$. Попутно дается характеризация трехмерных пространств с длиннореберным единичным шаром.

[7]В терминологии Балашова–Иванова [61], [31] – *слабо выпуклым по Виалю с константой* $R > 0$.

В теореме 3.8 получена характеризация трехмерных пространств $X \in (BEL)$. Оказывается, что такими пространствами в точности являются пространства, единичный шар которых является кубом или октаэдром. Для пространств $C(Q)$ и более общих пространств из класса (BEL) в теоремах 3.9 и 3.10 показано, соответственно, что R-слабо выпуклое подмножество m-связно (при естественном ограничении на разброс точек множества M); при условии замкнутости M и конечномерности X показывается, что каждая компонента связности множества M монотонно линейно связна и является солнцем (теорема 3.12).

При исследовании связности R-слабо выпуклых множеств в пространствах типа $C(Q)$ важным оказывается факт, что в таких пространствах класс R-слабо выпуклых множеств совпадает (за исключением вырожденных случаев) с классом m-связных (по Менгеру) множеств (предложение 3.11). Аналогичным свойством обладают конечномерные пространства с длиннореберным (реберно-антиподальным) единичным шаром (необходимые определения даны на стр. 130).

3.5.1. *Вспомогательные утверждения. Промежутки. Чебышёвские центры. Отделимость промежутков экстремальными гиперплоскостями.*

Определение 3.2. Множество $\varnothing \neq \Pi \subset C(Q)$ называется *промежутком*, если для всех $f_1, f_2 \in \Pi$ выполнено $[[f_1, f_2]] \subset \Pi$.

А. А. Васильевой [47], [48] установлено, что подмножество $\Pi \subset C(Q)$ является замкнутым промежутком если и только если Π представимо в виде $\Pi = [[f_1, f_2]]$, где $f_1, f_2 : Q \to \overline{\mathbb{R}}$, $f_1 \leqslant f_2$, f_1 – полунепрерывна сверху на Q, а f_2 – снизу.

Имея в своем распоряжении понятие интервала (определенного в (3.4)), мы можем по аналогии с вышесказанным определить понятие промежутка в линейном нормированном пространстве X.

Определение 3.3. Множество $\varnothing \neq \Pi \subset X$ называется *промежутком*, если $[[x, y]] \subset \Pi \quad$ для всех $\; x, y \in \Pi$.

Любой замкнутый шар является замкнутым промежутком. Действительно, пусть $u, v \in B$. Если для какого-либо $w \in B$ имеем $f(w) \in [f(u), f(v)]$ для любого $f \in \operatorname{ext} S^*$, то по теореме Крейна–Мильмана это неравенство распространяется на все $f \in S^*$, откуда $\|w\| \leqslant 1$, т.е. $w \in B$.

Отметим, что функциональные промежутки естественно возникают в выпуклом и нелинейном анализе, в задачах теории приближений (К. Франчетти и Е. У. Чени [187]), в задаче о расстоянии до чебышёвского подпространства, в теоремах о сильной единственности экстремальных элементов в этой задаче (С. Я. Хавинсон [101]), а также в задаче оценки поперечников функциональных классов при пересечении с промежутками (А. А. Васильева [49]).

Напомним, что величина

$$\alpha(M) := \inf_{u \in X} \sup_{x \in M} \|x - u\|$$

называется *чебышёвским радиусом* множества $\varnothing \neq M \subset X$. Множеством решений (возможно пустым) данной задачи на минимакс является множество

$$E(M) = \{u \in X \mid \sup_{x \in M} \|x - u\| = \alpha(M)\},$$

называемое *чебышёвским центром* (или *множеством чебышёвских центров*) множества M.

В 1968 г. Замятин и Кадец показали, что произвольное ограниченное подмножество пространства $C(Q)$ всегда имеет непустой чебышёвский центр (Q – произвольное топологическое пространство) и дали характеризацию (в случае нормального Q) чебышёвского центра $E(M)$ ограниченного множества $M \subset C(Q)$, которую мы сформулируем в ослабленном виде для случая компактных M (см. У. Чени [161; стр. 50]). *Пусть M – компактное множество в $C(Q)$, α – чебышёвский радиус множества M. Тогда чебышёвский центр множества M имеет следующий вид*:

$$E(M) = \{y \in C(Q) \mid \Omega(t) - \alpha \leqslant y(t) \leqslant \omega(t) + \alpha\} \neq \varnothing, \tag{3.31}$$

где

$$\Omega(t) = \max_{x \in M} x(t), \quad \omega(t) = \min_{x \in M} x(t); \tag{3.32}$$

при этом $\alpha = \frac{1}{2}\|\Omega - \omega\|$. В частности, $E(M) = E(\Omega, \omega) := E(\{\Omega, \omega\})$.

Нам потребуется утверждение об отделимости экстремальными гиперплоскостями (экстремальной отделимости) интервалов и промежутков функций в пространствах с чебышёвской нормой (предложение 3.8). Введем необходимые определения.

Множества $\varnothing \neq M_1, M_2 \subset X$ называются *экстремально отделимыми*, если $\sup(f, M_1) \leqslant \inf(f, M_2)$ для некоторого $f \in \operatorname{ext} S^*$. В случае строгого неравенства отделимость называется *строгой*.

Следующее важное свойство экстремальной отделимости непересекающихся промежутков в $C(Q)$ может быть получено с использованием теоремы Гаркави–Замятина–Катетова о продолжении непрерывных функций [54; лемма 3].

Предложение 3.8. *Любые два непересекающихся замкнутых промежутка в пространстве $C(Q)$ строго экстремально отделимы.*

Следующий результат (Алимов [124]) нам потребуется при доказательстве предложения 3.9.

Лемма 3.5. *Пусть $X = C(Q)$, Q – метрический компакт. Предположим, что $u, v \in B$, $\|u - v\|/2 =: r < 1$. Тогда*

$$E(u, v) \cap B(0, 1 - r) \neq \varnothing. \tag{3.33}$$

Доказательство леммы 3.5. Рассуждая от противного предположим, что $E(u, v) \cap B(0, 1 - r) = \varnothing$. Согласно (3.31), множество $E(u, v)$ является замкнутым интервалом (а значит, и замкнутым промежутком), а по предложению 3.8 непересекающиеся замкнутые интервалы $E(u, v)$ и $B(0, 1 - r)$ можно строго отделить экстремальной гиперплоскостью. Это означает, что найдется такая точка $t \in Q$, что $\Omega(t) - r > 1 - r$ и $\omega(t) + r > 1 - r$ или $\Omega(t) - r < -1 + r$ и $\omega(t) + r < -1 + r$, где Ω и ω определены в (3.32). Получаем, соответственно, $\Omega(t) > 1$ или $\omega(t) < -1$, что невозможно, поскольку $\Omega, \omega \in B$, так как $u, v \in B$. Лемма 3.5 доказана. $\square$

Важным для наших целей свойством пространств с чебышёвской нормой является следующее утверждение (Алимов [124]).

Предложение 3.9. *Пусть $X = C(Q)$, $x, y \in B$, $x \neq y$. Тогда найдется точка $z \in B$ такая, что*

$$x, y \in B(z, \|x - y\|/2) \subset B. \tag{3.34}$$

Доказательство предложения 3.9. Обозначим $r := \|u - v\|$, $r < 1$. В силу леммы 3.5 существует точка $\xi \in E(x, y) \cap B(0, 1 - r)$. Тогда $x, y \in B(\xi, r)$ и, поскольку $\|\xi\| \leqslant 1 - r$, то $B(\xi, r) \subset B$, что и требуется. Как следствие, $C(Q) \in (BEL)$. $\square$

Отметим, что всегда имеет место следующее включение (см., например, М. В. Балашов и Г. Е. Иванов [31; лемма 3.13]):

$$D_R(x,y) \subset D_r(x,y) \qquad \forall\, x,y \in X,\ \|x-y\| \leqslant 2r,\ r<R. \tag{3.35}$$

В пространстве $C(Q)$ включение (3.35) превращается в равенство – это гарантируется леммой 3.6 с учетом того, что $C(Q) \in (BEL)$ (см. предложение 3.9 и предложение 3.15 в § 3.5.2).

Предложение 3.10. *Пусть* $X = C(Q)$, $x,y \in X$, $\|x-y\|/2 \leqslant r \leqslant R$ *при некоторых* r, R. *Тогда* $D_R(x,y) = D_r(x,y)$.

Из предложения 3.10 и представления (3.1) вытекает

Предложение 3.11. *Пусть* $X = C(Q)$, Q *– метрический компакт,* $R>0$, $x,y \in C(Q)$, $\|x-y\| \leqslant 2R$. *Тогда* $D_R(x,y) = \mathrm{m}(x,y)$.

3.5.2. *Пространства с линейной вкладываемостью шаров.* Естественным обобщением пространств с равномерной нормой с сохранением свойства $D_R(x,y) = \mathrm{m}(x,y)$ является следующий класс пространств (BEL) (аббревиатура (BEL) происходит от английского словосочетания “linear balls embedding” – линейное вложение шаров). Класс пространств (BEL) определяется следующим образом:

$$(BEL): \quad \forall x,y \in B\ \ \exists z \in B:\ x,y \in B(z, \|x-y\|/2) \subset B.$$

Здесь, как обычно, $B = B(0,1)$.

К примеру, легко видеть, что евклидово пространство не лежит в (BEL).

Мы покажем, что класс (BEL) включает в себя пространства $C(Q)$ и $\ell^1(n)$, при этом в теореме 3.8 утверждается, что трехмерное пространство X лежит в классе (BEL) если и только если его единичный шар B является кубом или октаэдром (с точностью до аффинного преобразования); как следствие, двумерное пространство X принадлежит классу (BEL) тогда и только тогда, когда его единичный шар является параллелограммом.

В равномерном случае следующий результат (Алимов [125]) содержится в предложении 3.11.

Лемма 3.6. *Пусть* $X \in (BEL)$, $x,y \in X$, $\|x-y\|/2 \leqslant r \leqslant R$. *Тогда*

$$D_R(x,y) = D_r(x,y).$$

Доказательство леммы 3.6. Без ограничения общности можно считать, что $R = 1$. Тогда $D_1(x, y) \subset D_r(x, y)$ в силу (3.35). Мы покажем, что $D_1(x, y) = D_r(x, y)$.

Ясно, что $D_1(x, y) \subset D_\delta(x, y)$, где $\delta := \|x - y\|/2$. Предположим, что $D_1(x, y) \subsetneqq D_\delta(x, y)$. Тогда $v \notin B(\xi, 1)$ при некоторых $\xi \in X$ и $v \in D_\delta(x, y)$. Однако, поскольку $X \in (BEL)$, то найдется такая точка z, что $x, y \in B(z, \delta) \subset B(\xi, 1)$. Но в таком случае $x, y \in B(z, \delta) \not\ni v$, что невозможно, поскольку по условию $v \in D_\delta(x, y)$. Итак, $D_1(x, y) = D_\delta(x, y)$. Теперь из (3.35) имеем, что $D_1(x, y) = D_r(x, y)$. □.

Как следствие из леммы 3.6 мы имеем

Предложение 3.12. *Пусть $X \in (BEL)$ и $R > 0$. Тогда если $x, y \in X$, $\|x - y\| \leqslant 2R$, то $D_R(x, y) = \mathrm{m}(x, y)$.*

Ниже нам потребуется следующее вполне очевидное утверждение.

Предложение 3.13. *Пусть $[a, b]$ – одномерная грань шара B. Тогда $\mathrm{m}(a, b) = [a, b]$.*

Напомним, что множество P называется *антиподальным* (см., например, [143; § 9.11]), если для любых его элементов x и y множество P содержится в замкнутой гиперполосе, содержащей x и y в своей границе (такие точки x и y называются антиподальными). Многогранник P называется *антиподальным*, если множество его вершин образует антиподальное множество. Хорошо известно, что в конечномерном пространстве антиподальное множество всегда конечно. Более того, если A – антиподальное множество в $\mathbb{R}^n$, то $\operatorname{card} A \leqslant 2^n$, причем равенство достигается только в том случае, если A аффинно эквивалентно множеству вершин n-мерного куба [172]. А. Шюрман и К. Сванеполь [253] получили полное описание трехмерных антиподальных множеств. В частности, ими получен следующий результат.

Предложение 3.A. *Центрально-симметричный трехмерный многогранник антиподален тогда и только тогда он является октаэдром или кубом (с точностью до аффинного преобразования).*

Замечание 3.7. Автору неизвестна структура центрально-симметричных антиподальных многогранников в пространствах X_n размерности $\geqslant 4$. В этой связи отметим, что в таких пространствах данному условию (помимо куба и октаэдра (кросс-многогранника)) также удовлетворяют многогранники Ханнера (см. [232]; см. также [263] по поводу полного описания многогранников Ханнера для ряда размерностей) – такой многогранник строится при прямых сумм и кроссов отрезка $[0,1]$. Антиподальность многогранника Ханнера вытекает из того, что любой многогранник Ханнера является совершенным призмоидом (М. Козачок [67], Х. Мартини и К. Сванеполь [232]). Здесь напомним, что выпуклый d-мерный многогранник P называется *призмоидом*, если все его вершины содержатся в паре параллельных $(d-1)$-мерных плоскостей. Центрально-симметричный выпуклый многогранник P называется *совершенным призмоидом*, если он является призмоидом над любой своей гипергранью, то есть для любых его антиподальных гиперграней F и F' выполняется $P = \mathrm{conv}(F \cup F')$. Совершенные призмоиды также известны под названием CL-многогранники.

Выпуклый многогранник $P \subset \mathbb{R}^n$ называется *реберно-антиподальным* [260], если любые его две вершины, определяющие ребро, лежат на двух параллельных опорных гиперплоскостях к P. В [140] установлено, что реберно-антиподальный 3-многогранник имеет не более 8 вершин, причем оценка достигается только для аффинных кубов. Отметим (К. Сванеполь [258]), что число вершин реберно-антиподального n-многогранника не превосходит $(\frac{n}{2}+1)^n$.

Вполне очевидно, что двумерный реберно-антиподальный многогранник антиподален. Для трехмерного пространства в [140] отмечается, что вершины реберно-антиподального 3-многогранника составляют антиподальное множество. Однако для каждого $n \geqslant 4$ И. Талата [260] (см. также Б. Сикош [170; p. 202]) построил реберно-антиподальный n-многогранник, имеющий пару неантиподальных вершин.

Многогранник называется *равносторонним* (относительно некоторой нормы $\|\cdot\|$), если его вершины образуют эквидистантное множество. Хорошо известно, что эквидистантное множество всегда антиподально.

Многогранник P называется *длиннореберным* [258], если длина каждого его ребра в определяемой им норме $\|\cdot\|_P$ равна диаметру P (где норма $\|\cdot\|_P$ определяется единичным шаром $\frac{1}{2}(P-P)$). Легко проверяется [258; § 2.2], что реберно-антиподальный многогранник P является длиннореберным (в норме $\|\cdot\|_P$). Также вполне очевидно и обратное утверждение: каждый длиннореберный многогранник P является реберно-антиподальным (и, как следствие, является антиподальным, если $\dim X \leqslant 3$ или если степень любой вершины P равна размерности пространства [141]). Стоит ещё отметить, что грани реберно-антиподального многогранника реберно-антиподальны и что если у реберно-антиподального n-многогранника P все двумерные грани являются параллелограммами, то P – n-куб [141].

Далее под *длиннореберным* шаром пространства X_n мы будем понимать шар, являющийся длиннореберным (или, что эквивалентно, реберно-антиподальным) многогранником. Вполне очевидно, что куб и октаэдр (кросс-многогранник) являются длиннореберными многогранниками (в определяемой ими норме).

Отметим, что пространства с длиннореберными шарами естественно возникают в рассмотренной нами в гл. 1 задаче о числе компонент связности дополнения к чебышёвским множествам и солнцам.

Имеют место следующие утверждения (Алимов [125]).

Предложение 3.14. *Единичный шар B пространства $X_n \in (BEL)$ является антиподальным многогранником. В частности, шар B – длиннореберный (реберно-антиподальный) многогранник.*

Предложение 3.15. *Пространства $C(Q)$ (Q – метрический компакт) и $\ell^1(n)$ содержатся в классе (BEL).*

Доказательство предложения 3.14. Сначала предположим, что единичный шар B содержит более 2^n достижимых точек. Тогда [120; § 3] (см. также [143; Theorem 9.11.1]) среди них найдутся такие точки u и v, что $\|u - v\|/2 =: d < 1$. Пусть H_u – опорная гиперплоскость к шару B в точке u, такая, что $H_u \cap B = \{u\}$; H_v – аналогично определяемая опорная гиперплоскость в точке v.

Поскольку $X_n \in (BEL)$, то по определению для точек $u, v \in B$ можно найти точку $z \in B$ такую, что $u, v \in B(z, d) \subset B$. Как следствие, любая гиперплоскость, опорная к шару B в точке u (в точке v) является опорной и к шару $B(z, d)$ в той же точке u (в точке v). Пусть $\hat{u}$ и $\hat{v}$ – прообразы точек u и v при отображении $x \mapsto dx + z$, $x \in X$. Тогда $\hat{u}, \hat{v} \in S$ и, по сказанному выше, $\hat{u} \in H_u$ и $\hat{v} \in H_v$. Имеем $u, \hat{u} \in H_u$ – противоречие с тем, что u – достижимая точка шара B. Итак, единичный шар B содержит не более 2^n достижимых точек; как следствие, B – многогранник.

Предположим, что многогранник B не является длиннореберным. Тогда у шара B найдется такое ребро (одномерная грань) $[x, y]$, длина которой меньше двух. Вполне понятно, что для таких точек x, y условие, определяющее класс (BEL) выполняться не может (см. предложение 3.13).

Пусть $u, v \in \operatorname{ext} B$, $\|u - v\| =: 2\delta < 2$, $u \neq v$. Так как $X \in (BEL)$, то найдется шар $B' = B(z, \delta)$ такой, что $B' \subset B$ и $u, v \in B'$. Далее, заметим, что если $v \in \operatorname{ext} B$ и $v \in B' \subset B$, то $v \in \operatorname{ext} B'$. Отсюда вытекает, что $v = \frac{v-z}{\|v-z\|}$ и $u = \frac{u-z}{\|u-z\|}$, откуда необходимо следует, что $z = 0$ и $\delta = 1$. Полученное противоречие показывает, что предположение $\|u - v\| =: 2\delta < 2$ неверно. Предложение 3.14 доказано. $\square$

Доказательство предложения 3.15. Утверждение для $C(Q)$ установлено в предложении 3.9. Соответственно, ниже мы считаем, что $X = \ell^1(n)$. Пусть $u, v \in B$, $\|u - v\| = 2r < 2$. Нам требуется доказать, что $u, v \in B(\zeta, r) \subset B$ при некотором $\zeta \in B$.

Важным для нас будет являться следующее свойство единичного шара B в $X = \ell^1(n)$:

$$B = [\![\omega, \Omega]\!] := \{z \mid f(z) \in [f(\omega), f(\Omega)] \quad \forall f \in \operatorname{ext} S^*\}, \tag{3.36}$$

где ω, Ω – произвольные противоположные вершины единичного шара (октаэдра, или кросс-многогранника). Равенство (3.36) вполне очевидно – достаточно воспользоваться представлением для общего вида линейного функционала (откуда следует, что $|f(\omega)| = 1$ для любого $f \in \operatorname{ext} S^*$, и следовательно, $B \subset [\![\omega, \Omega]\!]$) и тем, что любую точку, не лежащую в замкнутом шаре, всегда можно строго отделить от шара посредством экстремального функционала.

Пусть $F = (f_i)_{i \in I}$ – все экстремальные (крайние) точки единичной сферы S^* сопряженного пространства ($\operatorname{card} I = 2^n$). Из (3.36) следует, что для любого $i \in I$ мы всегда имеем $|f_i(\omega)| = 1$ или $|f_i(\Omega)| = 1$. Так как $\operatorname{ext} S^*$ – граница для X, то

$$\|x\| = \sup_{f \in S^*} f(x) = \max_{f \in \operatorname{ext} S^*} f(x). \tag{3.37}$$

Отсюда $|f_i(u) - f_i(v)| \leqslant 2r$ при всех i, а также $|f_j(u) - f_j(v)| = 2r$ хотя бы при одном $j \in I$. Для каждого $i \in I$ положим

$$\overline{m}_i = \max\{f_i(u), f_i(v)\}, \qquad \underline{m}_i = \min\{f_i(u), f_i(v)\}, \tag{3.38}$$

Имеем: $-1 \leqslant \underline{m}_i \leqslant \overline{m}_i \leqslant 1$, $\overline{m}_i - \underline{m}_i \leqslant 2r$, при этом $\overline{m}_j - \underline{m}_j = 2r$ при некотором j. Далее положим

$$\bar{\alpha}_i = 1 - \overline{m}_i, \qquad \underline{\alpha}_i = \underline{m}_i - 1$$

(понятно, что $\bar{\alpha}_i, \underline{\alpha}_i \geqslant 0$).

Для каждой гиперполосы $-1 \leqslant f_i(z) \leqslant 1$ определим собственную подгиперполосу

$$\begin{array}{ll} \{z \mid f_i(z) \in [\,\overline{m}_i - r,\, \overline{m}_i]\}, & \text{если } i \text{ таково, что } \bar{\alpha}_i < \underline{\alpha}_i, \\ \{z \mid f_i(z) \in [\,\underline{m}_i,\, \underline{m}_i + r]\}, & \text{если } i \text{ таково, что } \bar{\alpha}_i \geqslant \underline{\alpha}_i; \end{array} \tag{3.39}$$

ширина каждой такой гиперполосы равна $2r$. Из построения ясно, что всегда $-1 \leqslant \overline{m}_i - r < \overline{m}_i \leqslant 1$, $-1 \leqslant \underline{m}_i < \underline{m}_i + r \leqslant 1$. Теперь определим Π как пересечение всех гиперполос (3.39) по всем i. Из (3.36) вытекает, что Π – шар радиуса r, при этом $\Pi \subset B$, поскольку каждая гиперполоса (3.39) содержится в гиперполосе $-1 \leqslant f_i(z) \leqslant 1$. Окончательно, из построения вытекает, что каждая из точек u, v содержится в любой гиперполосе вида (3.39), что дает $u, v \in \Pi$. Предложение 3.15 доказано. $\square$

Следующий результат, в котором дается характеризация длиннореберных трехмерных пространств, представляет независимый интерес.

Теорема 3.8. *Пусть X – трехмерное линейное нормированное пространство. Тогда следующие свойства эквивалентны*:

a) *пространство X лежит в классе (BEL), т.е.*

$$\forall\, x, y \in B \;\; \exists z \in B \;:\; x, y \in B(z, \|x - y\|/2) \subset B;$$

b) *единичный шар B пространства X является кубом или октаэдром (с точность до аффинного преобразования)*;

c) *единичный шар B – длиннореберный (реберно-антиподальный) многогранник*;

d) *единичный шар B – антиподальный многогранник.*

Доказательство теоремы 3.8. Импликация b)$\Rightarrow$c) очевидна: длина любого ребра куба (или октаэдра) в определяемой им норме равна 2.

c)$\Rightarrow$b) Рассмотрим центрально-симметричный длиннореберный трехмерный многогранник P. Сванеполь [258] отмечает, что для n-мерного многогранника свойство быть длиннореберным эквивалентно его реберно-антиподальности. Далее, в [140] показано, что число вершин у трехмерного реберно-антиподального многогранника P не превосходит 8, причем равенство достигается только в случае, если P – (аффинный) куб. С другой стороны, любой определяющий норму многогранник в трехмерном пространстве имеет не менее 6 вершин (оценка снизу достигается на октаэдре).

Импликация b)⇒a) содержится в предложении 3.15.

c)⇒d) Выше отмечалось (см. [140]), что вершины длиннореберного (реберно-антиподального) 3-многогранника образуют антиподальное множество.

Импликация d)⇔b) составляет утверждение предложения 3.A, импликация a)⇒c) дается предложением 3.14. Теорема 3.8 доказана. $\square$

3.5.3. *Монотонная линейная связность R-слабо выпуклых множеств.* Ниже мы приводим результаты о монотонной линейной связности R-слабо выпуклых множеств в пространстве $C(Q)$ и в более общем случае пространств с линейной вкладываемостью шаров (см. § 3.5.2).

Напомним, что связность R-слабо выпуклых множеств изучалась в работах Ж.-Ф. Виаля [262], М. В. Балашова и Г. Е. Иванова, [61], [31], [62], причем данный вопрос рассматривался в основном в достаточно гладких или конечномерных пространствах. Отметим следующие результаты (соответственно, леммы 4.1, 4.13 и 4.17 из работы Балашова и Иванова [31]; см. также [62; теорема 4.1]), которые мы соберем в следующем утверждении.

Теорема 3.C (Балашов–Иванов). *Пусть X – банахово пространство и пусть $M \subset X$ R-слабо выпуклое множество при некотором $R > 0$. Пусть также $x, y \in M$, $\|x - y\| < 2R$. Тогда*:

a) *если множество $M \cap D_R(x, y)$ компактно, то оно связно*;

b) *если X равномерно выпукло или $\dim X < \infty$, а множество M замкнуто, то пересечение $M \cap D_R(x, y)$ линейно связно.*

Далее, в [31] доказаны следующие утверждения (соответственно теоремы 2.7 и 2.9).

Теорема 3.D (Балашов–Иванов). *Пусть банахово пространство X равномерно выпукло или конечномерно. Пусть множество $M \subset X$ замкнуто и R-слабо выпукло при некотором $R > 0$. Тогда*:

a) *для любых* $r \in (0,R]$ *и* $x \in X$ *множество* $M \cap \mathring{B}(x,r)$ *связно*");
b) *каждая связная компонента* A *множества* M *является линейно связным множеством, причем любые две точки множества* A *можно соединить спрямляемой кривой, лежащей в* A.

Основными результатами данного параграфа являются теоремы 3.9 и 3.12 (Алимов [124] и [125]), в которых для случая пространств $C(Q)$ мы усиливаем теоремы 3.C и 3.D, получая утверждения о m-связности и монотонной линейной связности R-слабо выпуклых множеств. Результаты для пространств (BEL) с линейной вкладываемостью шаров сформулированы в теоремах 3.10 и 3.12.

Теорема 3.9. *Пусть* $\varnothing \neq M \subset C(Q)$ – R-*слабо выпуклое множество при некотором* $R > 0$. *Тогда*:

a) $M \cap \mathring{B}(x,r)$ m-*связно при любых* $r \in (0,R]$ *и* $x \in C(Q)$;
b) $M \cap B(x,r')$ m-*связно при любых* $r' \in (0,R)$ *и* $x \in C(Q)$.

Дополнительно предположим, что M *ограниченно компактно. Тогда*:

1. *Любая компонента связности множества* M *монотонно линейно связна; хаусдорфово расстояние между любыми компонентами связности не менее* $2R$;

2. *Каждое из следующих множеств монотонно линейно связно*:

c) $M \cap \mathring{B}(x,r)$ *при любых* $r \in (0,R]$ *и* $x \in C(Q)$;
d) $M \cap B(x,r')$ *при любых* $r' \in (0,R)$ *и* $x \in C(Q)$;
e) $M \cap A$, *где* $A \subset C(Q)$, $\operatorname{diam} A < 2R$, *таково, что* $A = \mathrm{m}(A)$ (*в частности, множество* $M \cap \mathrm{m}(x,y)$ *монотонно линейно связно при любых* x, y, $\|x-y\| < 2R$).

Более того, если множество $M \cap B(x,r')$ *или* $M \cap A$ *из пп.* d) *или* e) *компактно, то оно экстремально клеточноподобно* (*и, в частности,* B-*клеточноподобно*).

Для случая общих пространств с линейной вкладываемостью шаров мы имеем чуть менее сильное утверждение, чем теорема 3.9.

Теорема 3.10. *Пусть* $X \in (BEL)$ *и пусть* $\varnothing \neq M \subset X$ – R-*слабо выпуклое множество при некотором* $R > 0$. *Тогда*:

a) $M \cap \mathring{B}(x,r)$ m-*связно при любых* $r \in (0,R]$ *и* $x \in X$;

b) $M \cap B(x, r')$ m-*связно при любых* $r' \in (0, R)$ *и* $x \in X$.

Дополнительно предположим, что M *замкнуто и* $\dim X < \infty$. *Тогда*:

1. *Любая компонента связности множества* M *монотонно линейно связна*; *хаусдорфово расстояние между любыми компонентами связности не менее* $2R$;

2. *Каждое из следующих множеств монотонно линейно связно*:

c) $M \cap \mathring{B}(x, r)$ *при любых* $r \in (0, R]$ *и* $x \in X$;
d) $M \cap B(x, r')$ *при любых* $r' \in (0, R)$ *и* $x \in X$;
e) $M \cap A$, *где* $A \subset X$, $\operatorname{diam} A < 2R$, *таково, что* $A = \mathrm{m}(A)$ (*в частности, множество* $M \cap \mathrm{m}(x, y)$ *монотонно линейно связно при любых* x, y, $\|x - y\| < 2R$).

Теорема 3.11 (характеризация R-слабо выпуклых множеств). *Пусть* $X \in (BEL)$, $\dim X < \infty$. *Тогда замкнутое подмножество* M *пространства* X *является* R*-слабо выпуклым множеством при некотором* $R > 0$ *если и только если* M *есть дизъюнктное объединение монотонно линейно связных солнц в пространстве* X, *причем хаусдорфово расстояние между любыми компонентами связности множества* M *не менее* $2R$.

В следующем утверждении (Алимов [124]) дается характеризация R-слабо выпуклых множеств в пространствах $C(Q)$ или в конечномерных пространствах с линейной вкладываемостью шаров в терминах их солнечности.

Теорема 3.12. *Ограниченно компактное подмножество* $M \neq \varnothing$ *пространства* $X = C(Q)$ *или конечномерного* $X \in (BEL)$ *является* R*-слабо выпуклым множеством при некотором* $R > 0$ *если и только если* M *есть дизъюнктное объединение монотонно линейно связных солнц в пространстве* $C(Q)$, *причем хаусдорфово расстояние между любыми компонентами связности множества* M *не менее* $2R$.

Напомним (см. теорему 3.4), что любое солнце в пространстве c_0 монотонно линейно связно, и обратно, любое аппроксимативно компактное m-связное подмножество c_0 монотонно линейно связно и является солнцем. Исходя из этого в пространстве c_0 от условия ограниченной компактности в теореме 3.12 можно отказаться, усилив теорему 3.12 следующим образом (Алимов [124]).

Теорема 3.13. 1. *Аппроксимативно компактное R-слабо выпуклое подмножество пространства c_0 есть дизъюнктное объединение монотонно линейно связных солнц в пространстве c_0, причем хаусдорфово расстояние между любыми компонентами связности не менее $2R$.*

2. *Любое дизъюнктное объединение* m-*связных солнц в пространстве c_0 с хаусдорфовом расстоянием между любыми компонентами связности не менее $2R$ есть R-слабо выпуклое множество в c_0.*

Поскольку монотонно линейно связное множество в пространстве $C(Q)$ R-слабо выпукло при любом $R > 0$, а ограниченно компактное строгое солнце в $C(Q)$ монотонно линейно связно (теорема 3.5), то *ограниченно компактное строгое солнце (в частности, ограниченно компактное чебышёвское множество) в пространстве $C(Q)$ R-слабо выпукло при любом $R > 0$.* Также стоит отметить (ср. [16]), что *если чебышёвское множество в пространстве $C(Q)$ R-слабо выпукло при каком-то $R > 0$, то оно является солнцем.*

Доказательство теоремы 3.9. Утверждение a). Пусть $u, v \in M \cap \mathring{B}(x, r)$. В силу леммы 3.6 и предложения 3.11 имеем

$$D_r(u, v) = D_R(u, v) = \mathrm{m}(u, v). \tag{3.40}$$

Поскольку по условию M R-слабо выпукло, то из (3.30) следует, что $M \cap \mathring{B}(x, r)$ m-связно. Утверждение b) доказывается аналогично.

Отметим [188; Proposition 5.1], что если M – m-связное множество и множество $A \subset X$ таково, что $A = \mathrm{m}(A)$, то

$$M \cap A \quad \text{m-связно}. \tag{3.41}$$

Также, если $M \subset C(Q)$ – m-связное множество, то каждое из множеств $M \cap f^{-1}((-\infty, r])$ и $f^{-1}(r)$ является m-связным для любого $f \in \operatorname{ext} S^*$. Отсюда с учетом (3.28) следует, что шар $B(x, r)$ произвольного линейного нормированного пространства всегда монотонно линейно связан.

1. Пусть M ограниченно компактно и пусть M', M'' – две произвольные компоненты связности множества M. Предположим, что найдутся $x \in M'$, $y \in M''$ такие, что $\|x-y\| < 2R$. Как и ранее, $D_R(x, y) = \mathrm{m}(x, y)$.

В силу (3.41) пересечение $M \cap \mathrm{m}(x,y)$ m-связно и, по теореме 3.2, монотонно линейно связно. Это противоречит тому, что x и y лежат в разных компонентах связности множества M.

Рассмотрим теперь отдельную компоненту связности M' множества M. По доказанному выше, расстояние между любыми двумя компонентами связности не менее $2R$. Следовательно, поскольку по условию множество M R-слабо выпукло, то компонента M' также R-слабо выпукла и, в силу (3.40), m-связна. Теперь монотонная линейная связность M' вытекает из теоремы 3.2.

2. Из доказанного в п. 1 следует, что если $M \cap \mathring{B}(x,r) \neq \varnothing$ (при некотором $r \in (0,R]$), то $M \cap \mathring{B}(x,r) = M' \cap \mathring{B}(x,r)$ для некоторой компоненты связности M' множества M. По доказанному выше M' монотонно линейно связно. В пространстве $C(Q)$ любой замкнутый шар имеет вид $\mathrm{m}(u,v)$ (см. (3.2)). Теперь утверждения d), e) следуют из (3.41). Утверждение c) есть следствие d). Теорема 3.9 доказана. □

Доказательство теоремы 3.10. Доказательство первой части полностью аналогично доказательству теоремы 3.9 с учетом леммы 3.6 и предложения 3.12.

2. Понятно, что если $M \cap \mathring{B}(x,r) \neq \varnothing$ при некотором $r \in (0,R]$, то $M \cap \mathring{B}(x,r) = M' \cap \mathring{B}(x,r)$ для некоторой компоненты связности M' множества M. По доказанному выше компонента M' монотонно линейно связна (и следовательно, m-связна). Теперь для завершения доказательства остается воспользоваться (3.41). Теорема 3.10 доказана. □

Доказательство теоремы 3.12. По теореме 3.9 каждая компонента связности множества M монотонно линейно связна. По теореме 3.2 ограниченно компактное m-связное множество P-ациклично, а по теореме Власова [50; теорема 4.4] каждое непустое P-ацикличное ограниченно компактное подмножество банахова пространства является солнцем.

Обратно. В силу (3.40) каждое монотонно линейно связное множество является R-слабо выпуклым множеством. Понятно, что любое дизъюнктное объединение таких множеств, при условии того, что компоненты связности объединения отстоят друг от друга на расстояние не менее $2R$, снова является R-слабо выпуклым множеством. Теорема 3.12 доказана. □

Доказательство теоремы 3.11. По теореме 3.10 каждая компонента связности множества M монотонно линейно связна, при этом хаусдорфово расстояние между любыми компонентами связности не менее $2R$. Для любой компоненты связности имеем: по теореме 3.2 замкнутое m-связное множество в X_n P-ациклично, а по теореме Власова [50; теорема 4.4] каждое P-ацикличное ограниченно компактное подмножество банахова пространства является солнцем. Окончательно, в силу равенства $D_r(u,v) = D_R(u,v) = \mathrm{m}(u,v)$ каждое монотонно линейно связное множество является R-слабо выпуклым множеством. Понятно, что любое дизъюнктное объединение таких множеств, при условии того, что компоненты связности объединения отстоят друг от друга на расстояние не менее $2R$, снова является R-слабо выпуклым множеством. Теорема 3.11 доказана. $\square$

Глава 4. Локальные аппроксимативно-геометрические свойства солнц и чебышёвских множеств

Мы рассматриваем локальные аппроксимативно-геометрические свойства солнц и чебышевских множеств в банаховых пространствах с упором на вопрос сохранения солнечности, связности и других аппроксимативных свойств при пересечении таких множеств с подмножествами пространства (в частности, с шарами, брусами и экстремальными гиперплоскостями).

В § 4.1 мы получаем геометрическую характеризацию строгих солнц в пространстве $\ell^\infty(n)$ (теорема 4.1), дополняя характеризацию Беренса и Хетцельта для солнц в пространстве $\ell^\infty(n)$ (теорема 3.A).

В § 4.2 мы решаем классическую задачу о характеризации в геометрических терминах чебышёвских множеств в пространствах типа $C(Q)$. Для пространства $\ell^\infty(n)$ такая задача была поставлена в 1980-х годах независимо В. М. Тихомировым и Х. Беренсом. Характеризация чебышёвских множеств в $\ell^\infty(n)$ дается в теореме 4.2. На случай c_0 результат теоремы 4.2 обобщается в теореме 4.3, где дается характеризация аппроксимативно компактных чебышёвских подмножеств M пространства c_0. Оказывается, что в таких пространствах чебышёвское множество является экстремально чебышёвским (теорема 4.4). В частности, если M – чебышёвское множество в $\ell^\infty(n)$, а Π – брус в $\ell^\infty(n)$, $M \cap \Pi \neq \varnothing$, $M \cap \operatorname{ri} \Pi = \varnothing$, то пересечение $M \cap \Pi$ одноточечно (в классическом случае в определении чебышёвского множества роль бруса играет замкнутый шар).

В теореме 4.5 исследуется задача о сохранении аппроксимативных свойств солнц, строгих солнц и чебышёвских множеств при их пересечении с координатными подпространствами в $\ell^\infty(n)$. Более общий случай пересечений с брусами (замкнутыми промежутками) будет рассмотрен в теореме 4.19. Аналогичный вопрос в бесконечномерном случае рассматривается в теоремах 4.6, 4.7, 4.8, 4.9.

В § 4.3 рассматривается вопрос о локальных аппроксимативно-геометрических свойствах множеств в произвольных банаховых пространствах. Исследуется солнечность пересечений солнц, строгих солнц и α-солнц с брусами и замкнутыми промежутками Π в линейных нормированных пространствах. В задаче о солнечности пересечений солнц с такими подмножествами указанная экстремальная структура множеств Π важна и естественна. К примеру, если подпространство $H \subset \ell^\infty(n)$ не экстремально (т.е. порождено не экстремальным функционалом), то оказывается, что всегда можно построить солнце M в $\ell^\infty(n)$, для которого пересечение $M \cap H$ не стягиваемо (и, следовательно, не является солнцем). Аналогичный результат верен и в общих пространствах (теорема 4.14). Мы показываем, что в широком классе линейных нормированных пространств солнечность (глобальная) влечет локальную солнечность в естественной постановке при пересечении с множествами из самого естественного в этой ситуации классами – брусами и замкнутыми промежутками (в частности с замкнутыми шарами и экстремальными гиперполосами). В теоремах 4.11–4.13 даются условия, обеспечивающие солнечность пересечений солнц с брусами. Естественность бруса в данной задаче показана в теореме 4.14, где дается характеризация брусов в терминах солнечности их пересечений с солнцами.

В теореме 4.10 показывается, что солнца в конечномерных (BM)-пространствах (в частности, в полиэдральных пространствах вида $X = X_1 \oplus_\infty \ldots \oplus_\infty X_k$, $\dim X_i \leqslant 2$) удовлетворяют очень сильным условиям связности, являясь монотонно линейными множествами. Как следствие, солнца в таких пространствах B-стягиваемы, являются B-ретрактами, B-солнечны (последнее означает, что пересечение M с любым замкнутым шаром является солнцем) и обладают свойством существования непрерывной мультипликативной (аддитивной) ε-выборки при любом $\varepsilon > 0$.

В § 4.4 вопрос о локальных аппроксимативных свойствах множеств рассматривается для случая пространства $C(Q)$. В теореме 4.15 установлено, что пересечение произвольного строгого протосолнца M в $C(Q)$ с телесным брусом $\Pi \subset C(Q)$ является строгим протосолнцем при естественном предположении, что $M \cap \operatorname{int} \Pi \neq \varnothing$. При этом, если строгое солнце $M \subset C(Q)$ ограниченно компактно, а Π – произвольный брус в $C(Q)$, $M \cap \Pi \neq \varnothing$, то $M \cap \Pi$ – солнце (не обязательно являющееся строгим солнцем). В теореме 4.16 утверждается, что телесные брусы Π в $C(Q)$ характеризуются свойством, что пересечение Π с произвольным строгим протосолнцем M в $C(Q)$, $M \cap \operatorname{int} \Pi \neq \varnothing$, является строгим протосолнцем. В теореме 4.17 дается характеризация строгих солнц в $C(Q)$ в терминах аппроксимативных свойств их пересечений с брусами. Вопрос о солнечности пересечений солнц с брусами (замкнутыми промежутками) в общих банаховых пространствах рассматривается в теоремах 4.11–4.13. В теореме 4.19 дана характеризация замкнутых множеств $\Pi \subset \mathbb{R}^n$, пересечение с которыми чебышёвского множества (солнца, строгого солнца) M в $\ell^\infty(n)$ сохраняет (в естественной постановке) аппроксимативные свойства множества M. Оказывается, что такие множества Π в точности являются брусами в $\mathbb{R}^n$. В теоремах 4.20–4.22 получены новые локальные характеризации чебышёвских множеств, солнц и строгих солнц в $\ell^\infty(n)$ в терминах аппроксимативных свойств их пересечений с брусами в $\mathbb{R}^n$. К примеру, множество $M \subset \mathbb{R}^n$ является чебышёвским в $\ell^\infty(n)$ если и только если для любых точек $x, y \in \mathbb{R}^n$ таких, что $[[x, y]] \cap M \neq \varnothing$, любая точка из интервала $[[x, y]]$ имеет единственную ближайшую в пересечении $[[x, y]] \cap M$.

В § 4.5 изучаются аппроксимативные свойства пересечений солнц и чебышёвских множеств в двумерном банаховом пространстве X_2 с подмножествами из $\mathbb{R}^2$. Охарактеризованы подмножества $\mathbb{R}^2$, которые при пересечении с солнцами из X_2 являются солнцами. Аналогичный вопрос полностью исследован для чебышёвских множеств в X_2.

4.1. Характеризация строгих солнц в пространстве $\ell^\infty(n)$. Для множества $M \subset \mathbb{R}^n$ определим

$$\operatorname{eqc}(M) = \operatorname{eqc}_{\mathbb{R}^n}(M) := \bigl\{ j \in \{1, \dots, n\} \,|\, x_j = y_j \text{ для всех } x, y \in M \bigr\},$$
$$x = (x_1, \dots, x_n), \quad y = (y_1, \dots, y_n);$$

"eqc" – аббревиатура выражения 'equal coordinates' – равные координаты.

Для $x, y \in \mathbb{R}^n$ и $M \subset \mathbb{R}^n$ мы пишем, что

$x \mathrel{\ddagger_M} y$, если $x_j \neq y_j$ для всех $j \notin \operatorname{eqc}(M)$;
$x \ddagger y$, если $x_i \neq y_i$ для всех $i = 1, \dots, n$.

По аналогии с понятием ℓ^1-выпуклости[8] мы называем множество M *строго ℓ^1-выпуклым*, если

1) оно ℓ^1-выпукло и
2) для всех $x, y \in M$, $x \mathrel{\ddagger_M} y$, найдётся ℓ^1-геодезический сегмент (т.е. дуга длины $\|x - y\|_{\ell^1}$, начинающаяся в x и заканчивающаяся в y) $k(t) \subset M$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, соединяющий x и y, такой, что его координатные функции $[0, 1] \ni t \mapsto k_j(t)$ монотонны для $j = 1, 2, \dots, n$ и строго монотонны для $j \notin \operatorname{eqc}(M)$.

[8] В силу леммы 3.1 ℓ^1-выпуклость совпадает с m-связностью относительно нормы $\ell^\infty(n)$.

Свойство строгой ℓ^1-выпуклости (как и свойство метрической ℓ^1-выпуклости) является наследственным. Именно, непосредственно из определения следует, что если $M \subset \mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^m$ – строго ℓ^1-выпуклое множество в $\mathbb{R}^k$, то оно строго ℓ^1-выпукло и в $\mathbb{R}^m$. Если множество M метрически ℓ^1-выпукло в $\mathbb{R}^m$ и $k \leqslant m$, то $M \subset \mathbb{R}^k$ ℓ^1-выпукло в $\mathbb{R}^k$.

Заметим, что при переходе к меньшей размерности свойство строгой ℓ^1-выпуклости может теряться, хотя ℓ^1-выпуклость сохраняется всегда. Действительно, пусть $A = (2, 0, 0)$, $B = (0, 2, 0) \in \mathbb{R}^3$. Для $0 \leqslant t \leqslant 1$ определим точку $C_t = (t, t, 0)$ и построим семейство однозвенных ломаных в плоскости $\mathbb{R}^2 = \{z = 0\}$:

$$M_t = [A, C_t] \cup [C_t, B], \quad 0 \leqslant t < 1, \quad M_1 = [A, B].$$

Тогда множество

$$M = \bigcup_{0 \leqslant t \leqslant 1} \bigl(M_t + (0, 0, t)\bigr) \tag{4.1}$$

строго ℓ^1-выпукло в $\mathbb{R}^3$, но его сечение плоскостью $\mathbb{R}^2 = \{z = 0\}$ представляет собой объединение отрезков $[A, 0]$ и $[0, B]$ и не является строго ℓ^1-выпуклым множеством в $\mathbb{R}^2$. Однако, по основной теореме (ниже) будет следовать, что M – строгое солнце в $\ell^\infty(3)$.

На рис. 1 даны примеры ℓ^1-выпуклых множеств из $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$. Строго ℓ^1-выпуклы из них являются лишь множества во второй и четвертой системе координат.

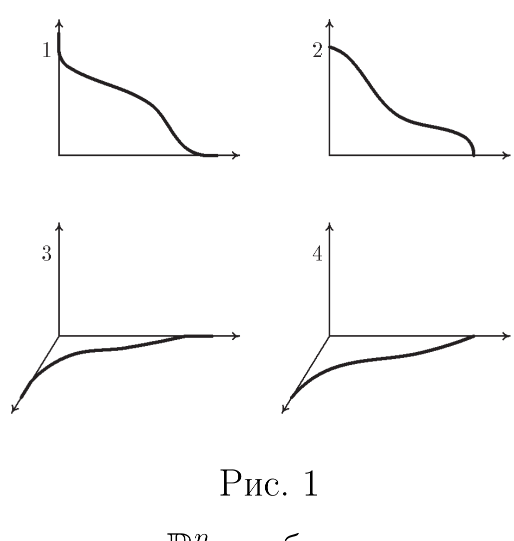

Рис. 1

Под *основным кокрестом* в $\mathbb{R}^n$ мы будем понимать любое из множеств вида

$$c(\mathbb{R}^n) = \bigl\{x \in \mathbb{R}^n \,|\, x_j = \mathrm{const}_j \text{ для некоторого } j \in \{1, \dots, n\}\bigr\}.$$

(здесь $\mathrm{const}(j)$ – константа, зависящая только от координаты j); а под *кокрестом* $c_{\mathbb{R}^n}(J)$ *по набору координат* $J = \{j_1, \dots, j_k\} \subset \{1, \dots, n\}$ мы будем понимать множество

$$c_{\mathbb{R}^n}(J) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_j = c_j \text{ для некоторого } j \in J,\ x_i = c_i \text{ для всех } i \notin J\};$$

при этом, чтобы исключить вырожденные случаи, мы *всегда* предполагаем, что $k \geqslant 2$, т.е. $\mathrm{card}\, J \geqslant 2$ в определении $c_{\mathbb{R}^n}(J)$. Ясно, что $\mathrm{eqc}(c(\mathbb{R}^n)) = \varnothing$.

Наконец, под *кокрестом* будем понимать любое множество $C \subset \mathbb{R}^n$, такое, что $C \subset c_{\mathbb{R}^n}(\{1, \dots, n\} \setminus \mathrm{eqc}(C))$. (При этом всегда $\mathrm{card}\,\mathrm{eqc}(C) < n - 1$.)

На рис. 2 даны примеры кокрестов в $\mathbb{R}^3$.

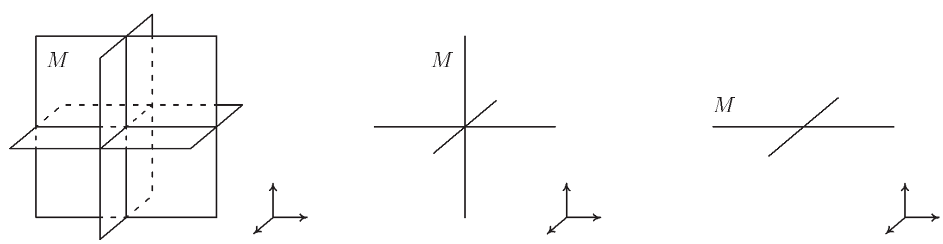

Рис. 2

Любое из множеств M, изображенных на рисунке, является кокрестом, равно как и подмножество $N \subset M$ с $\mathrm{eqc}(N) = \mathrm{eqc}(M)$. Отметим, что первый и третий кокресты не являются строго ℓ^1-выпуклыми множествами (хотя они ℓ^1-выпуклы), а второй кокрест, определяемый формулой $\{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_i = x_j = 0 \text{ для некоторых } i \neq j\}$, является строго ℓ^1-выпуклым множеством.

Кокресты будут играть в некотором смысле особую роль в наших рассуждениях. Как мы увидим ниже (предложение 4.2), кокрест никогда не является строгим солнцем в $\ell^\infty(n)$.

Основным результатом данного параграфа является следующая теорема (Алимов [5]), идейно восходящая к теореме 3.A. В сравнении с леммой 3.C мы здесь получаем чисто геометрическую характеризацию.

Теорема 4.1 (характеризация строгих солнц в $\ell^\infty(n)$). *Пусть* $\varnothing \neq M \subset \mathbb{R}^n$ *замкнуто. Для того, чтобы* M *было строгим солнцем в* $\ell^\infty(n)$

необходимо и достаточно, чтобы оно было строго ℓ^1-выпукло и не являлось кокрестом.

Если H – координатное аффинное подпространство в $\mathbb{R}^n$ (см. определение на стр. 32) и $M \subset \mathbb{R}^n$, то определим

$$M_H = \operatorname{proj}_H M \text{ – координатная проекция } M \text{ на } H,$$

т.е. для $x \in M$ $\operatorname{proj}_H(x) = (x'_1, \dots, x'_n)$, где $x'_i = x_i$ при $i \notin \operatorname{eqc}(H)$, и $x_i = h_i$ для $i \in \operatorname{eqc}(H)$ и любого $h \in H$.

Нам потребуется следующий несложный результат.

Предложение 4.1. *Пусть M – строгое солнце в $\ell^\infty(n)$, H – координатное аффинное подпространство в $\mathbb{R}^n$. Тогда M_H – регулярное множество в $(H, \|\cdot\|_\infty)$.*

Здесь норма $\|\cdot\|_\infty$ на H индуцирована ℓ^∞-нормой на $\mathbb{R}^n$.

Доказательство предложения 4.1. Пусть $x, y \in M_H$, $x \neq y$, и пусть $\xi, \eta \in M$ таковы, что $\operatorname{proj}_H \xi = x$, $\operatorname{proj}_H \eta = y$. По теореме 3.C мы имеем $(\xi, \eta) \in \operatorname{Reg}(M)$ (см. (3.26)). Это означает, что для любого набора индексов $I \subset \{1, \dots, n\} \setminus \operatorname{eqc}(\xi, \eta)$ выполнено

$$\eta \in \operatorname{cl}\{\zeta \in M \mid (\zeta_i - \eta_i)(\xi_i - \eta_i) > 0 \ \text{ для всех } i \in I\}.$$

Докажем, что $(x, y) \in \operatorname{Reg} M_H$. Пусть $J \subset \{1, \dots, n\} \setminus \operatorname{eqc}(x, y)$. Ясно, что $J \subset I$. Отсюда

$$y = \operatorname{proj}_H \eta \in \operatorname{cl}\{z \in M_H \mid (z_i - y_i)(x_i - y_i) > 0 \ \text{ для всех } i \in J\},$$

т.е. $(x, y) \in \operatorname{Reg} M_H$, отсюда по определению M_H – регулярно в пространстве $(H, \|\cdot\|_\infty)$. $\square$

Замечание 4.1. Построим пример строгого солнца M в $\ell^1(3)$, такого, что замыкание его проекции на $H = \mathbb{R}^2$ не будет являться строгим солнцем в $\ell^\infty(2)$ (хотя сама проекция M_H будет регулярным множеством). На плоскости $\mathbb{R}^2$ для каждого $t \in \mathbb{R}$ зададим ломаную M_t следующим уравнением в полярной системе координат (r, φ):

$$M_t = \{r \geqslant 0,\ \varphi = -\frac{1}{4} \operatorname{arcctg} t\} \cup \{r \geqslant 0,\ \varphi = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4} \operatorname{arcctg} t\}.$$

По теореме 3.C множество

$$M = \bigcup \big\{(M_t + (0, 0, t)) \mid t \in \mathbb{R}\big\}$$

является строгим солнцем в $\ell^\infty(3)$, однако его проекция на $\mathbb{R}^2$ представляет собой регулярное множество $\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 \,|\, x_1\cdot x_2<0\}\cup\{(0,0)\}$, замыкание которого не является строгим солнцем в $\ell^1(2)$.

Используя предложение 4.1 мы докажем следующее интуитивно ясное полезное в дальнейшем утверждение.

Предложение 4.2. *Никакой кокрест не является строгим солнцем в $\ell^\infty(n)$.*

Доказательство предложения 4.2. Пусть C – кокрест в $\mathbb{R}^n$. Без ограничения общности считаем, что $\operatorname{eqc}(C)=\varnothing$.

Предположим, что C – строгое солнце в $\ell^\infty(n)$.

Не ограничивая общности будем считать, что $\operatorname{const}(j)=0$ для любого j в определении $c(\mathbb{R}^n)\supset C$, т.е. для любой точки $x\in C$ найдется индекс $i\in\{1,\dots,n\}$ такой, что $x_i=0$.

1. Предположим, что C содержит точку $c=(c_1,\dots,c_n)$, у которой лишь одна координата c_{i_0} равна нулю. Поскольку $C\subset c(\mathbb{R}^n)$, то несложно видеть, что

$$c\in P_Ce_k,\quad \text{где}\quad k=\pm1,\quad e_k=(\varepsilon_1R,\dots,\varepsilon_nR),\quad R=\max_{i=1,\dots,n}|c_i|,$$
$$\varepsilon_i=\operatorname{sign}c_i,\quad i=1,\dots,n,\quad i\neq i_0,\quad \varepsilon_{i_0}=k.$$

По предположению C – строгое солнце. Мы имеем $c\in P_Ce_k$, $k=\pm1$. Поэтому $\mathring{K}(c,e_k)\cap C=\varnothing$, $k=\pm1$, по теореме 1.A. По построению размерность грани шара $B(e_k,R)$, содержащей точку c в своей относительной внутренности, равна $n-1$, $k=\pm1$. Из этого следует, что конусы $\mathring{K}(c,e_k)$, $k=\pm1$, являются взаимно дополняющими друг друга открытыми полупространствами с общей границей G, являющейся аффинными координатным подпространством. Так как $\mathring{K}(c,e_k)\cap C=\varnothing$, $k=\pm1$, то $C\subset G$ и $\operatorname{eqc}(C)\supsetneqq\operatorname{eqc}(G)$. Но G – координатное подпространство, т.е. $\operatorname{eqc}(G)\neq\varnothing$, что противоречит предположению $\operatorname{eqc}(C)=\varnothing$. Случай 1 невозможен.

2. Предположим, что $n\geqslant3$. Предположим также, что, в отличие от п. 1, каждая точка из C имеет не менее двух нулевых координат.

Спроектируем C на координатное подпространство $\mathbb{R}^{n-1}:=\{x\in\mathbb{R}^n \,|\, x_n=0\}$:

$$C_{n-1}=\operatorname{proj}_{\mathbb{R}^{n-1}}C.$$

Так как $\mathrm{eqc}_{\mathbb{R}^n} C = \varnothing$, то $\mathrm{eqc}_{\mathbb{R}^{n-1}}(C_{n-1}) = \varnothing$. По предложению 4.1 C_{n-1} – регулярное множество в пространстве $\ell^\infty(n-1)$. По предположению каждая точка из C имеет не менее двух нулевых координат, поэтому $C_{n-1} \subset c(\mathbb{R}^{n-1})$, а поскольку $\mathrm{eqc}_{\mathbb{R}^{n-1}}(C_{n-1}) = \varnothing$, то C_{n-1} – кокрест в пространстве $\mathbb{R}^{n-1}$.

3. Далее рассуждаем аналогично предыдущему. Если найдется точка $c \in C_{n-1}$ с только одной ненулевой координатой (в пространстве $\mathbb{R}^{n-1}$), то мы оказываемся в ситуации п. 1 с $\mathbb{R}^n$, замененным на $\mathbb{R}^{n-1}$, и рассуждая аналогично, приходим к противоречию. Если же $n \geqslant 2$ и все точки из C_{n-1} имеют не менее двух нулевых координат, то действуя как в п. 2 уменьшаем размерность на единицу. В результате мы или придем к противоречию или к ситуации $n = 2$, $C_2 \subset c(\mathbb{R}^2)$ – кокрест в $\mathbb{R}^2$ и C_2 регулярно в $\ell^\infty(2)$.

Тогда в C_2 в силу условия $\mathrm{eqc}_{\mathbb{R}^2}(C_2) \neq \varnothing$ найдется точка с координатами $(\alpha, 0)$, $\alpha \neq 0$, – но по п. 1 такая ситуация невозможна. Предложение 4.2 доказано. $\square$

Для доказательства теоремы 4.1 воспользуемся следующим результатом, принадлежащим Д. Браессу [144].

Лемма 4.A. *Пусть M — строгое солнце в $\ell^\infty(n)$. Если $u, w \in M$, то существует непрерывная дуга $k(t) \subset M$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, соединяющая u с w, такая, что ее координатные функции $k_i(t)$ монотонны по t, $i = 1, \dots, n$. Функции $k_i(t)$ строго монотонны при условии, что $u \mathrel{+\!\!\!\!\!\;\;\not} w$.*

Доказательство теоремы 4.1. *Необходимость.* Предположим, что M — строгое солнце в $\ell^\infty(n)$. По предложению 4.1 множество M не является кокрестом.

Если $\mathrm{eqc}(M) = \varnothing$, то отношение '$\not\mp_M$' совпадает с '$\not\mp$', поэтому строгая ℓ^1-выпуклость M немедленно следует из леммы 4.A и теоремы 3.A.

Предположим, что $\mathrm{eqc}(M) \neq \varnothing$; без ограничения общности предположим, что $\mathrm{eqc}(M) = \{1, \dots, m\}$, $1 \leqslant m < n$. Тогда M содержится в аффинном координатном подпространстве H_{n-m} размерности $n - m$. Следовательно, H_{n-m} можно отождествить с пространством $\ell^\infty(n-m)$ – здесь мы без ограничения общности предполагаем, что $0 \in M$. Ясно, что M – строгое солнце в $\ell^\infty(n-m)$. Теперь строгая ℓ^1-выпуклость M следует из леммы 4.A и теоремы 3.A, примененных к $\ell^\infty(n-m)$.

Достаточность. Без ограничения общности можно считать, что $\mathrm{eqc}(M) = \varnothing$. Тогда случай $\mathrm{eqc}(M) \neq \varnothing$ будет следовать из случая $\mathrm{eqc}(M) = \varnothing$, поскольку если $\mathrm{eqc}(M) \neq \varnothing$ и H – координатное аффинное подпространство в $\mathbb{R}^n$, содержащее M, и M – строгое солнце в $(H, \|\cdot\|_\infty)$, то M – строгое солнце в $\ell^\infty(n)$. Этот факт является следствием теоремы 3.C.

Итак, $\mathrm{eqc}(M) = \varnothing$. По теореме 3.A множество M является солнцем. Докажем, что M является строгим солнцем, для чего воспользуемся теоремой 1.A и докажем, что для любой точки $x \notin M$ и любой точки $y \in P_M x$ выполнено $\mathring{K}(y, x) \cap M = \varnothing$. Без ограничения общности считаем $x = 0$, $\rho(0, M) = \|y\| = 1$, а также $y_i \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, n$. Обозначим $J = \{j \mid y_j = 1\}$. Так как $\|y\| = 1$ и $y_i \geqslant 0$, то $J \neq \varnothing$.

Предположим, что $\mathring{K}(y, 0) \cap M \neq \varnothing$.

Для точки $v \in \mathbb{R}^n$ определим

$$\mathcal{E}(v) = \bigl\{x \in \mathbb{R}^n \mid x_m = v_m \text{ для некоторого } m = m(x) \in \{1, \ldots, n\}\bigr\}.$$

Ясно, что $\mathcal{E}(v)$ – основной кокрест в $\mathbb{R}^n$. Определим $H = \mathcal{E}(y) \cap \mathring{K}(y, 0)$.

1. Пусть $w \in \mathring{K}(y, 0) \cap M$ и $w \notin H$. Тогда $w \notin \mathcal{E}(y)$. Поэтому $w \nparallel y$, и по строгой ℓ^1-выпуклости M это влечет, что w и y могут быть соединены строго монотонным ℓ^1-геодезическим сегментом $k(t) \subset M$, $k(0) = y$, $k(1) = w$.

Докажем, что $k(t) \subset \mathring{B}(0, 1)$ при всех достаточно малых t. В нашей ситуации $\mathring{K}(y, 0) = \{z \mid z_j < 1 \text{ при } j \in J\}$. Так как $w \in \mathring{K}(y, 0)$ и координатные функции кривой $k(t)$ строго монотонны, то $w_j < k_j(t) < 1$ при $j \in J$ и всех $0 < t < 1$. Поскольку $k_j(t) \to y_j = 1$ при $t \to 0$, $j \in J$, то для некоторого $\varepsilon > 0$

$$0 < k_j(t) < 1 \quad \text{при } j \in J \ \text{ и } \ t \in (0, \varepsilon). \tag{4.2}$$

Далее, $k_m(t) \to y_m$ при $t \to 0$, $1 \leqslant m \leqslant n$, и $0 \leqslant y_i < 1$ при $i \notin J$. Поэтому при некотором $\varepsilon_1 > 0$

$$|k_i(t) - y_i| < 1 - y_i \quad \text{при } \ i \notin J, \ \ 0 < t < \varepsilon_1.$$

Отсюда и из (4.2) имеем

$$-1 < k_m(t) < 1, \qquad t \in (0, \min\{\varepsilon, \varepsilon_1\}), \ \ m = 1, \ldots, n.$$

Следовательно, $k(t) \subset \mathring{B}(0, 1)$ при $t \in (0, \min\{\varepsilon, \varepsilon_1\})$. Однако это невозможно, так как по условию $y \in P_M 0$, т.е. $\mathring{B}(0, 1) \cap M = \varnothing$.

2. Предположим теперь, что $M \cap \mathring{K}(y,0) \subset H$. Пусть $u \in H \cap M$. Так как M не кокрест и $\operatorname{eqc}(M) = \varnothing$, то $M \not\subset \mathcal{E}(u)$. Следовательно, найдется точка $v \in M$, $v \notin \mathcal{E}(u)$, т.е. $v \mathrel{\not\parallel} u$. В этом случае по строгой ℓ^1-выпуклости M точки u и v соединены строго монотонным ℓ^1-геодезическим сегментом $k(t) \subset M$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, $k(0) = u$, $k(1) = v$. Так как $u \in \mathring{K}(y,0)$, то $u_j < 1$ при $j \in J$ и, следовательно, $k_j(t) < 1$ при $j \in J$ и $0 < t < \varepsilon_2$ при некотором ε_2, т.е. $k(t) \in \mathring{K}(y,0)$ при $0 < t < \varepsilon_2$. Из строгой монотонности $k(t)$ следует, что $k(t) \mathrel{\not\parallel} y$ при всех $t \in (0,\varepsilon_3)$ при некотором ε_3. Итак, при $0 < t < \min\{\varepsilon_2,\varepsilon_3\}$ кривая $k(t) \subset M$ содержится в $\mathring{K}(y,0)$ и не содержится в H, что противоречит предположению $M \cap \mathring{K}(y,0) = H$.

Окончательно, предположение $\mathring{K}(y,0) \cap M \neq \varnothing$ неверно и M – строгое солнце по теореме 1.A. Теорема 4.1 доказана. □

4.2. Характеризация чебышёвских множеств в пространствах типа $C(Q)$. В данном параграфе мы рассматриваем и решаем давно стоящую задачу о характеризации в геометрических терминах чебышёвских множеств в пространствах типа $C(Q)$. Для пространства $\ell^\infty(n)$ такая задача была поставлена в 1980-х годах независимо В. М. Тихомировым и Х. Беренсом. На плоскости исчерпывающий ответ для произвольной нормы был дан П. Грубером [202] (см. также теорему 4.C в § 4.5). Ч. Данхем [179; Theorem 6] и Д. Браесс [144] независимо получили характеризацию, соответственно, ограниченно компактных и аппроксимативно компактных чебышёвских множеств в пространстве $C(Q)$ в аппроксимативных терминах (см. теорему 4.A).

Полный ответ на вопрос геометрической характеризации чебышёвских множеств в пространстве $\ell^\infty(n)$ дается в теореме 4.2 (Алимов [7]).

Нам потребуются несколько определений.

Пусть $X = \ell^\infty(n)$ или c_0. Пусть также $k \in \mathbb{Z}_+$, $k \leqslant \dim X$.

Пусть, как и выше, $\mathrm{cAff}_k(X)$ – класс всех аффинных координатных подпространств из X размерности k, $\mathrm{cAff}^k(c_0)$ – класс всех аффинных координатных подпространств коразмерности k.

Далее, пусть $M \subset X$, $2 \leqslant k \leqslant n$, $P \in \mathrm{cAff}_k(X)$, $Q \in \mathrm{cAff}_{k-1}(P)$.

Мы будем говорить, что Q – *локально опорная гиперплоскость* к множеству M в подпространстве P ($Q \in \mathrm{locTan}_P(M)$), если найдутся точка

$x \in P \cap M$ и ее окрестность $\mathcal{O}(x)$ в P такие, что Q является опорной гиперплоскостью к $M \cap \mathcal{O}(x)$ в P. Утверждение, что Q – *опорная гиперплоскость* к множеству $M \cap P$ в подпространстве P будет пониматься обычным образом и записывается в виде $Q \in \mathrm{Tan}_P(M)$.

Теорема 4.2 (характеризация чебышёвских множеств в $\ell^\infty(n)$). *Множество $M \neq \varnothing$ является чебышёвским в $\ell^\infty(n)$ тогда и только тогда, когда одновременно выполнены следующие условия*:

a) *множество M замкнуто*;
b) *множество $M \cap P$ связно для любых $k = 1, \dots, n$ и $P \in \mathrm{cAff}_k(\mathbb{R}^n)$*;
c) *для любых $k = 2, \dots, n$, $P \in \mathrm{cAff}_k(\mathbb{R}^n)$ и $Q \in \mathrm{cAff}_{k-1}(P)$ из условия $Q \in \mathrm{locTan}_P(M)$ вытекает, что $Q \in \mathrm{Tan}_P(M)$ и пересечение $Q \cap M$ одноточечно.*

Развитием теоремы 4.2 на случай пространства c_0 является следующий результат (Алимов [123]).

Теорема 4.3. *Аппроксимативно компактное подмножество M пространства c_0 является чебышёвским в c_0 тогда и только тогда, когда одновременно выполнены следующие условия*:

a) *множество $M \cap H$ связно при всех $k \in \mathbb{Z}_+$ и $H \in \mathrm{cAff}^k(c_0)$*;
b) *для любых $k \in \mathbb{Z}_+$, $H \in \mathrm{cAff}^k(c_0)$ и $Q \in \mathrm{cAff}^{(k+1)}(H)$ из условия $Q \in \mathrm{locTan}_H(M)$ вытекает, что $Q \in \mathrm{Tan}_H(M)$ и пересечение $Q \cap M$ одноточечно.*

Сразу отметим следующее достаточно неожиданное следствие из теорем 4.2–4.3; мы его докажем ниже.

Теорема 4.4. *Имеют место следующие утверждения*:

1) *Чебышёвское множество в $\ell^\infty(n)$ является экстремально чебышёвским. Иными словами, если Π – брус в $\ell^\infty(n)$, $M \cap \Pi \neq \varnothing$, $M \cap \mathrm{ri}\,\Pi = \varnothing$, то пересечение $M \cap \Pi$ одноточечно.*

2) *Пусть M – аппроксимативно компактное чебышёвское множество в c_0. Предположим, что Π – замкнутый промежуток конечного дефекта в c_0, $M \cap \Pi \neq \varnothing$, $M \cap \mathrm{ri}\,\Pi = \varnothing$. Тогда пересечение $M \cap \Pi$ одноточечно.*

Иными словами, в пространствах $\ell^\infty(n)$ и c_0 чебышёвское множество является чебышёвским “во всём”.

Для доказательства теорем 4.2, 4.3 нам потребуются несколько технических результатов. Также нам придется рассмотреть вопрос об аппроксимативных свойствах сечений чебышёвских множеств, солнц и строгих солнц координатными подпространствами. Более подробно данный вопрос в более общей постановке для пересечений с брусами и замкнутыми промежутками будет рассмотрен в гл. 4.

Для $x, y \in \ell^\infty(n)$ через $\mathring{\mathrm{m}}(x,y)$ обозначим относительную внутренность оболочки $\mathrm{m}(x,y)$. Напомним, что в силу равенства $\mathrm{m}(\cdot,\cdot) = [\![\cdot,\cdot]\!]$ (имеющего место в любом сепарабельном пространстве)

$$\mathrm{m}(x,y) = \{z \mid \|x-y\|_{\ell^1(n)} = \|x-z\|_{\ell^1(n)} + \|z-y\|_{\ell^1(n)}\}.$$

Лемма 4.1. *Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ – солнце в $\ell^\infty(n)$ и $H \in \mathrm{cAff}_{n-1}(\mathbb{R}^n)$. Посредством H^+, H^- обозначим два непересекающихся открытых полупространства с границей H. Для $x, y \in H$, $x \neq y$, будем считать $Z = \mathrm{m}(x,y)$ или $Z = \mathring{\mathrm{m}}(x,y)$, и положим $Z^\pm = \{z \in H^\pm \mid \operatorname{proj}_H z \in Z\}$. Тогда если $Z \cap M = \varnothing$, то*

$$Z^+ \cap M = \varnothing \quad \text{или} \quad Z^- \cap M = \varnothing.$$

Доказательство. Без ограничения общности считаем $0 \in H$. Пусть f – линейный функционал на $\mathbb{R}^n$ такой, что $\operatorname{Ker} f = H$. Тогда $H^\pm = \{z \in \mathbb{R}^n \mid f(z) \gtrless 0\}$.

Предположим противное: пусть $x, y \in H$ таковы, что выполнено

$$Z \cap M = \varnothing, \quad \text{но} \quad Z^+ \cap M \neq \varnothing \quad \text{и} \quad Z^- \cap M \neq \varnothing.$$

Выберем $z^\pm \in Z^\pm \cap M$. Поскольку M – солнце, то по теореме 3.A оно замкнуто и ℓ^1-выпукло; поэтому найдется ℓ^1-геодезический сегмент (монотонная дуга) $k(t) \subset M$, $t \in [0,1]$, соединяющий z^+ и z^-. Поскольку $\operatorname{proj}_H z^\pm \in Z$, то $\mathrm{m}(\operatorname{proj}_H z^+, \operatorname{proj}_H z^-) \subset Z$. Из этого, в силу монотонности по t координатных функций $k_i(t)$, $i = 1, \dots, n$, кривой $k(t)$, следует, что

$$\operatorname{proj}_H k(t) \subset \mathrm{m}(\operatorname{proj}_H z^+, \operatorname{proj}_H z^-) \subset Z.$$

Окончательно, поскольку $f(z^+)f(z^-) < 0$, из непрерывности $k(t)$ следует, что найдется $t_0 \in (0,1)$, для которого $f(k(t_0)) = 0$, т. е. $k(t_0) \in Z$. Но, поскольку $k(t) \subset M$, мы получили противоречие с тем, что $Z \cap M = \varnothing$. Лемма 4.1 доказана. $\square$

Для $F \subset \mathbb{R}^n$ и $y \in \operatorname{bd} F$ определим

$$\operatorname{cone}(F,y) = \{\alpha f + (1-\alpha)y \mid f \in F,\ \alpha \geqslant 0\}.$$

Если $X = \ell^\infty(n)$, $y \in X$ и $\|y\|_\infty = 1$, то положим

$E(y)$ — наименьшая грань шара B, содержащая y (тогда $y \in \operatorname{ri} E(y)$),

$\mathcal{F}(y)$ — множество всех собственных граней шара B, содержащих y,

где, напомним, гранью выпуклого множества C называется такое его выпуклое подмножество $F \subset C$, что концы каждого отрезка в C, имеющего относительную внутреннюю точку в F, принадлежат множеству F.

Следующее утверждение является техническим и наглядно ясным.

Лемма 4.2. *Пусть $X = \ell^\infty(n)$, $\|y\|_\infty = 1$. Тогда*

$$\operatorname{bd} \mathring{K}(y, 0) = \bigcup_{F \in \mathcal{F}(y)} \operatorname{cone}(\operatorname{ri} F, y). \tag{4.3}$$

Утверждение леммы 4.2 немедленно следует из определения опорного конуса $\mathring{K}(y, 0)$ и утверждения, что для выпуклого тела $C \subset \mathbb{R}^n$ выполнено $\operatorname{bd} C = \cup \operatorname{ri} F$, где объединение берется по всем собственным граням тела C (см., например, [89; теорема 18.2]).

Для доказательства теоремы 4.2 мы рассмотрим следующий вопрос, имеющий самостоятельный интерес и являющимся одним из вариантов вопроса о локальных аппроксимативных свойствах множеств.

Дано множество $M \subset \mathbb{R}^n$, обладающее определенными аппроксимативными свойствами в $\ell^\infty(n)$. Пусть $H \subset \mathbb{R}^n$ – подпространство. Какими будут аппроксимативные свойства множества $M \cap H$ в подпространстве H с нормой, индуцированной[9] нормой $\ell^\infty(n)$? Ответ на этот вопрос принципиально отличается в зависимости от того, является ли подпространство H координатным (экстремальным) или нет.

Следующий простой пример на плоскости $\mathbb{R}^2 = \{(\xi_1, \xi_2)\}$ чебышёвского множества $M = \{\xi_2 = 1/\xi_1 \mid \xi_1 > 0\}$ в $\ell^\infty(2)$ и *некоординатной* прямой $H = \{\xi_1 + \xi_2 = 4\}$ показывает, что пересечение $M \cap H$ несвязно и, следовательно, не может являться чебышёвским множеством в H ни в какой норме на H.

[9]Более конкретно: для определения нормы на H за нулевой элемент θ можно принять любой элемент из H, тогда норму на H определим как функционал Минковского множества $B(\theta, 1) \cap H$ относительно точки θ. Поскольку H – координатное (экстремальное) подпространство, то ясно, что если $\mathring{B}(x, 1) \cap H \neq \varnothing$, то пересечение $B(x, 1) \cap H$ изометрически изоморфно множеству $B(\theta, 1) \cap H$. Если координатное подпространство H снабжено определенной таким образом нормой, то для обозначения шара, сферы, конуса и т. п. мы будем использовать те же обозначения, что и для всего пространства, но с индексом H внизу: $B_H(x, r)$, $S_H(x, r)$, $\mathring{K}_H(x, y)$ и т. п.

Оказывается, что если брать подпространство H координатным (экстремальным), то ситуация в корне меняется: чебышёвские множества и солнца в $\ell^\infty(n)$ сохраняют свои аппроксимативные свойства в H при пересечении с *координатными* подпространствами H, а пересечение строгого солнца с координатным подпространством H всегда является солнцем в H и "почти всегда" является строгим солнцем (см. теорему 4.5, Алимов [7]).

Теорема 4.5. *Пусть* $M \subset \mathbb{R}^n$, $1 \leqslant k \leqslant n-1$ *и* $H \in \mathrm{cAff}_k(\mathbb{R}^n)$ – *координатное аффинное подпространство, норма на* H *индуцирована нормой* $\|\cdot\|_\infty$ *в* $\mathbb{R}^n$. *Пусть* $M \cap H \neq \varnothing$. *Тогда*:

а) *Если* M – *чебышёвское множество в* $\ell^\infty(n)$, *то* $M \cap H$ – *чебышёвское множество в* H;
б) *Если* M – *солнце в* $\ell^\infty(n)$, *то* $M \cap H$ – *солнце в* H;
в) *Если* M – *строгое солнце в* $\ell^\infty(n)$, *то возможны два варианта: или* $M \cap H$ – *строгое солнце в* H, *или* $M \cap H$ – *солнце, но не строгое солнце в* H, *в последнем случае найдется опорный конус* $K = \mathring{K}(\xi, \zeta) \subset \mathbb{R}^n$ *линейной размерности*[10] $\geqslant k$ *такой, что* $H \subset \operatorname{bd} K$ *и* $\operatorname{int} K \cap M = \varnothing$, *при этом* $M \not\subset H$.

Замечание 4.2. В теореме 4.5 утверждение б) известно и следует из теоремы 3.A; утверждения а) и в) являются новыми. Пункт в) указывает на возможность существования такого строгого солнца M, сечение которого координатным подпространством H может не быть строгим солнцем в H (и в [5] (см. также (4.1)) построен пример такого строгого солнца M и такой гиперплоскости H в $\ell^\infty(3)$). Однако такая ситуация не является типичной, так как в таком случае по п. в) гиперплоскость H является опорной к M и, более того, $M \not\subset H$, и поэтому таких "неправильных" гиперплоскостей H не более 2^n.

В бесконечномерном случае имеет место следующий результат (см. также теорему 4.3, § 4.4).

Теорема 4.6. *Пусть* M – *чебышёвское солнце в* $X = c_0, c$ *или* ℓ^∞ *и пусть* $H \in \mathrm{cAff}_k(X)$ – *координатное подпространство размерности* k.

[10] Напомним, что под линейной размерностью выпуклого множества $C \subset \mathbb{R}^n$ понимается размерность максимального аффинного подпространства, содержащегося в C. Понятно, что для опорного конуса $\mathring{K}(x, y)$ в $\ell^\infty(n)$ такое максимальное подпространство всегда можно выбрать координатным.

Предположим, что $M \cap H \neq \varnothing$. Тогда $M \cap H$ – чебышёвское солнце в H.

Доказательство теоремы 4.6. Без ограничения общности считаем $0 \in H$ и отождествим H с $\mathbb{R}^k$, считая множество I в определении $H \in \mathrm{cAff}_k(X)$ равным $I = \{k+1, k+2, \dots\}$. Из теоремы 3.4 следует, что $M \cap H_n$ – солнце в H_n для всех $n \in \mathbb{N}$, являющееся монотонно линейно связным множеством. Не ограничивая общности считаем $0 \notin M \cap H_k$, $\rho(0, M \cap H_k) = 1$, где $\rho(0, M \cap H_k)$ – расстояние от 0 до $M \cap H_k$. Определим подпространство H_{k+1} как

$$H \oplus \{x \in X \mid x^{(k+1)} \in \mathbb{R}, \quad x^{(j)} = 0 \quad \text{при} \quad j \neq k+1\}.$$

В $\mathbb{R}^{k+1}$ рассмотрим два множества

$$B^{\pm}_{k+1} = \{x \in \mathbb{R}^{k+1} \mid |x^{(1)}| < 1, \dots, |x^{(k)}| < 1, x^{(k+1)} \gtrless 0\}.$$

Поскольку $M \cap H_{k+1}$ монотонно линейно связно, то по крайней одно из множеств B^+_{k+1} или B^-_{k+1} не пересекается с $\mathrm{proj}_{\mathbb{R}^{k+1}}(M \cap H_{k+1})$. Положим $x_{k+1} = (0, \dots, 0, \pm 1, 0, \dots)$, где знак "+" выбирается, если $B^+_{k+1} \cap (\mathrm{proj}_{\mathbb{R}^{k+1}}(M \cap H_{k+1})) = \varnothing$, "−" – в противном случае. Продолжая этот процесс мы получаем последовательность точек $(x_i)_{i>k}$; у нее есть w^*-слабый предел x_0 (как у ограниченного подмножества в ℓ^∞). По построению открытый шар $\mathring{B}_{\ell^\infty}(x_0, 1)$ с центром в x_0 и радиуса 1 не пересекается с M в ℓ^∞.

Предположим теперь, что $M \cap H_k$ – не является чебышёвским множеством в H_k. Тогда у точки 0 найдутся по крайней мере две ближайшие точки y_1, y_2 из $M \cap H_k$. Более того, найдется монотонная дуга $k(\cdot)$, соединяющая y_1 и y_2 и также лежащая в $P_{M \cap H_k} 0$. Поскольку $\mathring{B}_{\ell^\infty}(x_0, 1) \cap M = \varnothing$, то в случае $X = \ell^\infty$ сразу имеем противоречие с условием, что M – чебышёвское множество.

Рассмотрим теперь случай $X = c_0, c$. Положим

$$x_0' = (0, \dots, 0, x_0^{(k+1)}/(k+1), x_0^{(k+2)}/(k+2), \dots).$$

По построению $x_0' \notin M$; пусть δ – расстояние от x_0' до M. Пусть $y \in k(\cdot)$ – произвольная точка монотонной дуги $k(\cdot)$, расположенная между y_1 и y_2. Далее, пусть

$$x_0'' = ((1-\delta)y^{(1)}, \dots, (1-\delta)y^{(k)}, x'^{(k+1)}, \dots).$$

Тогда расстояние от x'' до M также равно δ (мы изменили лишь первые k координат) и $y \in P_M x''$. Пусть $x_k'' = \mathrm{proj}_{\mathbb{R}^k} x''$. Для шара в $\ell^\infty(k)$

выполнено:

$$\text{если } \|s\| = 1, \quad s \in \ell^\infty(k) \ \text{ и } \ (y,s) \subset S_{\ell^\infty(k)}(0,1),$$
$$\text{то } \ (y,s) \cap S_{\ell^\infty(k)}(x_k'', \delta) \neq \varnothing.$$

В силу этого, поскольку $y \in P_M x''$, имеем, что и некоторый "кусок" кривой $k(\cdot)$ также содержится во множестве $P_M x''$, что противоречит условию, что M – чебышёвское множество. □

Доказательство теоремы 4.5. Применяя нужное число раз теорему 4.6, получаем п. а).

б) следует из теоремы 3.A. Действительно, если M – солнце в $\ell^\infty(n)$, то по теореме 3.A оно ℓ^1-выпукло и замкнуто, а, следовательно, для любого координатного подпространства H множество $M \cap H$ ℓ^1-выпукло. Индуцированная норма на H совпадает с ℓ^∞-нормой. Снова применяя теорему 3.A получаем, что M – солнце в H.

Докажем в). Нам требуется доказать следующее утверждение для $\nu = n-1, \dots, k$:

> Пусть M – строгое солнце в $\ell^\infty(n)$. Тогда если $H \in \mathrm{cAff}_\nu(\mathbb{R}^n)$ такое, что $M \cap H \neq \varnothing$ и $M \cap H$ не является строгим солнцем в H, то $M \not\subset H$ и существует опорный конус $K \subset \mathbb{R}^n$ линейной размерности $\geqslant \nu$ такой, что $H \subset \operatorname{bd} K$ и $\operatorname{int} K \cap M = \varnothing$. $(*_\nu)$

Докажем $(*_\nu)$ по индукции. *Базис индукции.* Установим $(*_{n-1})$. Пусть $H \in \mathrm{cAff}_{n-1}(\mathbb{R}^n)$. По п. б) теоремы 4.5 $M \cap H$ – солнце в H. Предположим, что $M \cap H$ – не является строгим солнцем в H. Тогда по теореме 1.A найдутся точка $x \in H \setminus M$ и точка $y \in M \cap H$, ближайшая к x в H, такие, что $\mathring{K}_H(y,x) \cap M \ni \xi \neq \varnothing$. Без ограничения общности положим $x = 0$, $\|y\| = 1$ и отождествим H с $\mathbb{R}^{n-1}$. Обозначим

$$\mathring{B}_H = \mathring{B} \cap H.$$

Тогда $\mathring{B}_H \cap M = \varnothing$. Пусть ψ – линейный функционал на $\mathbb{R}^n$, $\operatorname{Ker}\psi = H$, $\psi(0,\dots,0,1) = 1$. Обозначим

$$\mathring{B}_H^{\pm} = \{z \in \mathbb{R}^n \mid \psi(z) \gtrless 0 \ \text{ и } \ \operatorname{proj}_H z \in \mathring{B}_H\}.$$

По лемме 4.1 $\mathring{B}_H^+ \cap M = \varnothing$ или $\mathring{B}_H^- \cap M = \varnothing$. Меняя, если необходимо ψ на $-\psi$, считаем, что $\mathring{B}_H^+ \cap M = \varnothing$. Тогда, если обозначить $\hat{x} = (0,\dots,0,1)$, то шар $\mathring{B}(\hat{x},1)$ содержится в цилиндре $\mathring{B}_H^+$ и, следовательно, не пересекается с M. Ясно, что $y \in P_M\hat{x}$. Поскольку M – строгое солнце в $\ell^\infty(n)$, то $\mathring{K}(y,\hat{x})\cap M=\varnothing$ по теореме 1.A. Из построения ясно, что $\operatorname{proj}_H \mathring{K}(y,\hat{x})=\mathring{K}_H(y,0)$. Поэтому

$$\{z\in\mathbb{R}^n \mid \psi(z)>0 \ \text{ и } \ \operatorname{proj}_H z\in \mathring{K}_H(y,0)\}\cap M=\varnothing. \tag{4.4}$$

Теперь вспомним, что $\xi\in\mathring{K}_H(y,0)\cap M$ и положим $\hat{\xi}=\xi+\hat{x}$. Из (4.4) следует, что $\mathring{B}(\hat{\xi},1)\cap M=\varnothing$. Поэтому $\xi\in P_M\hat{\xi}$. Более того, поскольку $B_H(\xi,1)$ – гипергрань шара $B(\hat{\xi},1)$ и $\operatorname{proj}_H\hat{\xi}=\xi$, то что ξ – точка гладкости шара $B(\hat{\xi},1)$. Поэтому $\mathring{K}(\xi,\hat{\xi})$ – открытое полупространство с границей H. Далее, M – строгое солнце в $\ell^\infty(n)$, поэтому $\mathring{K}(\xi,\hat{\xi})\cap M=\varnothing$. Итак, H – опорная гиперплоскость к M, при этом $\{z\mid \psi(z)>0\}\cap M=\varnothing$.

По условию M – строгое солнце в $\ell^\infty(n)$, а по предположению $M\cap H$ не является строгим солнцем в H. Поэтому $M\not\subset H$ и $(*_{n-1})$ доказано.

Шаг индукции. Предположим теперь, что $(*_j)$ верно для всех $j\geqslant\nu+1$. Докажем $(*_\nu)$. Пусть $H\in\operatorname{cAff}_\nu(\mathbb{R}^n)$. Не ограничивая общности отождествим H с $\mathbb{R}^\nu$ и считаем, что $0\notin M$. Пусть $y\in M$ – ближайшая точка из M для 0 в H, не являющая точкой светимости для 0, т.е. $\mathring{K}_H(y,0)\cap M\ni\xi\neq\varnothing$.

Пусть подпространство $H^1\in\operatorname{cAff}_{\nu+1}(\mathbb{R}^n)$ таково, что $H\subset H^1$. Заметим, что из предположения, что M не является строгим солнцем в H^1, сразу следует $(*_\nu)$. Действительно, первая часть утверждения $(*_\nu)$ следует из $(*_{\nu+1})$, а утверждение, что $M\not\subset H$, доказывается как и выше: если предположить, что $M\subset H$, то, применяя лемму 4.1 $(n-\nu)$ раз, имеем,

$$\mathring{B}\cap M=\varnothing,\quad y\in P_M0,\quad \xi\in\mathring{K}(y,0).$$

Соответственно, по теореме 1.A имеем противоречие со строгой солнечностью M в $\ell^\infty(n)$. Поэтому ниже всегда считаем, что

$$M \text{ – строгое солнце в } H^1. \tag{4.5}$$

Отметим, что из (4.5) сразу следует, что $M\not\subset H$.

Пусть 0_H – нулевой элемент в H. По лемме 4.1 $\mathring{B}_H+(0_H,\alpha)\cap M=\varnothing$ для всех $\alpha>0$ или всех $\alpha<0$ (далее считаем выбранным знак “$>$” в последнем утверждении), здесь элемент $(0_H,\alpha)$ принадлежит H^1. Отсюда, положив, $\theta^1=(0_H,1)\in H^1$, имеем: $\mathring{B}_{H^1}(\theta^1,1)\cap M=\varnothing$. Следовательно, в силу (4.5), $\mathring{K}_{H^1}(y,\theta^1)\cap M=\varnothing$. Как и при доказательстве $(*_{n-1})$

имеем, что $\xi \in \operatorname{bd}_{H^1} \mathring{K}_{H^1}(y, \theta^1)$, откуда $\mathring{B}_{H^1}(\theta^1 + \xi, 1) \cap M = \varnothing$ и ξ – точка гладкости этого шара. Это влечет, что конус $\mathring{K}^1 = \mathring{K}^1_H(\xi, \theta^1 + \xi)$ является открытым полупространством в H^1, не пересекающимся с M в силу (4.5) и теоремы 1.A.

Теперь пусть $H^2 \in \operatorname{cAff}_{\nu+2}(\mathbb{R}^n)$ таково, что $H^1 \subset H^2$. Как и для H^1 имеем две возможности: если $M \cap H^2$ – не строгое солнце в H^2, то, действуя как и выше, из $(*_{\nu+2})$ получаем $(*_\nu)$; если же $M \cap H$ – строгое солнце в H^2, то аналогично предыдущему получаем точку $\theta^2 = (\theta^1, 1) \in H^2$. Тогда $\mathring{B}_{H^2}(\theta^2, 1) \cap M = \varnothing$, y – солнечная точка из M в H^2 для θ^2 и, как и выше, открытый опорный конус $\mathring{K}^2 := \mathring{K}_{H^2}(\xi, \theta^2 + \xi)$ не пересекается с M.

Аналогично продолжаем этот процесс до n, получая подпространства H^j, конуса $\mathring{K}^j$ и точки θ^j, $j \geqslant 3$. Как и выше, имеем две возможности: если $M \cap H^{j^0}$ – не строгое солнце в H^{j^0} для некоторого $j_0 \geqslant 3$, тогда из $(*_{\nu+j_0})$ получаем $(*_\nu)$; если же $M \cap H^j$ – строгое солнце в H^j для всех j, то аналогично предыдущему конус $\mathring{K}^n := \mathring{K}(\xi, \theta^n + \xi)$ не пересекается с M. Поскольку $H \subset \mathring{K}^n$, то линейная размерность конуса $\mathring{K}^n$ равна ν. Теорема 4.5 доказана $\square$

Доказательство теоремы 4.2. Пусть M – чебышёвское множество в $\ell^\infty(n)$. Установим а)–в).

Ясно, что M замкнуто. Докажем б). Пусть $k \in \{1, \dots, n\}$ и $P \in \operatorname{cAff}_k(\mathbb{R}^n)$ произвольны. Предположим, что $M \cap P \neq \varnothing$. По теореме 4.5 $M \cap P$ – чебышёвское множество в P. Поскольку в конечномерных пространствах чебышёвские множества связны (см., например, [66; стр. 975]), то $M \cap P$ связно.

в) Пусть $k \in \{2, \dots, n\}$, $P \in \operatorname{cAff}_k(\mathbb{R}^n)$ и $Q \in \operatorname{cAff}_{k-1}(P)$ произвольны. Без ограничения общности считаем $0 \in Q$. Пусть $x \in Q \cap M$ и $\mathcal{O}(x)$ – выпуклая окрестность точки x в P такая, что Q является опорной гиперплоскостью в точке x к множеству $M \cap \mathcal{O}(x)$ в подпространстве P. Тогда $\mathring{B}(x, r) \subset \mathcal{O}(x)$ для некоторого $r > 0$. Пусть φ – линейный функционал на P, $\operatorname{Ker} \varphi = Q$. Обозначим

$$Q^- = \{z \in P \mid \varphi(z) < 0\}.$$

Не ограничивая общности считаем $Q^- \cap (M \cap \mathcal{O}(x)) = \varnothing$.

Выберем точку $\xi \in Q^-$ таким образом, что $\operatorname{proj}_Q \xi = x$ и $\|x - \xi\| < r/2$. Тогда $\mathring{B}_P(\xi, \|\xi - x\|) \subset Q^- \cap \mathcal{O}(x)$. По теореме 4.6 $M \cap P$ – чебышёвское множество в P. Поэтому по теореме 1.А $\mathring{K}_P(x,\xi)\cap M=\varnothing$. Поскольку $\operatorname{proj}_P\xi=x$, то x – точка гладкости шара $B_P(\xi,\|\xi-x\|)$; поэтому $\mathring{K}_P(x,\xi)$ – открытое полупространство, совпадающее с Q^-. Итак, $\mathring{K}_P(x,\xi)\cap M=\varnothing$, и мы доказали глобальную опорность гиперплоскости Q к множеству $M\cap P$.

Утверждение, что $M\cap Q$ пересекаются только по одной точке следует из представления конуса $\mathring{K}(x,\xi)$ в виде (1.9):

$$\mathring{K}_P(x,\xi)=\bigcup_{\alpha>0}\mathring{B}_P(\alpha\xi+(1-\alpha)x,\alpha\|x-\xi\|),$$

откуда x – единственная ближайшая точка из $M\cap P$ для любой точки вида $\alpha\xi+(1-\alpha)x$, а поскольку $\operatorname{bd}\mathring{K}_P(x,\xi)=Q$, в силу чебышёвости $M\cap P$, окончательно имеем $M\cap Q=\{x\}$. Свойство в) доказано.

Пусть для $M\subset\mathbb{R}^n$ выполнены условия а)–в). Докажем, что M – чебышёвское множество.

Пусть $x\notin M$. Установим, что x имеет в точности одну ближайшую из M. Без ограничения общности считаем $x=0$, $\rho(x,M)=1$.

По условию а) M замкнуто, поэтому $P_Mz\neq\varnothing$ для любого $z\in\mathbb{R}^n$. Пусть $y\in P_M0$ такова, что величина

$$d:=\max\{\dim E(z)\mid z\in P_M0\}$$

максимальна. Понятно, что если F – грань шара B и $\dim F>d$, то $\operatorname{ri}F\cap M=\varnothing$.

Установим, что

$$P_M0=\{y\}. \tag{4.6}$$

1. Пусть $d=n-1$. Положим $P=\mathbb{R}^n$, $Q=\operatorname{aff}E(y)$. Поскольку $\mathring{B}\cap M=\varnothing$, то Q – локально опорная гиперплоскость к множеству M в точке y. По свойству в) Q – опорная гиперплоскость к множеству M в точке x и $Q\cap M=\{x\}$. Ясно, что тогда $P_M0=\{y\}$.

2. Пусть теперь $1\leqslant d<n-1$. Без ограничения общности считаем

$$y=(1,1,\dots,1,\xi_{n-d+1},\dots,\xi_n),\quad |\xi_i|<1,\quad i=n-d+1,\dots,n.$$

Тогда $\mathring{K}(y,0)=\{z\mid z_1<1,\ \dots,\ z_{n-d}<1\}$, и по лемме 4.2

$$\operatorname{bd}\mathring{K}(y,0)=\bigcup_{F\in\mathcal{F}(y)}\operatorname{cone}(\operatorname{ri}F,y).$$

Покажем, что

$$\operatorname{aff} E(y) \cap M = \{y\}. \tag{4.7}$$

Действительно, пусть $\Phi \in \mathcal{F}(y)$, $\dim \Phi = d+1$ (ясно, что такая грань Φ существует). Применим условие в) к паре $P = \operatorname{aff} \Phi$, $Q = \operatorname{aff} E(y)$ в точке y. По определению числа d имеем, что $\operatorname{ri} \Phi \cap M = \varnothing$. Далее, $y \in \operatorname{ri} E(y) \subset \operatorname{rb} \Phi$, откуда по условию в)

$$\operatorname{cone}(\operatorname{ri} \Phi, y) \cap M = \varnothing \quad \text{и} \quad \operatorname{aff} E(y) \cap M = \{y\}, \tag{4.8}$$

доказывая (4.7).

Индукцией по размерности j грани $F \in \mathcal{F}(y) \setminus \{E(y)\}$ докажем, что

$$\operatorname{cone}(\operatorname{ri} F, y) \cap M = \varnothing \quad \text{и} \quad \operatorname{cone}(F, y) \cap M = \{y\} \tag{$**_j$}$$

выполнено для любого $j = d+1, \ldots, n-1$. Утверждение $(**_{d+1})$ установлено в (4.8). Предположим, что $(**_j)$ доказано для всех $j = d+2, \ldots, \nu-1$. Требуется установить $(**_\nu)$. Пусть $F \in \mathcal{F}(y)$, $\dim F = \nu$.

Без ограничения общности считаем

$$F = \big\{(1, \ldots, 1, \eta_{n-\nu+1}, \ldots, \eta_n)\big\}, \quad |\eta_\mu| \leqslant 1, \quad \mu = n-\nu+1, \ldots, n$$

(допуская произвол в выборе $n-\nu$ единиц среди первых d координат точек из F). Пусть теперь $G_1, \ldots, G_N$ – все $(\nu-1)$-мерные грани из $\mathcal{F}(y)$. Ясно, что $G_\mu \subset \operatorname{rb} F$ и $E(y) \subset G_\mu \cap F$, $\mu = 1, \ldots, N$. Из определения F и $G_1, \ldots, G_N$ вытекает, что

$$\operatorname{rb} \operatorname{cone}(\operatorname{ri} F, y) = \bigcup_{\mu=1,\ldots,N} \operatorname{cone}(G_\mu, y) \tag{4.9}$$

и, следовательно, из (11) и $(**_{\nu-1})$,

$$\operatorname{rb} \operatorname{cone}(\operatorname{ri} F, y) \cap M = \{y\}. \tag{4.10}$$

Поскольку $\nu \geqslant d+1$, то $\operatorname{ri} F \cap M = \varnothing$. Теперь, из (12), используя связность пересечения $M \cap \operatorname{aff} F$ (условие б)) и пользуясь тем, что $\operatorname{ri} F \cap M = \varnothing$ имеем:

$$\operatorname{cone}(\operatorname{ri} F, y) \cap M = \varnothing. \tag{4.11}$$

Окончательно, из (4.10) и (4.11) получаем $(**_\nu)$.

Итак, $(**_j)$ выполнено для любого $j = d+1, \ldots, n-1$.

Теперь из (4.3), (4.7) и $(**_{d+1}), \ldots, (**_{n-1})$ следует, что

$$\operatorname{bd} \mathring{K}(y, 0) \cap M = \{y\}. \tag{4.12}$$

Применяя условие б) к $P=\mathbb{R}^n$ и пользуясь тем, что $\mathring{B}\cap M=\varnothing$, из (4.12) окончательно получаем, что

$$\mathring{K}(y,0)\cap M=\varnothing \quad \text{и} \quad \operatorname{bd}\mathring{K}(y,0)\cap M=\{y\}.$$

Это показывает, что $P_M 0=\{y\}$.

3. Нам осталось рассмотреть случай $d=0$. Если $y\in P_M 0$ и $E(y)=\{y\}$, то по определению $d\ F\cap M=\{y\}$ для любого $F\in\mathcal{F}(y)\setminus\{E(y)\}$. Поэтому из (4.3) имеем: $\operatorname{bd}\mathring{K}(y,0)\cap M=\{y\}$. Далее, пользуясь связностью M в $\mathbb{R}^n$ и тем, что $\mathring{B}\cap M=\varnothing$, получаем, что $P_M 0=\{y\}$.

Итак, из пунктов 1–3 следует (4.6), т. е. $P_M 0=\{y\}$, и мы установили, что M – чебышёвское множество, доказывая этим теорему 4.2. $\square$

Прежде, чем перейти к доказательству теоремы 4.3, установим несколько вспомогательных утверждений.

Для начала нам потребуется показать, что в c_0 чебышёвское множество с непрерывной метрической проекцией (в частности, аппроксимативно компактное чебышёвское множество) является солнцем. Мы воспользуемся следующим результатом [153], см. также [50; теорема 4.18].

Лемма 4.B. *Предположим, что линейное нормированное пространство X удовлетворяет условию*

$$\forall p\in S \quad \mathring{K}(p,0)\subset\bigcup\Big\{\mathring{K}(p,y)\,\Big|\,y\in S,\ p\notin\overline{S\cap\mathring{K}(p,y)}\Big\}. \tag{4.13}$$

Пусть также M – чебышёвское множество в X такое, что для каждого $x\notin M$ сужение оператора метрической проекции P_M на луч $\{\lambda x+(1-\lambda)P_M x \mid \lambda\geqslant 0\}$ непрерывно в x. Тогда M – солнце.

Д. Амир и Ф. Дойч [128] установили, что пространство $C[0,1]$ удовлетворяет условию (4.13). Как следствие, в $C[0,1]$ чебышёвское множество с непрерывной метрической проекцией является солнцем. (Аналогичный более общий результат для пространства $C(Q)$ был получен Д. Браессом [144; Theorem 5.1] иным способом.) В предложении 4.3 мы показываем, что это утверждение также имеет место в c_0.

Предложение 4.3. *В пространстве c_0 чебышёвское множество с непрерывной метрической проекцией является солнцем.*

Отметим, что ниже мы покажем, что *если M – аппроксимативно компактное чебышёвское множество в c_0, $H\in\mathrm{cAff}^k$, $k\in\mathbb{N}$, то $M\cap H$ –*

аппроксимативно компактное чебышёвское солнце в c_0 множество и аппроксимативно компактное чебышёвское множество в H (см. теорему 4.7).

Доказательство предложения 4.3. Мы установим (4.13) и применим лемму 4.B.

Пусть $p \in S$. Положим $y = -p$. Из определения опорного конуса ясно, что $\mathring{K}(p, -p) = \mathring{K}(p, 0)$. Для проверки (4.13) следует установить, что

$$p \notin \overline{S \cap \mathring{K}(p, 0)}. \tag{4.14}$$

Предположим противное. Пусть

$$y^{(n)} \in S, \quad y^{(n)} \to p, \quad y^{(n)} \in \mathring{K}(p, 0). \tag{4.15}$$

Не ограничивая общности считаем, что $p = (1, \dots, 1, p_{k+1}, \dots)$, где $|p_j| < 1$, $j \geqslant k + 1$. Тогда из включения $y^{(n)} \in \mathring{K}(p, 0) = \{z \mid z_j < 1$, верного при всех $j = 1, \dots, k\}$, следует, что $y_j^{(n)} < 1$ for $1 \leqslant j \leqslant k$. Из сходимости $y^{(n)} \to p$ имеем $y_j^{(n)} > 0$ при всех $n \geqslant n_1$ и $1 \leqslant j \leqslant k$. Далее, найдется номер $n_0 > n_1$ такой, что $\|y^{(n)} - p\| < 1/8$ при всех $n > n_0$. Также существует номер N_2 такой, что $|p_N| < 1/4$ при всех $N > N_2$. Теперь убедимся, что можной найти такой номер N_1, для которого $|y_N^{(n)}| < 1/2$ при всех $N > N_1$ и $n > n_0$. Предположив противное, имеем противоречие:

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \leqslant |y_N^{(n)}| - |p_N| \leqslant |y_N^{(n)} - p_N| \leqslant \|y^{(n)} - p\| \leqslant \frac{1}{8}.$$

При $n \geqslant n_0$ имеем: $0 < y_j^{(n)} < 1$ for $1 \leqslant j \leqslant k$, $|y_j^{(n)}| < 1/2$, $j > N_1$. Так как $y^{(n)} \in S$, то для каждого $n \geqslant n_0$ найдется номер $\nu \in (k + 1, N_1)$ такой, что $|y_\nu^{(n)}| = 1$. Тогда

$$\|y^{(n)} - p\| \geqslant \min_{k+1 \leqslant \nu < N_1} \big|1 - |p_\nu|\big| > C > 0, \quad n > n_0,$$

что противоречит сходимости $y^{(n)} \to p$ к (4.15). Предложение 4.3 доказано. $\square$

Далее для координатного аффинного подпространства $H \subset c_0$ и $z \in c_0$ через $\mathrm{proj}_H z$ обозначим естественную координатную проекцию z на H. Норма $\|\cdot\|_H$ на H, индуцируемая ℓ^∞-нормой объемлющего пространства c_0, определяется как функционал Минковского выпуклого множества $B(\theta, 1) \cap H$ относительно некоторой фиксированной точки $\theta \in H$.

Объекты аффинного подпространства $H \subset c_0$ мы будем обозначать с использованием индекса H; к примеру, замкнутый шар в H обозначается как $B_H(x,r)$. Ясно, что

$$B_H(x,r) = B(x,r) \cap H, \quad \mathring{B}_H(x,r) = \mathring{B}(x,r) \cap H, \quad S_H(x,r) = S(x,r) \cap H$$

и $\mathring{K}_H(x,y) = \mathring{K}(x,y) \cap H$.

Следующий результат (Алимов [123]) достаточно понятен.

Лемма 4.3. *Пусть M – аппроксимативно компактное чебышёвское множество в c_0 и пусть $H \in \mathrm{cAff}_{\omega-1}(c_0)$. Через H^+, H^- обозначим два непересекающихся полупространства с границей H. Предположим, что $\mathring{B}_H(x,r) \cap M = \varnothing$ при некоторых $x \in H$ и $r > 0$. Определим $\mathring{B}_H^{\pm} = \{u \in H^{\pm} \mid \mathrm{proj}_H u \in \mathring{B}_H(x,r)\}$. Тогда*

$$\mathring{B}_H^+ \cap M = \varnothing \quad \text{или} \quad \mathring{B}_H^- \cap M = \varnothing.$$

Доказательство леммы 4.3. Не ограничивая общности предположим, что $r = 1$, $x = 0$, $0 \in H$, а также, что $H = \{y \mid y_1 = 0\}$. Как обычно, положим $e^1 = (1, 0, 0, \dots)$. Пусть $f \in (c_0)^*$ – функционал такой, что $\operatorname{Ker} f = H$ и $\|f\| = 1$ (при наших предположениях $f(y) = y_1$). Тогда $H^{\pm} = \{u \in c_0 \mid f(u) \gtrless 0\}$.

Предположим противное: $\mathring{B}_H(0,1) \cap M = \varnothing$, но

$$\mathring{B}_H^+ \cap M \neq \varnothing \ \text{ и } \ \mathring{B}_H^- \cap M \neq \varnothing. \tag{4.16}$$

Положим

$$\bar{\alpha} = \inf\{f(u) \mid u \in \mathring{B}_H^+ \cap M\}, \quad \underline{\alpha} = \sup\{f(u) \mid u \in \mathring{B}_H^- \cap M\}. \tag{4.17}$$

Покажем, что

$$\bar{\alpha} - \underline{\alpha} \geqslant 2. \tag{4.18}$$

Предположив, что (4.18) неверно, определим $\beta = (\bar{\alpha} + \underline{\alpha})/2$. Тогда ясно, что $\beta + 1 > \bar{\alpha}$, $\beta - 1 < \underline{\alpha}$. Следовательно, $\sup \mathring{B}(\beta e^1, 1) = \beta + 1 > \bar{\alpha}$, $\inf \mathring{B}(\beta e^1, 1) = \beta - 1 < \underline{\alpha}$, откуда

$$\mathring{B}(\beta e^1, 1) \cap (M \cap \mathring{B}^+) \neq \varnothing \quad \text{и} \quad \mathring{B}(\beta e^1, 1) \cap (M \cap \mathring{B}^-) \neq \varnothing. \tag{4.19}$$

Ясно, что $\mathring{B}_H(0,1)$ разделяет $\mathring{B}(0,1)$. Далее, $\mathring{B}_H(0,1) \subset \mathring{B}(\beta e^1, 1)$ и $\mathring{B}_H(0,1) \cap M = \varnothing$, откуда из (4.19) имеем, что $\mathring{B}(\beta e^1, 1) \cap M$ не связно. Получили противоречие, поскольку по хорошо известной теореме Вулберта (см. [265], [50; теорема 4.1], чебышёвское множество M с непрерывной метрической проекцией всегда $\mathring{B}$-связно (т.е. $M \cap \mathring{B}(y, \rho)$ связно при любом выборе $y \in X$ и $\rho > 0$). Как следствие, предположение $\bar{\alpha} - \underline{\alpha} < 2$ неверно и (4.18) доказано.

Теперь из (4.18) и (4.17) вытекает, что

$$\mathring{B}((\bar{\alpha} - 1)e^1, 1) \cap M = \varnothing.$$

Здесь мы воспользовались (4.16), согласно которому $\bar{\alpha} < \infty$.

Далее, из (4.17) вытекает, что существует последовательность $(y^{(n)}) \subset M$ такая, что

$$\|(\bar{\alpha} - 1)e^1 - y^{(n)}\| \to 1 = \rho(\bar{\alpha} - 1, M).$$

Так как M аппроксимативно компактно, то $(y^{(n)})$ имеет подпоследовательность, сходящуюся к некоторому $\hat{y} \in M$. Ясно, что

$$\hat{y} \in P_M(\bar{\alpha} - 1)e^1, \quad f(\hat{y}) = \hat{y}_1 = \bar{\alpha}.$$

Окончательно, по предложению 4.3 M – солнце, откуда по теореме 1.A мы имеем, что $\mathring{K}(\hat{y}, (\bar{\alpha} - 1)e^1) \cap M = \varnothing$. Здесь

$$\mathring{K}(\hat{y}, (\bar{\alpha} - 1)e^1) = \{z \mid z_1 < \bar{\alpha}, \quad \varepsilon_j z_j < \varepsilon_j \hat{y}_j, \quad j \in I\},$$

где $\varepsilon_j = \operatorname{sign} \hat{y}_j$, $I = \{i \mid |\hat{y}_i| = 1\}$. Как следствие, $\mathring{B}_H^- \subset \mathring{K}(\hat{y}, (\bar{\alpha} - 1)e^1)$, откуда $\mathring{B}_H^- \cap M = \varnothing$, что противоречит (4.16). Лемма 4.3 доказана. $\square$

Доказательство теоремы 4.4. По теореме 4.5 (соответственно, теореме 4.2) для пространства $\ell^\infty(n)$ (пространства c_0) пересечение M с любым координатным подпространством H конечного дефекта, $H \cap M \neq \varnothing$, является (аппроксимативно компактным) чебышёвским множеством в H. Поэтому в случае $\ell^\infty(n)$ мы всегда можем предполагать, что $\operatorname{int} \Pi \neq \varnothing$, $M \cap \operatorname{int} \Pi = \varnothing$, $M \cap \Pi \neq \varnothing$. Теперь из теоремы 4.2, в) следует, что никакая собственная грань F выпуклого тела Π не может содержать более одной точки из M в своей относительной внутренности $\operatorname{ri} F$. Далее, поскольку по теореме 4.2 пересечение $M \cap F$ для любой грани F и пересечение $M \cap \Pi$ связны, то пересечение $\Pi \cap M$ одноточечно.

В случае c_0 результат теоремы 4.4 следует из леммы 4.3 по индукции с учетом того, что любая грань телесного промежутка в c_0 имеет конечный дефект. $\square$

Далее, как и в случае пространства $\ell^\infty(n)$, мы рассмотрим пересечения чебышёвских множеств в c_0 с координатными подпространствами. Имеет место следующий результат (Алимов [123]).

Теорема 4.7. *Пусть M – аппроксимативно компактное чебышёвское множество в c_0 и пусть $H \in \mathrm{cAff}^k(c_0)$, $k \in \mathbb{N}$, – координатное подпространство конечной коразмерности. Тогда если $M \cap H \neq \varnothing$, то $M \cap H$ – аппроксимативно компактное чебышёвское множество в H.*

Теорема 4.7 будет следовать из более общей теоремы 4.8.

Из теоремы 4.7 и предложения 4.3 мы имеем следующее следствие.

Следствие 4.1. *Пусть M – аппроксимативно компактное чебышёвское множество в c_0 и пусть $H \in \mathrm{cAff}^k(c_0)$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда $M \cap H$ – чебышёвское солнце в c_0; в частности, $M \cap H$ – чебышёвское солнце в H.*

Далее, пусть $H \in \mathrm{cAff}_{\omega-1}(c_0)$ – координатная гиперплоскость, $0 \in H$, $h \in (c_0)^*$, $\|h\| = 1$, $h|_H = 0$, $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a \leqslant b$. Посредством

$$h_{a,b} = h_{a,b}(H) = \{x \in c_0 \mid a \leqslant h(x) \leqslant b\} \tag{4.20}$$

обозначим слой координатных аффинных гиперплоскостей, лежащих "между" a и b, Ясно, что $h_{0,0} = H$, $h_{-\infty,\infty} = c_0$.

Теорема 4.8 (Алимов [123]). *Пусть M – аппроксимативно компактное чебышёвское множество в c_0 и пусть $h_{a,b}$ – слой координатных гиперплоскостей* (4.20). *Тогда если $M \cap h_{a,b} \neq \varnothing$, то*

$$h_{a,b} \subset \mathrm{T}(M \cap h_{a,b}) \cap \mathrm{AC}(M \cap h_{a,b}). \tag{4.21}$$

Иными словами, любая точка из слоя $h_{a,b}$ имеет единственную ближайшую из множества $(M \cap h_{a,b})$.

(Напомним, что множества $\mathrm{T}(\cdot)$ и $\mathrm{AC}(\cdot)$ определены на стр. 7.)

Замечание 4.3. Понятно, что в общем случае $P_M x \neq P_{(M\cap h_{a,b})} x$ при $x \in h_{a,b}$.

Доказательство теоремы 4.8. Пусть $x \in h_{a,b} \backslash M$. Не ограничивая общности предположим, что $x = 0$, $\rho(0, M \cap h_{a,b}) = 1$, $H = \{y \mid y_1 = 0\}$ и что $h(e^1) = 1$. Ясно, что

$$\mathring{B}_H(0,1) \cap M = \varnothing \quad \text{и} \quad \mathring{B}(0,1) \cap (M \cap h_{a,b}) = \varnothing. \tag{4.22}$$

Сначала покажем, что $0 \in \mathrm{AC}(M \cap h_{a,b})$. Пусть $(y^{(n)}) \in M \cap h_{a,b}$ – минимизирующая последовательность для точки 0, т.е. $\|y^{(n)}\| \to 1$.

Предположим противное: $0 \notin \mathrm{AC}(M \cap h_{a,b})$, т.е. $(y^{(n)})$ не содержит подпоследовательности, сходящейся к точке из $M \cap h_{a,b}$. Тогда (ср. с (4.22))

$$\mathring{B}(0,1) \cap M \neq \varnothing, \tag{4.23}$$

поскольку в противном случае последовательность $(y^{(n)})$ являлась бы минимизирующей из M для 0. Так как 0 – точка аппроксимативной компактности для исходного множества M, то эта последовательность должна иметь сходящуюся подпоследовательность. Ясно, что ее предельная точка лежит в $M \cap h_{a,b}$, что противоречит нашему предположению, что $0 \notin \mathrm{AC}(M \cap h_{a,b})$.

Не ограничивая общности предположим, что пересечение $\mathring{B}(0,1) \cap M$ из (4.23) содержится в $\mathring{B}_H^- := \{y \mid h(y) < 0\}$.

Применим лемму 4.3. Из (4.22) и (4.23) следует, что

$$\mathring{B}_H^+ \cap M = \varnothing. \tag{4.24}$$

Положим $\alpha = \sup h(M \cap \mathring{B}_H^-)$. Тогда $-1 < \alpha \leqslant a \leqslant 0$. Зафиксируем точку $\hat{x} = (1+\alpha)e^1$ и рассмотрим шар $\mathring{B} + \hat{x} = \mathring{B}(\hat{x}, 1)$. Ясно, что $\mathring{B}(\hat{x},1) \subset \mathring{B}_H^+$, откуда $\mathring{B}(\hat{x},1) \cap M = \varnothing$ с учетом (4.24). Покажем, что

$$\|\hat{x} - y^{(n)}\| \to 1, \tag{4.25}$$

т.е., что $y^{(n)}$ – минимизирующая последовательность из $M \cap h_{a,b}$ для $\hat{x}$.

Так как $\|y^{(n)}\| \to 1$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $N > 0$ такой, что $1 \leqslant \|y^{(n)}\| < 1 + \varepsilon$ для любого $n > N$. Далее, из того, что $y^{(n)} \in h_{a,b}$, вытекает, что

$$|y_j^{(n)}| < 1 + \varepsilon \ \text{ при всех } \ j \geqslant 2 \ \text{ и } \ a \leqslant y_1^{(n)} < 1 + \varepsilon. \tag{4.26}$$

Следовательно,

$$\|\hat{x} - y^{(n)}\| = \|y^{(n)} - (1+\alpha)e_1\| = \max\bigl\{|y_1^{(n)} - (1+\alpha)|, \sup_{j \geqslant 2} |y_j^{(n)}|\bigr\} < 1 + \varepsilon,$$

где последнее неравенство вытекает из (4.26) в силу $-1 < \alpha \leqslant a \leqslant 0$. Это как раз то, что требовалось в (4.25). Итак, $y^{(n)}$ – минимизирующая последовательность из M для $\hat{x}$. Так как M аппроксимативно компактно, то $y^{(n)}$ имеет сходящуюся подпоследовательность. Ясно, что ее предельная точка лежит в $M \cap h_{a,b}$. Это противоречит предположению, что $y^{(n)}$ не содержит подпоследовательностей, сходящихся к точкам из $M \cap h_{a,b}$. Итак, мы установили первую часть (4.21): $h_{a,b} \subset \mathrm{AC}(M \cap h_{a,b})$.

Утверждение $h_{a,b} \in \mathrm{T}(M \cap h_{a,b})$ доказывается аналогично. Предположив, что $y', y'' \in P_{(M\cap h_{a,b})}0$, $y' \neq y''$, мы аналогично устанавливаем, что $y', y'' \in P_{(M\cap h_{a,b})}\hat{x}$ при определенном выше $\hat{x}$. Имеем $\mathring{B}(\hat{x}, 1) \cap M = \varnothing$, получая противоречие, так как с одной стороны M – чебышёвское множество, а с другой точки y', y'' являются ближайшими для x. Теорема 4.8 доказана. $\square$

Естественно также рассмотреть конечные пересечения координатных слоев вида (4.20)

$$G = \bigcap_{k=1}^{n} h_{a_k,b_k}(H_k), \tag{4.27}$$

где $H_k \in \mathrm{cAff}_{\omega-1}(c_0)$, $a_k, b_k \in \overline{\mathbb{R}}$, $k = 1, \dots, n$. Такие пересечения называются брусами. Аналогичные рассуждения, как при доказательстве теоремы 4.8, позволяют получить следующее обобщение теоремы 4.8 на случай брусов в c_0 (см. Алимов [123]).

Теорема 4.9. *Пусть M – аппроксимативно компактное чебышёвское множество в c_0 и пусть G – координатный брус* (4.27). *Тогда если $M \cap G \neq \varnothing$, то*

$$G \subset \mathrm{T}(M \cap G) \cap \mathrm{AC}(M \cap G). \tag{4.28}$$

В частности, любая точка из G имеет единственную ближайшую точку из $(M \cap G)$.

Теперь мы можем перейти к доказательству теоремы 4.3.

Доказательство теоремы 4.3. *Необходимость.* Пусть $M \subset c_0$ – аппроксимативно компактное чебышёвское множество и пусть $H \in \mathrm{cAff}^k(c_0)$ таково, что $\varnothing \neq M \cap H$. Теорема 4.8 утверждает, что $M \cap H$ – аппроксимативно компактное чебышёвское множество в H; как следствие, метрическая проекция $P_M : H \to M \cap H$ непрерывна [50; следствие 2.2]. Теперь связность пересечения $M \cap H$ следует из классического результата Вулберта [265], согласно которому чебышёвское множество с непрерывной метрической проекцией $\mathring{B}$-связно и, как следствие, связно (а в случае замкнутого множества – линейно связно; см. [50; теорема 4.1], [66]).

Пусть $k \in \mathbb{Z}_+$, $H \in \mathrm{cAff}^k(c_0)$ и пусть $Q \in \mathrm{cAff}_{\omega-(k+1)}(H)$, $Q \in \mathrm{locTan}_H(M)$. Не ограничивая общности считаем, что $0 \in Q$. Пусть

$x \in Q \cap M$ и пусть $\mathcal{O}(x)$ – выпуклая окрестность точки x в H такая, что $Q \subset H$ является опорной гиперплоскостью к множеству $M \cap \mathcal{O}(x)$ в x. Тогда $\mathring{B}(x, r) \subset \mathcal{O}(x)$ при некотором $r > 0$. Рассмотрим непрерывный линейный функционал φ на H, $\operatorname{Ker} \varphi = Q$. Обозначим

$$Q^- = \{z \in H \mid \varphi(z) < 0\}.$$

Меняя при необходимости φ на $-\varphi$, мы имеем, что $Q^- \cap (M \cap \mathcal{O}(x)) = \varnothing$.

Зафиксируем точку $\xi \in Q^-$ такую, что $\operatorname{proj}_Q \xi = x$ и $\|x - \xi\| < r/2$. Тогда $\mathring{B}_H(\xi, \|\xi - x\|) \subset (Q^- \cap \mathcal{O}(x))$. По теореме 4.8 $M \cap H$ – чебышёвское множество в H, а по следствию 4.1 $M \cap H$ – солнце. По теореме 1.A $\mathring{K}_H(x, \xi) \cap M = \varnothing$. Так как $\operatorname{proj}_H \xi = x$, то x – точка гладкости шара $B_H(\xi, \|\xi - x\|)$, откуда $\mathring{K}_H(x, \xi)$ – открытое полупространство, совпадающее с Q^-. Как следствие, $\mathring{K}_H(x, \xi) \cap M = \varnothing$ и мы доказали, что Q – опорная гиперплоскость к множеству $M \cap H$ в x.

Для доказательства свойства единственности при пересечении с $M \cap Q$, напомним, что

$$\mathring{K}_H(x, \xi) = \bigcup_{\alpha > 0} \mathring{B}_H(\alpha\xi + (1 - \alpha)x, \alpha\|x - \xi\|), \tag{4.29}$$

откуда следует, что x – единственная ближайшая точка из $M \cap H$ к любой точке вида $\alpha\xi + (1 - \alpha)x$, $\alpha > 0$. Далее, поскольку $\operatorname{bd} \mathring{K}_H(x, \xi) = Q$ и так как $M \cap H$ является чебышёвским множеством, мы окончательно получаем, что $M \cap Q = \{x\}$. Итак, мы проверили утверждение b).

Достаточность. Пусть M – аппроксимативно компактное множество в c_0, для которого выполнены условия a) и b). Покажем, что M – чебышёвское множество в c_0.

Пусть $x \notin M$. Покажем, что для x ближайшая точка из M существет и единственна. Не ограничивая общности считаем, что $x = 0$, $\rho(0, M) = 1$.

Так как M аппроксимативно компактно, то $P_M z \neq \varnothing$ для любого $z \in c_0$ (см. [50; следствие 2.2]). Пусть $y \in P_M 0$. Ниже мы воспользуемся тем, что единичный шар в c_0 обладает только гранями конечного дефекта.

Для заданного $z \in S(0, 1)$ через $E(z)$ обозначим (единственную) грань шара B такую, что $z \in \operatorname{ri} E(z)$. Ясно, что $E(z) = \{\varepsilon = (\varepsilon^k) \mid \varepsilon^k = 1$ при $z^k = 1$, $\varepsilon^k = -1$ при $z^k = -1$ и $\varepsilon^k \in [-1, 1]$ при $|z^k| < 1\}$. Также обозначим

$$\mathcal{F}(z) = \{F \mid F \text{ – собственная грань шара } B \text{ такая, что } z \in F,\ z \notin \operatorname{ri} F\}.$$

Рассмотрим выпуклое тело $K(y,0) = \operatorname{cl} \mathring{K}(y,0)$. Из (4.29) вытекает, что гранями $K(y,0)$ в точности являются конические оболочки $\operatorname{cone}(y,F)$, где $F \in \mathcal{F}(y)$ или $F = E(y)$. Согласно теореме 18.2 из [89] для выпуклого тела C имеет место представление

$$\operatorname{rb} C = \bigcup \bigl\{ \operatorname{ri} F \mid F \text{ – собственная грань } C \bigr\}. \tag{4.30}$$

Следовательно,

$$\operatorname{bd} \mathring{K}(y,0) = \operatorname{cone}(y, E(y)) \cup \bigcup_{F \in \mathcal{F}(y)} \operatorname{cone}(y, \operatorname{ri} F). \tag{4.31}$$

Пусть точка $z \in P_M 0$ такова, что на ней величина

$$d = \min\{\operatorname{codim} E(z) \mid z \in P_M 0\} \tag{4.32}$$

достигает своего минимума. Из этого определения вытекает, что если F – грань шара B, $\operatorname{codim} F < d$, то $\operatorname{ri} F \cap M = \varnothing$.

Установим, что

$$P_M 0 = \{y\}. \tag{4.33}$$

1. Пусть $d = 1$. Положим $H = c_0$, $Q = \operatorname{aff} E(y)$. Так как $\mathring{B} \cap M = \varnothing$ и $y \in \operatorname{ri} E(y)$, то Q является локально опорной гиперплоскостью к множеству M в точке y. По условию b) гиперплоскость Q является (глобально) опорной к M в x, причем $Q \cap M = \{x\}$. Как следствие, $P_M 0 = \{y\}$. Это доказывает (4.33) в случае $d = 1$.

2. Пусть $d > 1$. Не ограничивая общности предполагаем, что

$$y = (1, 1, \dots, 1, \xi_{d+1}, \dots), \quad |\xi_i| < 1, \quad i \geqslant d+1.$$

Тогда $\mathring{K}(y,0) = \{z \mid z_1 < 1, \ \dots, \ z_d < 1\}$.

Покажем, что

$$\operatorname{aff} E(y) \cap M = \{y\}. \tag{4.34}$$

Для доказательства (4.34) выберем $\Phi \in \mathcal{F}(y)$, $\operatorname{codim} \Phi = d - 1$ (ясно, что такая грань Φ существует) и применим условие b) к паре $H = \operatorname{aff} \Phi \in \operatorname{cAff}_{\omega-d+1}(c_0)$, $Q = \operatorname{aff} E(y) \in \operatorname{cAff}_{\omega-d}(c_0)$ в точке y.

Так как согласно (4.32) $\operatorname{ri} \Phi \cap M = \varnothing$ и $y \in \operatorname{ri} E(y) \subset \operatorname{rb} \Phi$, мы имеем

$$\operatorname{cone}(\operatorname{ri} \Phi, y) \cap M = \varnothing \quad \text{и} \quad \operatorname{aff} E(y) \cap M = \{y\}, \tag{4.35}$$

что доказывает (4.34).

Далее, индукцией по коразмерности $j = 1, \ldots, d-1$ грани $F \in \mathcal{F}(y) \setminus \{E(y)\}$ проверим, что

$$\operatorname{cone}(\operatorname{ri} F, y) \cap M = \varnothing, \quad \text{и} \quad \operatorname{cone}(F, y) \cap M = \{y\} \tag{i_j}$$

для любого $j = d-1, \ldots, 1$.

Утверждение (i_{d-1}) установлено в (4.35). Предположим, что (i_j) верно для всех $j = d-2, \ldots, \nu+1$. Нам требуется проверить (i_ν). Пусть $F \in \mathcal{F}(y)$, $\operatorname{codim} F = \nu$.

Не ограничивая общности считаем, что

$$F = \{(1, \ldots, 1, \eta_{\nu+1}, \ldots)\}, \quad |\eta_\mu| \leqslant 1, \quad \mu \geqslant \nu+1.$$

Тогда

$$\operatorname{cone}(\operatorname{ri} F, y) = \{(1, \ldots, 1, \alpha\eta_{\nu+1}+1-\alpha, \ldots, \alpha\eta_{d+1}+(1-\alpha)\xi_{d+1}, \ldots)\}, \ \alpha \geqslant 0.$$

Теперь пусть $G_1, \ldots, G_N$ – все грани из $\mathcal{F}(y)$ коразмерности $(\nu+1)$. Ясно, что $G_\mu \subset \operatorname{rb} F$ и $E(y) \subset G_\mu \cap F$, $\mu = 1, \ldots, N$. Из (4.31), (4.30) и из структуры G_μ имеем

$$\operatorname{rb} \operatorname{cone}(\operatorname{ri} F, y) = \bigcup_{\mu=1,\ldots,N} . \operatorname{cone}(G_\mu, y) \tag{4.36}$$

Далее, согласно (4.36) и ($\mathrm{i}_{\nu+1}$),

$$\operatorname{rb} \operatorname{cone}(\operatorname{ri} F, y) \cap M = \{y\}. \tag{4.37}$$

Так как $\nu < d-1$, то из (4.32) вытекает, что $\operatorname{ri} F \cap M = \varnothing$. Теперь из связности пересечения $M \cap \operatorname{aff} F$ (условие a)) и из того, что $\operatorname{ri} F \cap M = \varnothing$, мы имеем в силу (4.37):

$$\operatorname{cone}(\operatorname{ri} F, y) \cap M = \varnothing. \tag{4.38}$$

Окончательно, из (4.37) и (4.38) следует (i_ν).

Итак, i_j) выполнено при всех $j = 1, \ldots, d-1$.

Применяя (4.31), (4.34) и (i_1), $\ldots$, (i_{d-1}), мы получаем, что

$$\operatorname{bd} \mathring{K}(y, 0) \cap M = \{y\}. \tag{4.39}$$

Далее применяя условие a) к $H = c_0$ и используя то, что $\mathring{B} \cap M = \varnothing$, мы окончательно получаем с учетом (4.39), что

$$\mathring{K}(y, 0) \cap M = \varnothing \ \text{ и } \ \operatorname{bd} \mathring{K}(y, 0) \cap M = \{y\}.$$

Это показывает, что $P_M 0 = \{y\}$. Теорема 4.3 доказана. $\square$

Пример 4.1. В качестве примеров ограниченно компактных чебышёвское множеств в c_0 можно взять отрезок $M = [0, a]$ или невыпуклое объединение двух отрезков $[0, a] \cup [0, b]$, где $a = (1, 1/2, 1/3, \dots)$, $b = (-1/2, -1/3, -1/4, \dots)$.

Ниже мы сформулируем ещё одну характеризацию аппроксимативно компактных чебышёвских множеств в пространстве $C(Q)$ (теорема 4.A).

Напомним, что пара различных точек $x, y \in M$ называется *координатно промежуточной* (Данхем [179], Браесс [144]), если для любого замкнутого подмножества Z множества нулей разности $x - y$ и для любой непрерывной функции $s \in C(Z, \{+1, -1\})$ найдется точка $z \in M$ такая, что $\operatorname{sign}(z(t) - y(t)) = s(t)$ для всех $t \in Z$. Если все различные элементы регулярного подмножества M пространства $C(Q)$ являются координатно промежуточными, то множество M называется *тотально регулярным* (определение регулярного множества (по Брозовскому–Вегману) дано выше на стр. 116).

Теорема 4.A (Данхем–Браесс). *Аппроксимативно компактное подмножество пространства $C(Q)$ является чебышёвским множеством в том и только в том случае, если оно тотально регулярно.*

В теореме 4.A утверждение для ограниченно компактных множеств было получено Данхемом [179; Theorem 6], а для аппроксимативно компактных – Браессом [144].

4.3. Случай произвольных банаховых пространств. Ниже исследуются солнечность пересечений солнц, строгих солнц и α-солнц с брусами и замкнутыми промежутками Π в линейных нормированных пространствах. По своей структуре брусы являются пересечениями гиперполос, порожденных экстремальными (крайними) точками сопряженной сферы (точное определение дается ниже). В задаче о солнечности пересечений солнц с такими подмножествами указанная экстремальная структура множеств Π важна и естественна. К примеру, если подпространство $H \subset \ell^\infty(n)$ не экстремально (т.е. порождено не экстремальным функционалом), то всегда можно построить [7] солнце M в $\ell^\infty(n)$, для которого пересечение $M \cap H$ не стягиваемо (и, следовательно, не является солнцем). Аналогичный результат верен и в общих пространствах (теорема 4.14).

Ниже показывается, что в широком классе линейных нормированных пространств солнечность (глобальная) влечет локальную солнечность в естественной постановке при пересечении с множествами из самого естественного в этой ситуации классами – брусами и замкнутыми промежутками (в частности с замкнутыми шарами и экстремальными гиперполосами). Напомним, что замкнутый промежуток определяется на стр. 125.

Аналогичный вопрос для пространств $C(Q)$ будет исследован более подробно в § 4.4.

Напомним определение бруса. Для данных $M \subset X$ и $f \in X^*$ обозначим $f(M) = \{f(x) \mid x \in M\}$; пусть $p_f(M)$ – замыкание выпуклой оболочки множества $f(M)$. Таким образом, $p_f(M) \subset \mathbb{R}$ – это замкнутый выпуклый числовой промежуток между $\inf f(M)$ и $\sup f(M)$. Пусть $D \subset X^*$ – произвольное подмножество сопряженного пространства. По определению *D-брус* – это замкнутое выпуклое множество $M \subset X$ вида

$$M = \bigcap_{f \in D} f^{-1}(p_f(M)).$$

Любой D-брус есть пересечение замкнутых полупространств, поэтому D-брус является выпуклым (в обычном смысле) и замкнутым множеством. Если D – шар или сфера пространства X^*, то верно и обратное: всякое выпуклое замкнутое множество является D-брусом (это следует из теоремы отделимости). Пересечение любого числа и сумма конечного числа D-брусов снова является D-брусом.

Далее, множество $M \subset X$ называется *брусом* [126], если M является *D-брусом* для $D \subset \operatorname{ext} S^*$. Легко видеть, что замкнутый шар является брусом. Если норма сопряженного пространства строго выпукла (или если точки строгой дифференцируемости плотны на сфере сопряженного пространства [243], [195]), то брусы суть выпуклые замкнутые множества.

Отметим, что *все брусы в $C(Q)$ суть замкнутые промежутки* [126]. Ниже мы покажем, что аналогичный результат верен в любом конечномерном пространстве X_n (предложение 4.4). Включение $[[x, y]] \subset \Pi$ при любых $x, y \in \Pi$ (Π – брус) очевидно в любом X (т.е. брус заведомо является замкнутым промежутком).

Брусы естественно возникают в задачах отделимости экстремальными функционалами, а также в теории приближений при аппроксимации гладкими функциями с ограничениями на производную. Интересно отметить, что брусы обладают следующим характеристическим свойством: они строго экстремально отделяются (т.е. строго отделяются экстремальным функционалом из S^*) от любой точки, им не принадлежащей [126]; при этом для двумерных пространств, а также для пространств типа $C(Q)$ имеет место аналог теоремы отделимости: два непересекающихся бруса строго отделяются экстремальным функционалом; в общем случае (например, в $L^1(\Omega)$, $|\Omega| \geqslant 3$) это утверждение неверно.

Ниже мы рассматриваем вопрос о солнечности пересечения солнц с брусами. Вопрос об аппроксимативных свойствах пересечения солнц и чебышёвских множеств с шарами рассматривался многими авторами, начиная с Вулберта, Брозовского, Власова, и Кощеева.

Попутно отметим, что если солнце M обладает свойством B-солнечности (т.е. его (непустое) пересечение с любым замкнутым шаром является солнцем), то при пересечении M с брусами солнечность не обязательно сохраняется: в некоторых X_n можно построить пример чебышёвского солнца (его пересечение с любым шаром всегда связно), такого, что при пересечении с некоторой прямой (брусом) получается несвязное множество (см. замечание 3.4).

Браун [156] установил следующий результат, обобщив соответствующий результат Беренса и Хетцельта, полученный ими в частном случае пространства $\ell^\infty(n)$.

Теорема 4.B. *Солнце в конечномерном* (BM)*-пространстве* m*-связно.*

(Напомним, что определение (BM)-пространств было дано выше в § 3.1.7.)

Отметим, что для случая общих конечномерных пространств теорема 4.B неверна (см. замечание 3.4). Отсюда с учетом теоремы 3.2 вытекает, что произвольное солнце в $X_n \in (BM)$ P- и B-стягиваемо и, в частности, P- и B-ациклично и P- и B-клеточноподобно.

Наилучший результат о локальных свойствах солнц в конечномерных (BM)-пространствах дается в теореме 4.10. Это утверждение восходит к результатам Брауна [156] (см. теорему 4.B) и Беренса и Хетцельта [137] (теорема 3.A). Теорема 4.10 следует из теоремы 4.B, теоремы 3.2, замечания 3.1 и теоремы 4.14.

Теорема 4.10. *Пусть* $X_n \in (BM)$ *и пусть* $M \subset X_n$ *– солнце. Тогда*:

а) M *– (экстремально) монотонно линейно связно*;

б) M *– экстремально стягиваемо (в частности* M *–* B*-стягиваемо)*;

в) M *– экстремальный ретракт (в частности* M *–* B*-ретракт)*;

г) M *– экстремально солнечно (последнее означает, что пересечение* M *с любым брусом и, в частности, с замкнутым шаром является солнцем)*;

д) *на* M *существует непрерывная мультипликативная (аддитивная)* ε*-выборка при любом* $\varepsilon > 0$.

е) *для любого бруса* $\Pi \subset X$ *на множество* $M \cap \Pi$ *существует непрерывная мультипликативная (аддитивная)* ε*-выборка при любом* $\varepsilon > 0$.

В связи с утверждением д) теоремы 4.10 отметим, что на солнце M (и даже строгое солнце) непрерывной выборки из метрической проекции P_M может не существовать даже в трехмерном случае в пространстве $\ell^\infty(3) \in (BM)$ (соответствующий пример построен Беренсом и Хетцельтом [138]).

Вопрос об аппроксимативных и геометрических свойствах пересечений солнц и строгих солнц с промежутками (брусами) в пространстве $C(Q)$ рассматривался автором в [17], [13] и [12]. По поводу аппроксимативных свойств пересечений солнц, строгих солнц и чебышёвских множеств с интервалами на нормированной плоскости см. § 4.5 и [14].

В теоремах 4.11–4.13 даются условия, обеспечивающие солнечность пересечений солнц с брусами. Естественность бруса в данной задаче показана в теореме 4.14.

Теорема 4.11. *Пусть* $\varnothing \neq M \subset X_n$ *– замкнутое* m*-связное множество (в частности,* M *– солнце в произвольном двумерном* X_2 *или в* $X_n \in (BM)$*) и пусть* Π *– брус в* X_n, $M \cap \Pi \neq \varnothing$. *Тогда* $M \cap \Pi$ *– монотонно линейно связное солнце в* X_n.

Теорема 4.12. *Пусть* $X \in (MeI) \cap (Ex\text{-}w^*s)$ *(в частности,* X *– сепарабельное банахово пространство),* $M \neq \varnothing$ *– ограниченно компактное* m*-связное множество (в частности,* M *– ограниченно компактное солнце в* $X \in (BM)$*) и пусть* Π *– брус в* X, $M \cap \Pi \neq \varnothing$. *Тогда* $M \cap \Pi$ *– монотонно линейно связное солнце в* X.

Теорема 4.13. *Пусть $M \neq \varnothing$ – монотонно линейно связное множество в линейном нормированном пространстве X и пусть Π – брус в X, $M \cap \Pi \neq \varnothing$. Тогда $M \cap \Pi$ монотонно линейно связно.*

В замечании 3.4 показана существенность требования монотонной линейной связности (m-связности) солнц в теоремах 4.11, 4.12, 4.13.

Теорема 4.14. *Пусть $\Pi \neq \varnothing$ – замкнутое множество в X_n. Следующие утверждения эквивалентны:*

а) Π – *брус (замкнутый промежуток);*
б) $\Pi \cap M$ *является монотонно линейно связным солнцем для любого монотонно линейно связного солнца M, $M \cap \Pi \neq \varnothing$;*
в) $\Pi \cap M$ *является солнцем для любого монотонно линейно связного солнца M, $M \cap \Pi \neq \varnothing$;*
г) $\Pi \cap \gamma$ *является монотонно линейно связным солнцем для любой монотонной дуги γ, $\gamma \cap \Pi \neq \varnothing$.*

В теореме 4.14 требование монотонной линейной связности существенно (см. замечание 3.4). Аналогичный результат для пространства $\ell^\infty(n)$ получен автором в [13] (теорема 4.19); для нормированной плоскости – в теореме 4.25. Солнечность пересечений строгих солнц с замкнутыми телесными промежутками (брусами) в $C(Q)$ рассмотрена в [17].

Для доказательства теоремы 4.14 нам потребуется следующий вспомогательный результат [126].

Предложение 4.4. *В X_n в классе множеств брусы суть в точности замкнутые промежутки.*

Выше было отмечено, что любой брус является замкнутым промежутком. Установим обратное утверждение. Так как $X_n \in$ (*Ex-w^*s*), то следуя Брауну [156] на пространстве X_n можно ввести ассоциированную норму $|\cdot|$ согласно (3.8).

Множество M в метрическом пространстве (X, d) называется сильно *d-выпуклым* (по Болтянскому) (Менгер [236], см. также [176; p. 15]), если из того, что $x, y \in M$ следует, что $\langle x, y\rangle_d \subset M$, где

$$\langle x, y\rangle_d := \{z \in M \mid d(x,y) = d(x,z) + d(z,y)\}$$

(т.е. вместе со своими любыми двумя точками множество содержит и метрический отрезок, их соединяющий).

Браун [156] показал, что в конечномерном пространстве

$$z \in \mathrm{m}(x,y) \text{ если и только если } z \in \langle x,y\rangle_{|\cdot|}. \tag{4.40}$$

(по поводу бесконечномерного случая см. лемму 3.1).

Согласно (3.5) любая экстремальная гиперплоскость вместе с произвольными точками x, y содержит и их оболочку Банаха–Мазура $\mathrm{m}(x,y)$, а значит, и интервал $[[x,y]]$. Далее, из (4.40) следует, что экстремальная гиперплоскость всегда сильно $d_{|\cdot|}$-выпукла (т.е. сильно d-выпукла относительно ассоциированной нормы $|\cdot|$).

Сначала рассмотрим случай, когда замкнутый промежуток имеет непустую внутренность. Для доказательства предложения 4.4 в этом случае осталось воспользоваться следующим результатом Л. Ф. Германа и П. С. Солтана [37; теорема 6.10]: всякое отличное от $\mathbb{R}^n$ замкнутое сильно d-выпуклое *тело* в точности представляется в виде пересечения некоторого семейства замкнутых сильно d-выпуклых полупространств.

Общий случай несложно сводится к предыдущему. Пусть $M \subset X_n$ – замкнутый промежуток. Легко проверяется, что его замкнутая ε-окрестность $\mathcal{O}_\varepsilon(M)$ также является замкнутым промежутком. По доказанному выше $\mathcal{O}_\varepsilon(M)$ – брус. Окончательно, пересечение брусов является брусом. $\square$

Отметим без доказательства, что аналогичный результат верен и в произвольном линейном нормированном пространстве: любой брус (множество вида $\cap_{f\in \operatorname{ext} S^*} f^{-1}(I_f)$, где $I_f = [a_f, b_f] \subset \overline{\mathbb{R}}$) является замкнутым промежутком (такое множество по определению вместе с любыми своими точками x, y содержит и интервал $[[x,y]]$).

Доказательство теоремы 4.12. Поскольку любое конечномерное пространство лежит в (*MeI*) $\cap$ (*Ex-w*s*), то теорема 4.11 следует из теоремы 4.12.

Пусть $x, y \in M \cap \Pi$. Поскольку любой брус является промежутком (т.е. из того, что $x, y \in M$ следует, что $[[x,y]] \subset M$), а в пространстве $X \in$ (*MeI*) всегда выполнено $[[x,y]] = \mathrm{m}(x,y)$, то $M \cap \Pi$ – m-связно. Понятно также, что $M \cap \Pi$ ограниченно компактно. Окончательно, монотонная линейная связность и солнечность m-связного пересечения $M \cap \Pi$ гарантируются теоремой 3.2. $\square$

Доказательство теоремы 4.13. Как и выше, воспользуемся тем, что в наших условиях ($X \in$ (*MeI*) $\cap$ (*Ex-w*s*)) ограниченно компактное m-связное множество монотонно линейно связно (теорема 3.2). Далее, свойство монотонной линейной связности сохраняется при пересечении монотонно линейно связного множества с брусом (последний всегда является промежутком). $\square$

Доказательство теоремы 4.14. Импликация а)$\Rightarrow$б) доказана в теореме 4.11.

Установим г)$\Rightarrow$а). Предположим, что множество $\Pi \subset X$ не является замкнутым промежутком. По предложению 4.4 брусы в X_n суть замкнутые промежутки. Далее, по определению замкнутого промежутка имеем $[[x, y]] \not\subset \Pi$ при некоторых $x, y \in \Pi$. Соответственно, найдется непрерывная монотонная кривая $k(\cdot)$ (дуга), соединяющая x и y и такая, что $k(\cdot) \not\subset \Pi$. Ясно, что $k(\cdot) \subset [[x, y]]$ и что кривая $k(\cdot)$ компактна. Согласно предложению 1.3 из [152], если $k(t_1), k(t_2) \in P_{k(\cdot)}x$ при произвольном фиксированном $x \notin k(\cdot)$, то $k(\tau) \in P_{k(\cdot)}x$ при всех $\tau \in [t_1, t_2]$. Как следствие, $P_{k(\cdot)}x$ – простая замкнутая монотонная кривая. Вспоминая, что такая кривая всегда ациклична, имеем, что $k(\cdot)$ – P-ацикличное множество (причем его пересечение с любым замкнутым шаром тоже ациклично). Далее, по известной теореме Власова [50; теорема 4.4] в банаховом пространстве ограниченно компактное P-ацикличное множество всегда является солнцем. По известной теореме Кощеева–Брауна (см. [75], [157]) солнце в X_n всегда линейно связно. Итак, если множество Π не является брусом, то всегда можно найти такое компактное солнце, пересечение которого с Π не является солнцем. Импликации а)$\Rightarrow$б), б)$\Rightarrow$в), в)$\Rightarrow$г) очевидны. $\square$

4.4. Локальные аппроксимативные свойства множеств в пространстве $C(Q)$. Рассматривается вопрос о сохранении аппроксимативных свойств чебышёвских множеств, солнц, строгих солнц и строгих протосолнц при пересечении с подмножествами $C(Q)$ (Q – метрический компакт).

В теореме 4.15 установлено, что пересечение произвольного строгого протосолнца M в $C(Q)$ с замкнутым телесным промежутком $\Pi \subset C(Q)$ является строгим протосолнцем при естественном предположении, что $M \cap \operatorname{int} \Pi \neq \varnothing$. При этом, если строгое солнце $M \subset C(Q)$ ограниченно компактно, а Π – произвольный замкнутый промежуток в $C(Q)$, $M \cap \Pi \neq \varnothing$, то $M \cap \Pi$ – солнце (не обязательно являющееся строгим солнцем). Теорема 4.16 утверждает, что замкнутые телесные промежутки Π в $C(Q)$ характеризуются свойством, что пересечение Π с произвольным строгим протосолнцем M в $C(Q)$, $M \cap \operatorname{int} \Pi \neq \varnothing$, является строгим протосолнцем. В теореме 4.17 (Алимов [17]) дается характеризация строгих солнц в $C(Q)$ в терминах аппроксимативных свойств их пересечений с замкнутыми промежутками. (Вопрос о солнечности пересечений солнц с замкнутыми промежутками (брусами) в общих банаховых пространствах рассматривается в теоремах 4.11–4.13.)

Напомним, что в $C(Q)$ брусы суть замкнутые телесные промежутки [126].

Теорема 4.15. *Имеют место следующие утверждения*:

а) *Пусть M – строгое протосолнце в $C(Q)$, Π – замкнутый телесный промежуток в $C(Q)$, причем $M \cap \operatorname{int} \Pi \neq \varnothing$. Тогда $M \cap \Pi$ – строгое протосолнце в $C(Q)$.*

б) *Пусть M – строгое протосолнце в $C(Q)$, Π – замкнутый телесный промежуток в $C(Q)$, причем $M \cap \operatorname{int} \Pi \neq \varnothing$ и $M \cap \Pi$ является множеством существования. Тогда $M \cap \Pi$ – строгое солнце в $C(Q)$.*

в) *Пусть M – ограниченно компактное строгое солнце в $C(Q)$, Π – замкнутый промежуток в $C(Q)$, $M \cap \Pi \neq \varnothing$. Тогда $M \cap \Pi$ – солнце в $C(Q)$.*

В частности, пересечение строго солнца M в $C(Q)$ с произвольным замкнутым шаром $B(x,r)$ является строгим протосолнцем в $C(Q)$ при условии, что $M \cap \mathring{B}(x,r) \neq \varnothing$ (при этом $M \cap B(x,r)$ – строгое солнце, если $M \cap B(x,r)$ – множество существования).

Замечание 4.4. Отметим, что условие $M \cap \operatorname{int} \Pi \neq \varnothing$ в теореме 4.15 нельзя заменить на условие $M \cap \Pi \neq \varnothing$. Автор [5] построил пример строгого солнца M в $\ell^\infty(3)$, такого, что $M \cap B(x,r) \neq \varnothing$ для некоторого шара $B(x,r)$, однако $M \cap B(x,r)$ не является строгим солнцем в $\ell^\infty(3)$ (будучи, конечно, солнцем). Похожая задача рассматривалась в [123] для чебышёвских множеств в пространстве c_0 (см. теорему 4.3).

В теореме 4.16 (см. [17]) дается характеризация замкнутых промежутков в $C(Q)$ в терминах солнечности их пересечений со строгими солнцами в $C(Q)$. Более полный ответ получен в пространстве $\ell^\infty(n)$ (теорема 4.19).

Теорема 4.16. *Для тела* $\Pi \subset C(Q)$ *следующие условия эквивалентны*:

а) $\Pi \subset C(Q)$ *является замкнутым промежутком* (*брусом*);
б) $\Pi \cap M$ *является строгим протосолнцем в* $C(Q)$ *для всякого строгого солнца* M (*строгого протосолнца* M) *в* $C(Q)$, *такого, что* $M \cap \operatorname{int} \Pi \neq \varnothing$;
в) $\Pi \cap M$ *является строгим солнцем в* $C(Q)$ *для всякого компактного строгого солнца* M *в* $C(Q)$, *такого, что* $M \cap \operatorname{int} \Pi \neq \varnothing$.

В следующей теореме [17] дается характеризация строгих солнц в $C(Q)$ в терминах солнечности их пересечений с замкнутыми телесными промежутками.

Теорема 4.17. *Следующие утверждения эквивалентны*:

а) M – *строгое протосолнце в* $C(Q)$;
б) $M \cap \Pi$ – *строгое протосолнце в* $C(Q)$ *для любого замкнутого телесного промежутка* Π (*телесного бруса*) *в* $C(Q)$, *такого, что* $M \cap \operatorname{int} \Pi \neq \varnothing$;
в) $M \cap \mathrm{m}(x, y)$ – *строгое протосолнце в* $C(Q)$ *для любых* $x, y \in C(Q)$, *таких, что* $M \cap \operatorname{int} \mathrm{m}(x, y) \neq \varnothing$.

Перейдем к доказательствам теорем 4.15–4.17.

Пусть $u, v \in C(Q)$. Для $\delta > 0$ положим

$$A_\delta = A_\delta(u, v) := \bigl\{t \in Q \mid |u(t) - v(t)| \geqslant \delta\bigr\}$$

и рассмотрим множество $\mathring{\mathrm{m}}_\delta(u, v)$, определенное в (3.27).

Воспользуемся следующим техническим результатом.

Предложение 4.5. *Пусть* $\Pi \subset C(Q)$ – *замкнутый промежуток с непустой внутренностью*, $u \in \Pi$, $v \in \operatorname{int} \Pi$. *Тогда*

$$\mathring{\mathrm{m}}_\delta(u, v) \subset \operatorname{int} \Pi, \qquad 0 < \delta < 3^{-1} \rho(v, \operatorname{bd} \Pi).$$

Доказательство предложения 4.5. Пусть $z \in \mathring{\mathrm{m}}_\delta(u, v)$. Предположим, что $z \notin \operatorname{int} \Pi$. Поскольку Π – промежуток, а $z \notin \Pi$, то z можно отделить возможно, нестрого) от Π при помощи экстремальной гиперплоскости (т.е. порождаемой экстремальным функционалом), которая в $C(Q)$ всегда имеет вид $H = \{x \mid x(t_0) = \alpha_0\}$. Считаем, что $\Pi \subset \{x \mid x(t_0) \leqslant \alpha_0\}$. Из определения $\mathring{\mathrm{m}}_\delta(u, v)$ сразу следует, что случай $t_0 \in A_\delta$ невозможен. Предположим, что $t_0 \in Q \setminus A_\delta$. По условию

$\mathring{B}(v,3\delta) \subset \operatorname{int}\Pi$. Следовательно, расстояние от v до любой экстремальной гиперплоскости $\{x \mid x(t)=\beta\}$, не пересекающейся с $\operatorname{int}\Pi$, всегда не менее чем 3δ. Для каждого t_0 картина, по существу, одномерная. Поскольку $|u(t_0)-v(t_0)|<\delta$, мы имеем

$$\Bigl|\bigl(\min\{u(t_0),v(t_0)\}-\delta\bigr)-\bigl(\max\{u(t_0),v(t_0)\}+\delta\bigr)\Bigr|<3\delta,$$
$$|z(t_0)-h(t_0)|>\delta$$

для любого $h\in H$. Поэтому

$$\min\{u(t_0),v(t_0)\}-\delta<\alpha_0, \qquad \max\{u(t_0),v(t_0)\}+\delta<\alpha_0,$$

и в результате $z(t_0)<\alpha_0$. Однако согласно свойству экстремальной отделимости, $z(t_0)\geqslant\alpha_0$. Противоречие с предыдущим неравенством. $\square$

Доказательство теоремы 4.15. a) Пусть M – строгое протосолнце, Π – замкнутый телесный промежуток, $M\cap\Pi\neq\varnothing$. Без ограничения общности считаем, что $0\notin M\cap\Pi$, $\rho(0,M\cap\Pi)=1$. Пусть $y\in P_{M\cap\Pi}0\neq\varnothing$ (при этом существование такого y не обязательно подразумевается). Чтобы установить, что $M\cap\Pi$ – строгое протосолнце, необходимо показать, что $\mathring{K}(y,0)\cap(M\cap\Pi)=\varnothing$. Для краткости обозначим $B=B(0,1)$, $\mathring{B}=\mathring{B}(0,1)$.

Пусть $B\cap\operatorname{int}\Pi=\varnothing$. По теореме об экстремальной отделимости в пространстве $C(Q)$ (предложение 3.8) два промежутка B и Π с непересекающимися внутренностями можно отделить экстремальной гиперплоскостью. Следовательно, $\mathring{K}(y,0)\cap\Pi=\varnothing$, и понятно, что $\mathring{K}(y,0)\cap(M\cap\Pi)=\varnothing$, что и требуется.

Итак, далее считаем, что $B\cap\operatorname{int}\Pi\neq\varnothing$. Предположим противное: пусть $x\in\mathring{K}(y,0)\cap(M\cap\Pi)$. Пусть сначала $x\in\operatorname{int}\Pi$. Так как $x\in\mathring{K}(y,0)$, то согласно [50; лемма 3.1], имеем $[x,y]\cap\mathring{B}\neq\varnothing$. Это означает, что точка $x_\alpha:=\alpha x+(1-\alpha)y$ при малых $\alpha>0$ содержится в шаре $\mathring{B}$ (и, понятно, в $\operatorname{int}\Pi$, поскольку $x\in\operatorname{int}\Pi$). Зафиксируем такое малое α. Выберем $\delta>0$ из условий $2\delta<1-\|x_\alpha\|$, $3\delta<\rho(x_\alpha,\operatorname{bd}\Pi)$ и положим $A_\delta=A_\delta(x_\alpha,y):=\bigl\{t\in Q \mid |x_\alpha(t)-y(t)|\geqslant\delta\bigr\}$. Из определения δ ясно, что $A_\delta\neq\varnothing$. По предложению 3.7, примененному к набору $y=u$, $x_\alpha=v$, $w=0$, $R=1$ и $y=u$, имеем $\mathring{\mathrm{m}}_\delta(x_\alpha,y)\subset\mathring{B}$, а из предложения 4.5 следует, что $\mathring{\mathrm{m}}_\delta(x_\alpha,y)\subset\operatorname{int}\Pi$. Далее, для точек $y,x\in M$ и замкнутого множества A_δ выберем в соответствии леммой 3.C последовательность

$(v_n) \subset M$, такую, что

$$\big(v_n(t) - y(t)\big)\,\big(x(t) - y(t)\big) > 0 \quad \text{для всех} \;\; t \in A_\delta, \quad v_n \to y.$$

Проверим, что

$$v_n \in \mathring{\mathrm{m}}_\delta(x_\alpha, y) \;\; \text{при всех достаточно больших} \;\; n \geqslant N. \tag{4.41}$$

Действительно, выберем такой номер N, что $\|v_n - y\| < \delta$ для всех $n \geqslant N$. Если $t \in A_\delta$ и $n \geqslant N$, то $|x_\alpha(t) - y(t)| \geqslant \delta$, откуда $v_n(t) \in (y(t), x_\alpha(t))$; а если $t \in Q \setminus A_\delta$, то поскольку $\|v_n - y\| < \delta$, то для v_n выполнено

$$v_n(t) \in (\min\{x_\alpha(t), y(t)\} - \delta, \max\{x_\alpha(t), y(t)\} + \delta).$$

Итак, включение (4.41) установлено. Выше, однако, мы показали, что $\mathring{\mathrm{m}}(x_\alpha, y) \subset (\mathring{B} \cap \operatorname{int}\Pi)$, откуда $v_n \in M$, $v_n \in \operatorname{int}\Pi$ и $v_n \in \mathring{B}$ при $n \geqslant N$. Это противоречит тому, что y – ближайшая точка к 0 из $\Pi \cap M$.

Пусть теперь $x \in \operatorname{bd}\Pi$. Как и раньше, считаем, что $x \in \mathring{K}(y, 0) \cap M$. Согласно доказанному, будем предполагать, что множество $\mathring{K}(y, 0) \cap \operatorname{int}\Pi$ не содержит точек из M. По условию найдется точка $w \in (M \cap \operatorname{int}\Pi)$. Для $0 < \beta < 1$ рассмотрим точку $w_\beta = \beta w + (1-\beta)x$. Поскольку $w \in \operatorname{int}\Pi$, $x \in \Pi$, то $w_\beta \in \operatorname{int}\Pi$. Точка x содержится в открытом выпуклом множестве $\mathring{K}(y, 0)$, откуда получаем, что $w_\beta \in \mathring{K}(y, 0)$ при всех малых $\beta > 0$. Зафиксируем такое β. Так как $x, w_\beta \in \mathring{K}(y, 0)$, то по определению опорного конуса $x, w_\beta \in \mathring{B}\big(-dy, (d+1)\big)$ при достаточно большом $d > 1$. Выберем число δ из условий $0 < 3\delta < \rho(w_\beta, \operatorname{bd}\Pi)$ и $0 < 2\delta < d + 1 - \|dy + w_\beta\|$; здесь $\delta > 0$, поскольку $w_\beta \in \mathring{B}\big(-dy, (d+1)\big)$. Как и выше, положим

$$A_\delta = A_\delta(x, w_\beta) := \big\{t \mid |x(t) - w_\beta(t)| \geqslant \delta\big\}.$$

Из определения δ следует, что $A_\delta \neq \varnothing$. Для точек $x, w \in M$ и замкнутого множества $A_\delta \subset Q$ выберем в соответствии с леммой 3.C последовательность $(v_n) \subset M$, такую, что $v_n \to x$, $(v_n(t) - x(t))\,(w(t) - x(t)) > 0$ для всех $t \in A_\delta$. Выберем номер N, такой, что $\|v_n - x\| \leqslant \delta$ при $n \geqslant N$. Как и в (4.41), можно показать, что $v_n \in \mathring{\mathrm{m}}_\delta(x, w_\beta)$ при $n \geqslant N$. По предложению 3.7, примененному к набору $x = u$, $w_\beta = v$, $w = -dy$, $R = (d+1)$, получим

$$\mathring{\mathrm{m}}_\delta(w_\beta, x) \subset \mathring{B}\big(-dy, (d+1)\big),$$

а по предложению 4.5 имеем

$$\mathring{\mathrm{m}}_\delta(x, w_\beta) \subset \operatorname{int}\Pi, \quad \text{т.е.} \quad \mathring{\mathrm{m}}_\delta(x, w_\beta) \subset (\mathring{K}(y, 0) \cap \operatorname{int}\Pi).$$

Но $v_n \in M$, $v_n \in \mathring{\mathrm{m}}_\delta(x, w_\beta)$, откуда $v_n \in (\mathring{K}(y,0) \cap \operatorname{int}\Pi)$. Противоречие с предположением, что множество $\mathring{K}(y,0) \cap \operatorname{int}\Pi$ не содержит точек из M.

Итак, предположение, что $\mathring{K}(y,0) \cap (M \cap \Pi) \neq \varnothing$, было неверно и y – точка светимости из $M \cap \Pi$ для 0 (т.е. для y выполнено условие (0.1)).

Утверждение б) тривиально, поскольку строгое протосолнце существования является строгим солнцем.

Установим в). По теореме 3.5 множество M монотонно линейно связно, в силу равенства равенства $\mathrm{m}(\cdot,\cdot) = [\![\cdot,\cdot]\!]$ (верном, в частности, в пространстве $C(Q)$, Q – метризуемый компакт; см. стр. 86) множество $M \cap \Pi$ также монотонно линейно связно. В силу теоремы 3.2 и известного результата Власова [50; теорема 4.4], утверждающему, что непустое P-ацикличное множество является солнцем, имеем, что $M \cap \Pi$ – солнце в $C(Q)$.

Теорема 4.15 доказана. $\square$

Импликации в)⇒а) и а)⇒в) содержатся в теореме 4.15, а утверждение б)⇒в) тривиально.

Доказательство теоремы 4.17. Поскольку $\mathrm{m}(x,y) = [\![x,y]\!]$ в пространстве $C(Q)$, Q – метрический компакт, то б)⇒в). Импликация а)⇒б) установлена в теореме 4.15. Любой замкнутый шар в $C(Q)$ имеет вид $\mathrm{m}(x,y)$. Рассматривая пересечения M с шарами достаточно большого радиуса получаем в)⇒а), а следовательно и б)⇒а). $\square$

Следующий результат есть переформулировка теоремы 4.8 на языке брусов.

Теорема 4.18. *Пусть M – аппроксимативно компактное чебышёвское множество в пространстве $X = c_0$ или $\ell^\infty(n)$ и пусть Π – замкнутый промежуток конечного дефекта. Тогда, если $M \cap \operatorname{ri}\Pi \neq \varnothing$, то*

$$\Pi \subset \mathrm{T}(M \cap \Pi) \cap \mathrm{AC}(M \cap \Pi).$$

Иными словами, каждая точка из “параллелепипеда” Π имеет единственную ближайшую точку во множестве $M \cap \Pi$.

В теореме 4.19 (Алимов, [13]) дается характеризация замкнутых множеств $\Pi \subset \mathbb{R}^n$, пересечение с которыми чебышёвского множества (солнца, строгого солнца) M в $\ell^\infty(n)$ сохраняет (в естественной постановке) аппроксимативные свойства множества M. Оказывается, что такие множества Π в точности являются замкнутыми промежутками в $\mathbb{R}^n$. (Полный ответ на аналогичный вопрос для двумерного пространства с произвольной нормой дается в теоремах 4.24–4.26; случай общих банаховых пространств рассмотрен выше в теореме 4.14.)

Теорема 4.19. *Пусть* $\varnothing \neq \Pi \subset \mathbb{R}^n$. *Имеют место следующие утверждения*:

а) Π *является замкнутым промежутком* (*брусом*) *в* $\ell^\infty(n)$ *если и только если* $\Pi \cap M$ *является солнцем в* $\ell^\infty(n)$ *для всякого солнца* M *в* $\ell^\infty(n)$, $M \cap \Pi \neq \varnothing$;

б) Π *является замкнутым промежутком* (*брусом*) *в* $\ell^\infty(n)$ *и* $\operatorname{int}\Pi \neq \varnothing$ *если и только если* $\Pi \cap M$ *является строгим солнцем в* $\ell^\infty(n)$ *для любого строгого солнца* M *в* $\ell^\infty(n)$ *такого, что* $M \cap \operatorname{int}\Pi \neq \varnothing$;

в$_1$) *Пусть* Π – *замкнутый промежуток* (*брус*) *в* $\ell^\infty(n)$. *Тогда* $\Pi \subset \mathrm{T}(M \cap \Pi)$ *для любого чебышёвского множества* M *в* $\ell^\infty(n)$, $M \cap \Pi \neq \varnothing$;

в$_2$) *Пусть множество* $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ *связно, замкнуто и пусть включение* $\Pi \subset \mathrm{T}(M \cap \Pi)$ *выполнено для любого чебышёвского множества* M *в* $\ell^\infty(n)$ *такого, что* $M \cap \Pi \neq \varnothing$. *Тогда* Π – *замкнутый промежуток* (*брус*).

Замечание 4.5. В п. б) теоремы 4.19 условие $M \cap \operatorname{int}\Pi \neq \varnothing$ естественно и от него нельзя избавиться (в замечании 4.1 построен пример строгого солнца в $\ell^\infty(3)$ и экстремальной (координатной) гиперплоскости Π в $\ell^\infty(3)$ такой, что $M \cap \Pi$ не является строгим солнцем в $\ell^\infty(3)$ (и в H)). Также нельзя избавиться от требования связности и в п. в) – достаточно рассмотреть в качестве Π “двоеточие”.

Доказательство теоремы 4.19. Напомним (см. стр. 171), что в $C(Q)$ класс замкнутых промежутков совпадает с классом брусов. Утверждение а) содержится в теореме 4.14, утверждение б) – в теореме 4.17. Утверждение в$_1$) установлено в теореме 4.8.

Докажем утверждение в$_2$). Предположим, что Π – такое множество, что $\Pi \subset \mathrm{T}(M \cap \Pi)$ для любого чебышёвского множества M в $\ell^\infty(n)$, $\Pi \cap M \neq \varnothing$. Исключим вырожденный случай одноточечного Π и далее предположим, что $\operatorname{card}\Pi \geqslant 2$. По теореме 4.5 пересечение произвольного чебышёвского множества M в $\ell^\infty(n)$ с координатным подпространством H, $M \cap H \neq \varnothing$, остается чебышёвским множеством в H. Поэтому, при необходимости, рассматривая $\ell^\infty(m)$ при $m < n$, мы можем без ограничения общности считать, что $\operatorname{int}_{\mathbb{R}^n} \Pi \neq \varnothing$. Выберем $\theta \in \operatorname{int} \Pi$. Рассмотрим точку $\vartheta \in \Pi$, $\vartheta \mathrel{\#} \theta$ (последнее означает, что $\vartheta_i \neq \theta_i$ для всех $i = 1, \dots, n$). Такая точка ϑ существует, поскольку $\operatorname{int} \Pi \neq \varnothing$. Предположим, что найдется $w \in \operatorname{int} \mathrm{m}(\theta, \vartheta)$, $w \notin \Pi$. Рассмотрим множество $L = [\theta, w] \cup [w, \vartheta]$. По теореме 4.2 множество L является чебышёвским. Но $L \cap \Pi$ не связно.

Далее воспользуемся следующим понятным фактом: если множество Y связно, конечномерно, и если $K \subset Y$ – чебышёвское множество в Y (относительно некотрой действующей на Y нормы), то метрическая проекция на множество K в Y непрерывна; как следствие, K связно. Полагая $\Pi = Y$ и $K = \Pi \cap L$, имеем: Π по предположению связно, $L \cap \Pi$ – чебышёвское множество в Π; $\dim \Pi < \infty$. Отсюда $L \cap \Pi$ обязано быть связым. Выше, однако, мы получили, что $L \cap \Pi$ несвязно.

Итак, предположение, что $w \in \operatorname{int} \mathrm{m}(\theta, \vartheta)$, $w \notin \Pi$ было неверно. Далее, ясно, что Π замкнуто. Отсюда $\mathrm{m}(\theta, \vartheta) \subset \Pi$. Переходя к пределу (см. [13; стр. 9]), получаем, что $\mathrm{m}(\theta, v) \subset \Pi$ для любых точек $\theta, v \in \Pi$. Теорема 4.19 доказана. $\square$

В теоремах 4.20–4.22 (Алимов, [13], [7]) получены новые характеризации чебышёвских множеств, солнц и строгих солнц в $\ell^\infty(n)$ в терминах аппроксимативных свойств их пересечений с замкнутыми промежутками в $\mathbb{R}^n$. К примеру, множество $M \subset \mathbb{R}^n$ является чебышёвским в $\ell^\infty(n)$ если и только если для любых точек $x, y \in \mathbb{R}^n$ таких, что $[[x, y]] \cap M \neq \varnothing$, любая точка из $[[x, y]]$ имеет единственную ближайшую в $[[x, y]] \cap M$.

Теорема 4.20 (характеризация солнц в $\ell^\infty(n)$). *Следующие утверждения эквивалентны:*

а) M *– солнце в* $\ell^\infty(n)$*;*
б) $M \cap \Pi$ *– солнце в* $\ell^\infty(n)$ *для любого замкнутого промежутка (бруса)* Π *в* $\ell^\infty(n)$ *такого, что* $\Pi \cap M \neq \varnothing$*;*
в) $M \cap \mathrm{m}(x, y)$ *– солнце в* $\ell^\infty(n)$ *для любых* $x, y \in \ell^\infty(n)$, $\mathrm{m}(x, y) \cap M \neq \varnothing$*;*
г) $\varnothing \neq M \subset \mathbb{R}^n$ *замкнуто, связно, и пересечение* M *с любой координатной аффинной гиперплоскостью* H *в* $\mathbb{R}^n$ *является солнцем в* H *или пусто.*

Замечание 4.6. Требование связности в п. г) убрать нельзя – в этом можно убедиться на примере "двоеточия" $M = \{(0,0)\} \cup \{(1,1)\}$ на плоскости $\ell^\infty(2)$.

Следующий результат есть частный случай теоремы 4.17 с учетом того, что в конечномерном пространстве класс строгих протосолнц совпадает с классом строгих солнц.

Теорема 4.21 (характеризация строгих солнц в $\ell^\infty(n)$). *Следующие утверждения эквивалентны*:

а) M *– строгое солнце в* $\ell^\infty(n)$;
б) $M \cap \Pi$ *– строгое солнце в* $\ell^\infty(n)$ *для любого замкнутого промежутка* (*бруса*) Π *в* $\ell^\infty(n)$, $M \cap \operatorname{int}\Pi \neq \varnothing$;
в) $M \cap \mathrm{m}(x,y)$ *– строгое солнце в* $\ell^\infty(n)$ *для любых* $x, y \in \ell^\infty(n)$, $M \cap \operatorname{int}\mathrm{m}(x,y) \neq \varnothing$.

Теорема 4.22 (характеризация чебышёвских множеств в $\ell^\infty(n)$). *Следующие утверждения эквивалентны*:

а) M *– чебышёвское множество в* $\ell^\infty(n)$;
б) *если* Π *– замкнутый промежуток* (*брус*) *в* $\ell^\infty(n)$, $\Pi \cap M \neq \varnothing$, *то любой элемент из* Π *обладает единственной ближайшей точкой из* $\Pi \cap M$ (*т.е.* $\Pi \subset \mathrm{T}(\Pi \cap M)$);
в) $\mathrm{m}(x,y) \subset \mathrm{T}(\mathrm{m}(x,y) \cap M)$ *для любых* $x, y \in \ell^\infty(n)$, $\mathrm{m}(x,y) \cap M \neq \varnothing$.

Доказательство теоремы 4.20. Импликации а)⇔б), а)⇒в) установлены в теореме 4.11; в)⇒а) следует из теоремы 3.А; а)⇒г) следует из теоремы 3.А.

Докажем г) ⇒ а). Предположим, что M не является солнцем. Браун [156; теорема 3.6] установил, что

$$M \text{ — солнце в } \ell^\infty(n) \iff (\mathrm{m}(x,y) \setminus \{x,y\}) \cap M \neq \varnothing \quad \forall x, y \in M. \tag{4.42}$$

Поскольку по предположению M – не солнце, то из (4.42) имеем:

$$\text{найдутся } x, y \in M \text{ такие, что } (\mathrm{m}(x,y) \setminus \{x,y\}) \cap M = \varnothing. \tag{4.43}$$

Выберем такие x и y. Поскольку пересечение $M \cap H$ является солнцем в H для любого аффинного координатного подпространства H, $H \cap M \neq \varnothing$, а по теореме 3.А солнца монотонно линейно связны, то из (4.42) следует, что $x \nparallel y$.

Далее, для $F \subset \mathbb{R}^n$ и $y \in \operatorname{bd} F$ определим

$$\operatorname{cone}(F, y) = \{\alpha f + (1-\alpha)y \mid f \in F, \quad \alpha \geqslant 0\}.$$

Обозначим через $F_1, \dots, F_n$ все $(n-1)$-мерные грани тела $\mathrm{m}(x, y)$, содержащие точку x; $E_1, \dots, E_n$ – все $(n-1)$-мерные грани тела $\mathrm{m}(x, y)$, содержащие точку y. Рассматривая все координатные гиперплоскости H, проходящие через точки x и y, и принимая во внимание то, что $M \cap H$ является солнцем в H, из (4.43) и равенства $\mathrm{m}(\cdot, \cdot) = [\![\cdot, \cdot]\!]$ получаем:

$$F_i \cap M = \{x\}, \quad E_i \cap M = \{y\}, \quad i = 1, \dots, n,$$

и, более того, из (4.43), поскольку по теореме 3.А пересечение M с любым координатным подпространством $\operatorname{aff} F_i$ (аффинной оболочкой грани F_i) монотонно линейно связно, имеем

$$\operatorname{cone}(F_i, x) \cap M = \{x\}, \quad \operatorname{cone}(E_i, y) \cap M = \{y\}, \qquad i = 1, \dots, n.$$

Несложно проверить, что множество

$$U = \left(\bigcup_{i=1}^{n} \operatorname{cone}(F_i, x)\right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n} \operatorname{cone}(E_i, y)\right)$$

разделяет $\mathbb{R}^n$ и что точки x и y лежат в разных компонентах $\mathbb{R}^n \setminus U$. Однако M по условию связно, а $x, y \in M$. Получили противоречие, поэтому M – солнце в $\ell^\infty(n)$. Теорема 4.20 доказана. $\square$

Доказательство теоремы 4.22. Импликации а) $\Rightarrow$ б), а) $\Rightarrow$ в) установлены в теореме 4.19. Утверждение б) $\Rightarrow$ в) очевидно. Импликация в) $\Rightarrow$ а) достаточно ясна. Пусть $x \notin M$, $d = \rho(x, M)$. Положим $u^{(i)} = x^{(i)} + 2d$, $v^{(i)} = x^{(i)} - 2d$, $u = (u^{(1)}, \dots, u^{(n)})$, $v = (v^{(1)}, \dots, v^{(n)})$. Тогда $B(x, d) \subset \operatorname{int} \mathrm{m}(u, v)$. Теперь проксиминальность M и единственность элемента наилучшего приближения для x в M следует из условия в). Теорема 4.22 доказана. $\square$

4.5. Сохранение аппроксимативных свойств чебышёвских множеств и солнц на плоскости. Изучаются аппроксимативные свойства пересечений солнц и чебышёвских множеств в двумерном банаховом пространстве X_2 с подмножествами из $\mathbb{R}^2$. Охарактеризованы подмножества $\mathbb{R}^2$, которые при пересечении с солнцами из X_2 являются солнцами. Аналогичный вопрос изучен для чебышёвских множеств в X_2.

Пусть $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение на X_2 с отношением ортогональности $\perp$. Норме $\|\cdot\|$ мы сопоставим полярную норму

$$\|x\|^* = \sup\bigl\{\langle x, y\rangle \mid \|y\| \leqslant 1\bigr\}$$

и *радоново трансформированную норму*

$$\|x\|^{\#} = \|x^{\perp}\|^*, \quad x \in X_2$$

(см. [202] и [206]).

Все объекты, определяемые посредством этой нормы, мы будем обозначать индексом "#". Единичный шар $B^{\#}(0,1)$ можно себе представить как повернутый на 90° шар B^* пространства $(X_2, \|\cdot\|^*)$. Также имеет место равенство $\|\cdot\|^{\#\#} = \|\cdot\|$. Примером радоново трансформированной нормы для равномерной нормы на плоскости служит ℓ^1-норма.

Пусть $(X, \|\cdot\|)$ – линейное нормированное пространство. Следуя К. Менгеру [236], для $a, b \in X$ определим $\|\cdot\|$-*метрический отрезок* между точками a и b:

$$\langle a, b\rangle = \bigl\{x \in X \mid \|a - b\| = \|a - x\| + \|x - y\|\bigr\}. \tag{4.44}$$

Напомним, что $\|\cdot\|$-*геодезический сегмент* в X это непрерывная кривая, длина которой равна расстоянию в норме $\|\cdot\|$ между концевыми точками.

Следующее утверждение хорошо известно (см., например, [216] и лемму 3.A): если множество M полно и m-связно, то каждые две точки из M можно соединить $|\cdot|$-геодезическим сегментом (монотонной дугой), содержащимся в M (т.е. монотонной кривой).

Следующее свойство множеств на плоскости установлено П. Грубером [203] (см. также Х. Беренс и Л. Хетцельт [136]): замкнутое множество в $\mathbb{R}^2$ можно представить как результат стягивающей ретракции по лучам, если и только если оно метрически выпукло. Более того, множество $M \subset X_2$ обладает свойством, что для каждой точки X_2 множество $P_M x$ ее ближайших точек из M непусто и стягиваемо, если и только если M замкнуто и $d_{\|\cdot\|^{\#}}$-выпукло (т.е. метрически выпукло относительно нормы $\|\cdot\|^{\#}$; см. [202] и теорему 4.23).

На плоскости X_2 метрический отрезок $\langle x, y\rangle$ можно достаточно просто описать ([137; лемма 3], [142; теорема 9.6]):

$$\langle x, y\rangle = (x + \mathbb{R}_+ \cdot \Sigma) \cap (y - \mathbb{R}_+ \cdot \Sigma), \tag{4.45}$$

где Σ – наименьшая замкнутая грань шара $B(0,1)$, относительная внутренность которой содержит точку $(y-x)/\|y-x\|$.

Отметим [142; с. 58], что метрический отрезок $\langle x,y\rangle$ является промежутком для любых $x,y\in X_2$ и что (см. [137; лемма 6]) единичный шар $B=B_{\|\cdot\|}$ в X_2 является $d_{\|\cdot\|^\#}$-выпуклым относительно нормы $\|\cdot\|^\#$ (а также относительно ассоциированной нормы $|\cdot|$, определенной в (3.8); см. [126]). Более того, на плоскости $d_{|\cdot|}$-выпуклость и $d_{\|\cdot\|^\#}$-выпуклость совпадают (см. выше).

Ниже мы воспользуемся понятиями $\|\cdot\|^\#$-выпуклости и $d_{\|\cdot\|^\#}$-выпуклости (т.е. d-выпуклости относительно нормы $\|\cdot\|^\#$) при изучении чебышёвских множеств и солнц на нормированной плоскости $(X_2,\|\cdot\|)$.

Структура чебышёвских множеств и солнц на плоскости X_2 изучалась многими авторами, начиная с Л. Н. Х. Бунта и Т. Моцкина (см. [61]). Среди последних работ отметим Грубер [202], Беренс и Хетцельт [137], Грубер [203], Алимов [1], [121].

В следующем утверждении импликация a)$\Leftrightarrow$b) доказана Беренсом и Хетцельтом в [136], [137]; импликация b)$\Leftrightarrow$c) установлена Грубером в [202]; импликация a)$\Leftrightarrow$e) установлена Брауном [156; Theorem 4.1]. Импликация d)$\Leftrightarrow$e) гарантируется теоремой 3.2. Эквивалентность f)$\Leftrightarrow$e) установлена в лемме 3.1 (здесь напомним, что ассоциированная норма $|\cdot|$ определена в (3.8)).

Теорема 4.23. *Пусть множество $M\subset X_2$ непусто и замкнуто. Следующие утверждения эквивалентны*:

a) M *– солнце*;
b) M $\|\cdot\|^\#$*-выпукло*;
c) P_Mx *непусто и стягиваемо для всех* $x\in X$;
d) M *монотонно линейно связно*;
e) M m-*связно*;
f) M $|\cdot|$*-выпукло относительно ассоциированной нормы* $|\cdot|$.

В частности, для замкнутого подмножества нормированной плоскости его $\|\cdot\|^\#$-выпуклость эквивалентна его монотонной линейной связности и эквивалентна его $|\cdot|$-выпуклости.

Напомним, что подмножество $M\subset X_2$ *полустрого метрически выпукло* (Грубер [202], если оно метрически выпукло и для каждой пары различных точек $x,y\in M$, такой, что луч, проведенный через точки 0 и $x - y$, пересекает границу единичного шара в негладкой точке, линейный интервал (a, b) содержится во внутренности M.

В следующем утверждении эквивалентность a)⇔c) установлена Грубером [202], а эквивалентность a)⇔b) доказана Хетцельтом [206]. По поводу импликации b)⇔b)′ см. теорему 4.23.

Теорема 4.C. *Следующие утверждения эквивалентны на плоскости X_2 для замкнутых множеств*:

a) M *– чебышёвское множество*;
b) M *монотонно линейно связно и не содержит отрезков в своей границе, параллельных собственной грани шара* $B(0, 1)$;
b′) M $\|\cdot\|^{\#}$*-выпукло и не содержит отрезков в своей границе, параллельных собственной грани шара* $B(0, 1)$;
c) M *полустрого метрически выпукло относительно радоново трансформированной нормы* $\|\cdot\|^{\#}$.

В теореме 4.D (Хетцельт [206]) охарактеризованы строгие солнца на плоскости X_2.

Теорема 4.D. *Пусть множество* $M \subset X_2$ *непусто и замкнуто. Следующие утверждения эквивалентны*:

a) M *– строгое солнце*;
b) M *монотонно линейно связно и если граница множества* M *содержит отрезок* I, *параллельный некоторой грани шара* B, *то выполнено следующее утверждение*: *пусть* H_+, H_- *– два различных полупространства с границей* $\operatorname{aff} I$, *тогда*, *если* $\sigma \in \{+, -\}$ *и* $M \cap \operatorname{ri} H_\sigma \neq \varnothing$, *то* $\operatorname{ri} I \subset \operatorname{cl} \operatorname{ri}_{H_\sigma} H_\sigma$.

Напомним, что $\operatorname{bd} A$, $\operatorname{ri} A$ и $\operatorname{cl} A$ – граница и соответственно относительная внутренность и замыкание множества A; $\operatorname{aff} A$ – аффинная оболочка множества A, т.е. наименьшее аффинное подпространство, содержащее A.

Основными результатами данного параграфа являются теоремы 4.24–4.26 (Алимов [14]). В теореме 4.24 мы характеризуем брусы (замкнутые промежутки) плоскости $\mathbb{R}^2$ в терминах солнечности их пересечений с солнцами в X_2. Теорема 4.25 описывает солнца в X_2 в терминах солнечности их пересечений с брусами и $\|\cdot\|^{\#}$-метрическими отрезками в $\mathbb{R}^2$. (Напомним, что для $u, v \in X_2$ имеет место равенство

$\mathrm{m}(u,v) = [[u,v]] = \langle u,v\rangle^{\#} = \langle u,v\rangle^{|\cdot|}$; см. (3.6) и замечание после теоремы 4.23.) В сравнении с конечномерными результатами из § 4.3), мы здесь не накладываем условие, что $X \in (BM)$. При этом стоит отметить, что не каждое X_2 лежит в классе (BM) (Браун [156]).

Теорема 4.24. *Подмножество* $\varnothing \neq \Pi \subset (X_2, \|\cdot\|)$ *является брусом если и только если* $M \cap \Pi$ *является солнцем в* X_2 *для любого солнца* M *в* X_2 *такого, что* $M \cap \Pi \neq \varnothing$.

Теорема 4.25. *В пространстве* $(X_2, \|\cdot\|)$ *следующие утверждения эквивалентны*:

а) M *– солнце в* X_2;
б) $M \cap \Pi$ *является солнцем в* X_2 *для любого бруса* Π *в* $\mathbb{R}^2$, *такого, что* $\Pi \cap M \neq \varnothing$;
в) $M \cap \langle x,y\rangle^{\#}$ *является солнцем в* X_2 *для любых* $x, y \in X_2$, *таких, что* $\mathrm{m}(x,y) \cap M \neq \varnothing$.

В теореме 4.26 мы описываем множества Π, такие, что если M – чебышёвское множество в X_2, такое, что $M \cap \Pi \neq \varnothing$, то $\Pi \subset \mathrm{T}(M \cap \Pi)$.

Теорема 4.26. *Имеют место следующие утверждения*:

1) *Пусть* $\varnothing \neq \Pi \subset (X_2, \|\cdot\|)$ *– брус. Тогда* $\Pi \subset \mathrm{T}(M\cap\Pi)$ *для каждого чебышёвского множества* M *в* X_2, $M \cap \Pi \neq \varnothing$;
2) *Пусть* Π *– связное подмножество* $\mathbb{R}^2$, *замкнутое или открытое, такое, что* $\Pi \subset \mathrm{T}(M \cap \Pi)$ *выполнено для любого чебышёвского множества* M *в* $(X_2, \|\cdot\|)$, $M \cap \Pi \neq \varnothing$. *Тогда* Π *– брус.*

Доказательство теоремы 4.24. Рассмотрим солнце M в X_2. Пусть Π – брус, $\Pi \cap M \neq \varnothing$. Считая, что $M \cap \Pi$ состоит из не менее чем двух точек, рассмотрим $x, y \in M \cap \Pi$, $x \neq y$. По условию $\langle x,y\rangle^{\#} \subset \Pi$. Так как по теореме 4.23 множество M $\|\cdot\|^{\#}$-выпукло, то $M \cap \Pi$ также $\|\cdot\|^{\#}$-выпукло. Ясно, что Π замкнуто. Теперь солнечность пересечения $M \cap \Pi$ вытекает из теоремы 4.23.

Теперь пусть Π – подмножество из X_2, такое, что $M \cap \Pi$ является солнцем в X_2 для любого солнца M в X_2, $M \cap \Pi \neq \varnothing$. Рассмотрим произвольные точки $x, y \in \Pi$. Нам требуется установить, что $\langle x,y\rangle^{\#} \subset \Pi$. Предположим противное. Тогда найдутся $u, v \in \Pi$ и $w \in \langle u,v\rangle^{\#}$, $w \notin \Pi$. Определим ломаную L как объединение двух отрезков: $L = [u,w] \cup [w,v]$. Так как $w \in \langle u,v\rangle^{\#}$, то L $\|\cdot\|^{\#}$-выпукло. По теореме 4.23 множество L является солнцем в X_2; $L \cap \Pi \neq \varnothing$. По предположению $L \cap \Pi$ – солнце.

Но это невозможно, так как в конечномерных линейных нормированных пространствах все солнца линейно связны (см., например, [157]), а $L \cap \Pi$ не связно. Полученное противоречие показывает, что Π – брус. Полагая $M = X_2$, получаем, что Π замкнуто. Теорема 4.24 доказана. $\square$

Доказательство теоремы 4.25. Импликации a)$\Rightarrow$b), a)$\Rightarrow$c) следуют из теоремы 4.24, так как метрический отрезок $\langle \cdot, \cdot \rangle^{\#}$ всегда является брусом; утверждение b)$\Rightarrow$c) понятно. Установим c)$\Rightarrow$a). Пусть $x, y \in M$. По предположению $\langle x, y \rangle^{\#} \cap M$ солнце. По теореме 4.23 пересечение $\| \cdot \|^{\#}$-выпукло. Отсюда следует также и $\| \cdot \|^{\#}$-выпуклость множества M. Следовательно, M – солнце. Теорема 4.25 доказана. $\square$

Доказательство теоремы 4.26. 1. Пусть Π – брус и пусть M – чебышёвское множество в X_2, $M \cap \Pi \neq \varnothing$. Если $\dim \Pi = 0$, доказывать нечего. Пусть $\dim \Pi = 1$. Выберем $x, y \in \Pi$, $x \neq y$. По условию $[x, y] \subset \Pi$, т.е. Π (линейно) выпукло. По теореме 4.C множество M $\| \cdot \|^{\#}$-выпукло. Ясно, что пересечение выпуклого одномерного множества Π с множеством M выпукло. Следовательно, $\Pi \subset \mathrm{T}(M \cap \Pi)$.

Пусть теперь $\dim \Pi = 2$. Понятно, что $P_{M \cap \Pi} x \neq \varnothing$. Предположим, что $P_{M \cap \Pi} x$ состоит из более чем одной точки. Из теоремы 4.23 вытекает, что $P_{M \cap \Pi} x$ является или отрезком, или объединением двух отрезков с общей начальной точкой. Рассмотрим произвольно точку $y \in P_{M \cap \Pi} x$, принадлежащую относительной внутренности некоторого отрезка (обозначим его I) из $P_{M \cap \Pi} x$. Положим $x_\alpha = \alpha x + (1 - \alpha) y$ для $0 < \alpha < 1$. Тогда $x_\alpha \in \Pi$, $x_\alpha \notin M$. По предположению из того, что $B(x_\alpha, \|x_\alpha - y\|) \subset \operatorname{conv}(x, I)$ (здесь $\operatorname{conv}(x, I)$ – выпуклая оболочка x и I), следует, что $B(x_\alpha, \|x_\alpha - y\|) \subset \Pi$ для всех достаточно малых α. Поэтому для таких α имеем $P_{M \cap \Pi} x_\alpha = P_M x_\alpha$. Но мы выбрали y из относительной внутренности отрезка $I \subset P_{M \cap \Pi} x$. Следовательно, $P_M x_\alpha$ содержит в себе и некоторую окрестность точки y в I. Это противоречит чебышёвости M в X_2.

2. Установим, что Π является брусом. Предположив противное, рассмотрим точки $u, v \in \Pi$, такие, что $\langle u, v \rangle^{\#} \not\subset \Pi$. Ясно, что $\langle u, v \rangle^{\#} \not\subset \Pi$ невозможно, если $\dim \langle u, v \rangle^{\#} \leqslant 1$; поэтому далее считаем, что $\dim \langle u, v \rangle^{\#} = 2$. Сначала рассмотрим точку $w \in \operatorname{int} \langle u, v \rangle^{\#}$, $w \notin \Pi$, и определим $L = [u, w] \cup [w, v]$. Докажем, что L – чебышёвское множество в X_2.

Поскольку $w \in \langle u, v\rangle^{\#}$, то L – $\|\cdot\|^{\#}$-геодезический сегмент, соединяющий u и v. Отсюда из (4.44) следует, что L $\|\cdot\|^{\#}$-выпукло. По теореме 4.23 L – солнце. Предположим, что L не является чебышёвским множеством в X_2. Пусть $x \in X_2$ – точка, имеющая более чем одну ближайшую из L. По теореме 4.23 множество $P_L x$ стягиваемо и, следовательно, представляет собой отрезок или объединение двух отрезков с общей начальной точкой. В обоих случаях $P_L x$ содержит невырожденный отрезок (скажем, I), принадлежащий $[u, w]$ или $[w, v]$.

Грубер [202; утверждение 10] установил, что

> $(*)$ если вектор $\vartheta \in \operatorname{bd} B^{\#}$ параллелен отрезку из $\operatorname{bd} B$, то ϑ является негладкой точкой шара $B^{\#}$.

Пусть a, b – концевые точки отрезка I и пусть $\vartheta \in \operatorname{bd} B^{\#}$ – точка, в которой граница $\operatorname{bd} B^{\#}$ шара $B^{\#}$ пересекается с линией, проходящей через 0 и $b - a$. Согласно $(*)$, ϑ – негладкая точка шара $B^{\#}$. Далее [202; утверждение (9)],

> $(**)$ если $c, d \in X_2$, $c \neq d$, таковы, что линия, проходящая через 0 и $c - d$ пересекает границу шара B в экстремальной точке, то $[c, d]$ является единственным геодезическим сегментом, соединяющим c и d.

Теперь, применяя $(**)$ к паре точек a, b, в силу того, что точка ϑ негладкая, заключаем, что отрезок $[a, b]$ является единственным $\|\cdot\|^{\#}$-геодезическим сегментом, соединяющим a и b. Без ограничения общности предположим, что $a, b \in [u, w]$. Из только что доказанного имеем:

> $(*{*}*)$ $[u, w]$ является единственным $\|\cdot\|^{\#}$-геодезическим сегментом, соединяющим u и w.

Это влечет, что $\langle u, w\rangle^{\#}$ является отрезком. С другой стороны, $w \in \operatorname{int}\langle u, v\rangle^{\#}$, что противоречит $(*{*}*)$. Следовательно, предположение о том, что L не являлось чебышёвским, было неверно.

Рассмотрим пересечение $L \cap \Pi$. Воспользуемся хорошо известным утверждением: пусть $Y \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, и пусть K – чебышёвское множество в Y (Y снабжено некоторой нормой), тогда оператор метрического проектирования P_K на K в Y непрерывен; отсюда K связно, если Y связно. Полагая $Y = \Pi$ и $K = L \cap \Pi$, из начального предположения

$\Pi \subset \mathrm{T}(\Pi \cap L)$ (Π связно) получаем, что $L \cap \Pi$ связно. С другой стороны, так как $w \notin L$, то w разделяет множество $L \cap \Pi$. Это противоречит только что доказанному утверждению, что $L \cap \Pi$ связно. Следовательно, $\langle u, v\rangle^{\#} \subset \Pi$.

Итак, если $u, v \in \Pi$, то $\operatorname{int}\langle u, v\rangle \subset \Pi$. На один момент предположим, что $u, v \in \operatorname{int}\Pi$ (это возможно, поскольку $\dim \Pi = 2$). Определим точки u', v', лежащие на прямой, проходящий через u и v, таким образом, что $u \in (u', v)$, $v \in (u, v')$, $u', v' \in \operatorname{int}\Pi$. Из (4.45) вытекает, что $\langle u, v\rangle \subset \operatorname{int}\langle u', v'\rangle$. Согласно только что доказанному, $\operatorname{int}\langle u', v'\rangle \subset \Pi$, откуда $\langle u, v\rangle \subset \Pi$ для всех $u, v \in \operatorname{int}\Pi$. Если Π открыто, то доказательство завершено. Окончательно, что замыкание любого промежутка множества является замкнутым промежутком [142; теорема 10.2]. Следовательно, Π является брусом. Теорема 4.26 доказана. $\square$

Non nobis Domine...

Список литературы

[1] А. Р. Алимов, “Чебышевские компакты на плоскости”, *Труды Матем. ин-та РАН*, **219** (1997), 8–26.

[2] Алимов А. Р., *Аппроксимативные свойства множеств в линейных пространствах с несимметричной нормой*, Дисс. канд. физ.-матем. наук., М.: МГУ, 1997.

[3] А. Р. Алимов, “Всякое ли чебышёвское множество выпукло?”, *Матем. просвещение*, *сер.* 3, 1998, № 2, 155–172.

[4] А. Р. Алимов, “О структуре дополнения к чебышёвским множествам”, *Функц. анализ и его прил.*, **35**:3 (2001), 19–27.

[5] А. Р. Алимов, “Геометрическая характеризация строгих солнц в $\ell^\infty(n)$”, *Матем. заметки*, **70**:1 (2001), 3–11.

[6] А. Р. Алимов, “Теорема Банаха–Мазура для пространств с несимметричным расстоянием”, *УМН*, **58**:2 (2003), 159–160.

[7] А. Р. Алимов, “Геометрическое строение чебышёвских множеств в $\ell^\infty(n)$”, *Функц. анализ и его прил.*, **39**:1 (2005), 1–10.

[8] А. Р. Алимов, “Выпуклость чебышёвских множеств, содержащихся в подпространстве”, *Матем. заметки*, **78**:1 (2005), 3–15.

[9] А. Р. Алимов, “Пересечения чебышёвских множеств с координатными подпространствами”, *Труды межд. научн. конф. “Совр. проблемы математики, механики и информатики”*, *посв.* 85-*летию проф. С. Б. Стечкина и* 75-*летию ТулГУ*, *Тула*, 22–26 сентября 2005, 30–31.

[10] А. Р. Алимов, “Геометрическое строение чебышёвских множеств в пространствах $\ell^\infty(n)$, c_0 и c”, *УМН*, **60**:3 (2005), 169–171.

[11] А. Р. Алимов, “Связность солнц в пространстве c_0”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **69**:4 (2005), 3–18.

[12] А. Р. Алимов, “Монотонная линейная связность чебышёвских множеств в пространстве $C(Q)$”, *Матем. сборник*, **197**:9 (2006), 3–18.

[13] А. Р. Алимов, “Сохранение аппроксимативных свойств подмножеств чебышевских множеств и солнц в $\ell^\infty(n)$”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **70**:5 (2006), 3–12.

[14] А. Р. Алимов, “Сохранение аппроксимативных свойств чебышёвских множеств и солнц на плоскости”, *Вестник Московского университета*, *сер. Математика. Механика*, 2008, № 4, 46–49.

[15] А Р. Алимов, “Монотонно связное чебышёвское множество является солнцем”, *Труды международной конференции, посвященной*

90-*летию С. Б. Стечкина, Москва*, 23–26 августа 2010, МГУ–МИАН, Москва, 2–3.

[16] А Р. Алимов, “Монотонно линейно связное чебышёвское множество является солнцем”, *Матем. заметки*, **91**:2 (2012), 305–307.

[17] А Р. Алимов, “Ограниченная строгая солнечность строгих солнц в пространстве $C(Q)$”, *Вестник Московского университета, сер. Математика. Механика*, **67**:6 (2012), 16–19.

[18] А. Р. Алимов, “Монотонная линейная связность и солнечность связных по Менгеру множеств в банаховых пространствах”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **78**:4 (2014), 3–19.

[19] А. Р. Алимов, “Теорема Рейнуотера–Симонса о слабой сходимости для ассоциированной нормы”, *Сборник тезисов* 17-*й международной Саратовской зимней школы “Современные проблемы теории функций и их приложения”, посвященной* 150-*летию со дня рождения В. А. Стеклова*, СГУ, Саратов, 2014, 19–21..

[20] А. Р. Алимов, “Выпуклость ограниченных чебышёвских множеств в конечномерных пространствах с несимметричной нормой”, *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика*, **14**:4 (2014), 489–497.

[21] П. С. Александров, *Введение в теорию множеств и общую топологию*, Наука, М., 1977.

[22] Р. А. Александрян, Э. А. Мирзаханян, *Общая топология*, Высшая школа, Москва, 1979.

[23] П. В. Альбрехт, “Порядки модулей непрерывности операторов почти наилучшего приближения”, *Матем. сб.*, **185**:9 (1994), 3–28.

[24] В. Ф. Бабенко, “Несимметричные приближения в пространствах суммируемых функций”, *Укр. матем. журн.*, **34**:4 (1982), 409–419.

[25] В. Ф. Бабенко, “Несимметричные приближения и неравенства для перестановок в экстремальных задачах теории приближения”, *Тр. МИАН СССР*, **180** (1987), 33–35.

[26] В. Ф. Бабенко, В. А. Кофанов, “Несимметричные приближения классов дифференцируемых функций алгебраическими многочленами в среднем”, *Anal. Math.*, **14**:3 (1988), 193–217.

[27] В. Ф. Бабенко, В. Ф. Ткаченко, “Вопросы единственности элемента наилучшего несимметричного L_1-приближения непрерывных функций со значениями в KB-пространствах”, *Укр. матем. ж.*, **60**:7 (2008), 867–878.

[28] В. С. Балаганский, Л. П. Власов, *Аппроксимативно-геометрические свойства множеств в банаховых пространствах*, Препринт. ИММ УрО РАН, Екатернинбург, 1990.

[29] В. С. Балаганский, Л. П. Власов, “Проблема выпуклости чебышёвских множеств”, *УМН*, **51**:6 (1996), 125–188.

[30] М. В. Балашов, “О модулях выпуклости функции и множества”, *Труды МФТИ*, **3**:1 (2011), 10–13.

[31] М. В. Балашов, “Условие Липшица для наиболее удаленной точки в гильбертовом пространстве”, *Труды МФТИ*, **4** (2012), 4–16 +.

[31] М. В. Балашов, Г. Е. Иванов, “Слабо выпуклые и проксимально гладкие множества в банаховых пространствах”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **73**:3 (2009), 23–66.

[32] В. И. Бердышев, “К вопросу о чебышёвских множествах”, *Докл. АзССР*, **22**:9 (1966), 3–5.

[33] В. И. Бердышев, “О модуле непрерывности оператора наилучшего приближения”, *Матем. заметки*, **15**:5 (1974), 797–808.

[34] В. И. Бердышев, “Пространства с равномерно непрерывной метрической проекцией”, *Матем. заметки*, **17**:1 (1975), 3–12.

[35] В. И. Бердышев, “Непрерывность многозначного отображения, связанного с задачей минимизации функционала”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **44**:3 (1980), 483–509.

[36] В. И. Бердышев, “Варьирование нормы в задаче о наилучшем приближении”, *Матем. заметки*, **29**:2 (1981), 181–196.

[37] В. Г. Болтянский, П. С. Солтан, *Комбинаторная геометрия различных классов выпуклых множеств*, Штиница, Кишинев, 1978.

[38] П. А. Бородин, “Квазиортогональные множества и условия гильбертовости банахова пространства”, *Матем. сб.*, **188**:8 (1997), 63–74.

[39] П. А. Бородин, “Теорема Банаха-Мазура для пространств с несимметричной нормой и ее приложения в выпуклом анализе”, *Матем. заметки*, **69**:3 (2001), 329–337.

[40] П. А. Бородин, “Выпуклость 2-чебышёвских множеств в гильбертовом пространстве”, *Вестник Московского университета, Сер. математика. механика*, 2008, № 3, 16–19.

[41] П. А. Бородин, “Приближение наипростейшими дробями на полуоси”, *Матем. сб.*, **200**:8 (2009), 25–44.

[42] П. А. Бородин, “О выпуклости n-чебышёвских множеств”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **75**:5 (2011), 19–46.

[43] П. А. Бородин, “О зеркальном свойстве метрической 2-проекции”, *Вестник Московского университета, сер. Математика. Механика*, 2011, № 2, 32–36.

[44] П. А. Бородин, “Приближение наипростейшими дробями с ограничением на полюсы”, *Матем. сб.*, **203**:11 (2012), 23–40.

[45] П. А. Бородин, “О 2-чебышевских подпространствах в пространствах L_1 и C”, *Матем. заметки*, **91**:6 (2012), 819–831.

[46] П. А. Бородин, *Избранные аппроксимативные свойства множеств в банаховых пространствах*, дисс. ... докт. физ.-матем. наук, МГУ, Москва, 2012.

[47] А. А. Васильева, “Замкнутые промежутки в $C(T)$ и $L_\varphi(T)$ и их аппроксимативные свойства в нормированных пространствах”, *Матем. заметки*, **73**:1 (2003), 135–138.

[48] А. А. Васильева, “Замкнутые промежутки в векторнозначных функциональных пространствах и их аппроксимативные свойства”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **68**:4., 75–116.

[49] А. А. Васильева, “Критерий существования гладкой функции при ограничениях”, *Матем. заметки*, **82**:3 (2007), 335–346.

[50] Л. П. Власов, “Аппроксимативные свойства множеств в линейных нормированных пространствах”, *УМН*, **28**:6 (1973), 3–66.

[51] А. Л. Гаркави, “Общие теоремы об очистке”, *Revue math. pures et appl.*, **6**:2 (1961), 293–303.

[52] А. Л. Гаркави, “О критерии элемента наилучшего приближения”, *Сибирск. матем. ж.*, **5**:2, 472–476.

[53] А. Л. Гаркави, “Теория наилучшего приближения в линейных нормированных пространствах”, *Итоги науки и техники* 1967, *Математический анализ*, ВИНИТИ, Москва, 1969, 83–150.

[54] А. Л. Гаркави, В. Н. Замятин, “Об условном чебышёвском центре ограниченного множества непрерывных функций”, *Матем. заметки*, **18**:1 (1975), 67–76.

[55] Е. П. Долженко, Е. А. Севастьянов, “Аппроксимации со знакочувствительным весом (теоремы существования и единственности)”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **62**:6 (1998), 59-102.

[56] Е. П. Долженко, Е. А. Севастьянов, “Аппроксимация со знакочувствительным весом (устойчивость, приложения к теории ужей и хаусдорфовым аппроксимациям”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **63**:3 (1999), 77–118.

[57] Н. В. Ефимов, С. Б. Стечкин, “Некоторые свойства чебышёвских множеств”, *ДАН СССР*, **118**:1 (1958), 17–19.

[58] Н. В. Ефимов, С. Б. Стечкин, “Аппроксимативная компактность и чебышёвские множества”, *Докл. АН СССР*, **140**:3 (1961), 522–524.

[59] И. Зингер, “О продолжении линейных функционалов”, *Rev. math. pures et appl.*, **1**:2 (1956), 115–123.

[60] В. К. Иванов , В. В. Васин , В. П. Танана, *Теория линйеных некорректных задач и ее приложения*, Наука, Москва, 1988.

[61] Г. Е. Иванов, *Слабо выпуклые множества и функции: теория и приложения*, Физматлит, Москва, 2006.

[62] Г. Е. Иванов, “Множества, слабо выпуклые по Виалю и по Ефимову–Стечкину”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **69**:6 (2005), 53–60.

[63] Г. Е. Иванов, “Наиболее удаленные точки и сильная выпуклость множеств”, *Матем. заметки*, **87**:3 (2010), 382–395.

[64] Г. Е. Иванов, М. С. Лопушански, “Аппроксимативные свойства слабо выпуклых множеств в пространствах с несимметричной полунормой”, *Труды МФТИ*, **4**:4 (2012), 94–104.

[65] Г. Е. Иванов, М. С. Лопушански, “О корректности задач аппроксимации и оптимизации для слабо выпуклых множеств и функций”, *Фунд. прикл. матем.*, **18**:5 (2013), 1–30.

[66] М. И. Карлов, И. Г. Царьков, “Выпуклость и связность чебышёвских множеств и солнц”, *Фундам. и прикл. матем.*, **3**:4 (1997), 967–978.

[67] М. А. Козачок, “Совершенные призмоиды и гипотеза о минимальном числе граней центрально-симметричных многогранников”, *Модел. и анализ информ. систем.*, **19**:6 (2012), 137–147.

[68] А. И. Козко, “Многомерные неравенства разных метрик в пространствах с несимметричной нормой”, *Матем. сб.*, **189**:9 (1998), 85–106.

[69] А. И. Козко, “Дробные производные и неравенства для тригонометрических полиномов в пространствах с несимметричной нормой”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **62**:6 (1998), 125–142.

[70] А. И. Козко, “О порядке наилучшего приближения в пространствах с несимметричной нормой и знакочувствительным весом на классах дифференцируемых функций”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **66**:1 (2002), 103–132.

[71] А. И. Козко, “Полнота ортогональных систем в пространствах со знакочуствительным весом”, *Современная математика и ее приложения. Том.* 24. *Динамические системы и оптимизация.*, Институт кибернетики Академии наук Грузии, Тбилиси, 2005, 135–147.

[72] Л. Коллатц, В. Крабс, *Теория приближений. Чебышевские приближения и их приложения*, Наука, Москва, 1978.

[73] С. В. Конягин, “Об аппроксимативных свойствах произвольных замкнутых множеств в банаховых пространствах”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **3**:4 (1997), 979–989.

[74] С. В. Конягин, “О непрерывности оператора обобщенного рационального приближения”, *Матем. заметки*, **44**:3 (1988), 404.

[75] В. А. Кощеев, “Связность и аппроксимативные свойства множеств в линейных нормированных пространствах”, *Матем. заметки*, **17**:2 (1975), 193–204.

[76] В. А. Кощеев, “Связность и солнечные свойства множеств в линейных нормированных пространствах”, *Матем. заметки*, **19**:2 (1976), 267–278.

[77] В. А. Кощеев, “Пример несвязного солнца в банаховом пространстве”, *Матем. заметки*, **26**:1 (1979), 89–92.

[78] М. Г. Крейн, “L-проблема в абстрактном линейном нормированном пространстве”: Н. И. Ахиезер, М. Г. Крейн, *О некоторых вопросах теории моментов*, ГОНТИ, Харьков, 1938, 171–199.

[79] М. Г. Крейн и А. А. Нудельман, *Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи*, Наука, Москва, 1973.

[80] К. Лейхтвейс, *Выпуклые множества*, Наука, М, 1987.

[81] Е. Д. Ливщиц, “Об устойчивости оператора ε-проекции на множество сплайнов в пространстве $C[0,1]$”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **67**:1 (2003), 99–130.

[82] Е. Д. Ливщиц, “О почти наилучшем приближении кусочно-полиномиальными функциями в пространстве $C[0,1]$”, *Матем. заметки*, **78**:4 (2005), 629–634.

[83] Ю. В. Малыхин, “Условие выпуклости в теоремах Кукера–Смейла в теории обучения”, *Матем. заметки*, **84**:1 (2008), 144–148.

[84] А. В. Маринов, “Оценки устойчивости непрерывной селекции для метрической почти-проекции”, *Матем. заметки*, **55**:4 (1994), 47–53.

[85] А. В. Маринов, “Константы Липшица оператора метрического ε-проектирования в пространствах с заданными модулями выпуклости и гладкости”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **62**:2 (1998), 103–130.

[86] С. А. Мелихов, “Стинродовские гомотопии”, *УМН*, **64**:3(387) (2009), 73–166.

[87] Е. В. Ошман, “Чебышевские множества и непрерывность метрической проекции”, *Изв. ВУЗов. Матем.*, 1970, № 9(100), 78–82.

[88] А. В. Покровский, “О наилучшем несимметричном приближении в пространствах непрерывных функций”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **70**:4 (2006), 175–208.

[89] Р. Рокафеллар, *Выпуклый анализ*, Мир, Москва, 1973.

[90] К. С. Рютин, “О равномерно непрерывных операторах почти наилучшего обобщенного рационального приближения”, *Матем. заметки*, **87**:1 (2010), 141–145.

[91] И. Э. Симонова, Б. В. Симонов, “О полиноме наилучшего несимметричного приближения в пространстве Орлича”, *Изв. ВУЗов. Матем.*, 1993, № 11, 50–56.

[92] Б. В. Симонов, “Об элементе наилучшего несимметричного приближения в пространствах с несимметричной квазинормой”, *Матем. заметки*, **74**:6 (2003), 902–912.

[93] Б. В. Симонов, “Несимметричные приближения функций многих переменных в функциональных пространствах”, *Изв. ВУЗов. Математика*, 2005, № 8(519), 49–56.

[94] В. Н. Соловьев, “О субдифференциале и производных по направлениям максимума семейства выпуклых функций”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **62**:4 (1998), 173–200.

[95] В. М. Тихомиров, “Теория приближений”, *Анализ – 2*, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, **14**, ВИНИТИ, М., 1987, 103–260.

[96] В.М. Тихомиров Г. Г. Магарил-Ильяев, *Выпуклый анализ и его приложения*, Книжный дом “Либроком”, Москва, 2011.

[97] В. П. Фонф, “Слабо экстремальные свойства банаховых пространств”, *Матем. заметки*, **45**:6 (1989), 83–92.

[98] А. В. Фурсиков, “Свойства решений некоторых экстремальных задач, связанных с системой Навье–Стокса”, *Матем. сб.*, **118**:3 (1982), 323–349.

[99] А. В. Фурсиков, “Некоторые вопросы теории оптимального управления нелинейными системами с распределенными параметрами”, *Труды семинара им. И. Г. Петровского*, 1983, № 9., 167–189.

[100] А. В. Фурсиков, *Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения*, Научная книга, Новосибирск, 1999.

[101] С. Я. Хавинсон, “Аппроксимативные свойства некоторых множеств в пространствах непрерывных функций”, *Analysis Math.*, **29** (2003), 87–105.

[102] И. Г. Царьков, “Ограниченные чебышёвские множества в конечномерных банаховых пространствах”, *Матем. заметки*, **36**:1 (1984), 73–87.

[103] И. Г. Царьков, “О связности некоторых классов множеств в банаховых пространствах”, *Матем. заметки*, **40**:2 (1986), 174–196.

[104] И. Г. Царьков, “Компактные и слабо компактные чебышёвские множества в линейных нормированных пространствах”, *Тр. МИАН СССР*, **189** (1989), 169–184.

[105] И. Г. Царьков, “Неединственность решений некоторых дифференциальных уравнений и их связь с геометрической теорией приближения”, *Матем. заметки*,, **75**:2 (2004), 287–301.

[106] И. Г. Царьков, “Устойчивость однозначной разрешимости для вполне нелинейных эллиптических уравнений двух переменных”, *Тр. ИММ УрО РАН*, 2008, № 3, 170–182.

[107] И. Г. Царьков, “Аппроксимативная компактность и неединственность в вариационных задачах и их приложения к дифференциальным уравнениям”, *Матем. сб.*, **202**:6 (2011), 133–158.

[108] И. Г. Царьков, “Устойчивость однозначной разрешимости квазилинейных уравнений по дополнительной информации”, *Матем. заметки*, **90**:6 (2011), 918–946.

[109] И. Г. Царьков, “Множества, обладающие непрерывной выборкой из оператора почти наилучшего приближения”, *Современные проблемы математики и механики*, К 80-летию механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова, Издательство Московского университета, 2014, 54–58.

[110] К. В. Чеснокова, “Коэффициент линейности метрической проекции для одномерных чебышевских подпространств в пространстве C”, *Матем. заметки*, **96**:4 (2014), 588–595.

[111] Р. Энгелькинг, *Общая топология*, Мир, Москва, 1986.

[112] М. В. Яшина, “О плотности множества некоторых экстремальных задач”, *Вестн. Моск. ун-та. Математика, механика*, 1986, № 6, 54–56.

[113] М. В. Яшина, *О единственности решения нелинейных задач управления системами с распределенными параметрами*, Дисс. канд. физ.-матем. наук., М.: МГУ, 1989.

[114] S. S. Ajiev, “Hölder analysis and geometry on Banach spaces: homogeneous homeomorphisms and commutative group structures, approximation and Tzar'kov's phenomenon. Part I”, *Eurasian Math. J.*, **5**:1 (2014), 7–60.

[115] S. S. Ajiev, “Hölder analysis and geometry on Banach spaces: homogeneous homeomorphisms and commutative group structures, approximation and Tzar'kov's phenomenon. Part II”, *Eurasian Math. J.*, **5**:2 (2014), 7–51.

[116] C. Alegre, I. Ferrando, “Quotient subspaces of asymmetric normed linear spaces”, *Bol. Soc. Mat. Mexicana* (3), **13**:2 (2007), 357–365.

[117] C. Alegre, I. Ferrando, L. M. García Raffi, E. A. Sánchez Pérez, “Compactness in asymmetric normed spaces”, *Topology Appl.*, **155** (2008), 527–539.

[118] C. Alegre, “Continuous operators on asymmetric normed spaces”, *Acta Math. Hungar.*, **122**:4 (2009), 357–372.

[119] A. R. Alimov, “A number of connected components of sun's complement”, *East J. Approx.*, **1**:4 (1995), 419–429.

[120] A. R. Alimov, “Chebyshev set's complement”, *East. J. Appr.*, **2**:2 (1996), 215–232.

[121] A. R. Alimov, “Solstice property for a system of 2-spaces”, *East J. Approx.*, **4**:1 (1998), 25–34.

[122] A. R. Alimov, “The number of connected components of Chebyshev sets and suns complement”, *Proc. A. Razmadze Math. Inst.*, **117** (1998), 135–136.

[123] A. R. Alimov, “Characterisations of Chebyshev sets in c_0”, *J. Approx. Theory*, **129** (2004), 217–229.

[124] A. R. Alimov, “Monotone path-connectedness of R-weakly convex sets in the space $C(Q)$”, *J. Math. Sci.*, **185**:3 (2012), 360–366.

[125] A. R. Alimov, “Monotone path-connectedness of R-weakly convex sets in spaces with linear ball embedding”, *Eurasian Math. J.*, **3**:2 (2012), 21–30.

[126] A. R. Alimov, "Local solarity of suns in normed linear spaces", *J. Math. Sci.*, **197**:4 (2014), 447–454.

[127] A. R. Alimov, "The Rainwater–Simons weak convergence theorem for the Brown associated norm", *Eurasian Math. J.*, **5**:2 (2014), 126–131.

[128] D. Amir, F. Deutsch, "Suns, moons and quasi-polyhedra", *J. Approx. Theory*, **6** (1972), 176–201.

[129] J. Andres, G. Gabor, L. Górniewicz, "Acyclicity of solution sets to functional inclusions", *Nonlinear Analysis*, **49** (2002), 671–688.

[130] E. Asplund, "Sets with unique farthest points", *Isr. Math. J.*, **5** (1967), 201–209.

[131] A. Avilés, G. Plebanek, J. Rodríguez, "A weak* separable $C(K)^*$ space whose unit ball is not weak* separable", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **366** (2014), 4733–4753.

[132] M. V. Balashov, D. Repovš, "Uniform convexity and the splitting problem for selections", *J. Math. Anal. Appl.*, **360**:1 (2009), 307–316.

[133] M. V. Balashov, M. O. Golubev, "About the Lipschitz property of the metric projection in the Hilbert space", *J. Math. Anal. Appl.*, **394**:2 (2012), 545–551.

[134] M. V. Balashov, M. O. Golubev, "Weak concavity of the antidistance function", *J. Convex Anal.*, **21**:4 (2014), 951–964.

[135] Y. Benyamini, J. Lindenstrauss, *Geometric Nonlinear Functional Analysis*, **1**, AMS, 2000.

[136] H. Berens, L. Hetzelt, Suns and contractive retracts in the plane, *Теория приближений функций* (*Тр. Междунар. конф.*, *Киев*, 31 *мая* – 5 *июня*, 1983), ред. Н. П. Корнейчук и др., Наука, М, 1983, 483–487.

[137] H. Berens, L. Hetzelt, "Die metrische Struktur der Sonnen in $\ell^\infty(n)$", *Aequat. Math.*, **27** (1984), 274–287.

[138] H. Berens, L. Hetzelt, "On accretive operators on ℓ_n^∞", *Pacific. J. Math.*, **125**:2 1986, 301–315.

[139] F. Bernard, L. Thibault, "Prox-regularity of functions and sets in Banach spaces", *Set-Valued Analysis*, **12** (2004), 25–47.

[140] K. Bezdek, T. Bisztriczky, and K. Böröczky, "Edge-antipodal 3-Polytopes", *Combinatorial and Computational Geometry*, **52**, ред. J. E. Goodman et al., Mathematical Sciences Research Institute Publications, 2005, 129–134.

[141] T. Bisztriczky and K. Böröczky, "On edge-antipodal d-polytopes", *Period. Math. Hungar.*, **57**:2 (2008), 131–141.

[142] V. Boltyanski, H. Martini, P. S. Soltan, *Excursions into combinatorial geometry*, Springer, Berlin, 1997.

[143] K. Böröczky, Jr., *Finite packing and covering*, Cambridge University Press.

[144] D. Braess, "Geometrical characterizations for nonlinear uniform approximation", *J. Approx. Theory*, **11** (1974), 260–274.

[145] D. Braess, *Nonlinear approximation theory*, Springer, Berlin, 1986.

[146] A. Brøndsted, "Convex sets and Chebyshev sets, I", *Math. Scand.*, **17** (1965), 5–16.

[147] A. Brøndsted, "Convex sets and Chebyshev sets, II", *Math. Scand.*, **18** (1966), 5–15.

[148] B. Brosowski,, *Nicht-lineare Tschebyscheff-Approximation*, Bd. 808/808a, Bibliographisches Institut, Mannheim, 1968.

[149] B. Brosowski, "Nichtlineare Approximation in normierten Vektorräumen", *Abstract Spaces and Approximation*, *ISNM* 10, Birkhäuser, 1969, 140–159.

[150] B. Brosowski, R. Wegmann, "Charakterisierung bester Approximationen in normierten Vektorräumen", *J. Approx. Theory*, **3**:4 (1970), 369–397.

[151] B. Brosowski, R. Weber, *Zum Begriff der Regularität in normierten Vektorräumen*, MPI-P AE/Astro 10/68, Max Planck Institut für Physik und Astrophysik, München, 1969.

[152] B. Brosowski, F. Deutsch, J. Lambert, P. D. Morris, "Chebyshev sets which are not suns", *Math. Ann.*, **212**:1 (1974), 89–101.

[153] B. Brosowski, F. Deutsch, "Radial continuity of set-valued metric projection", *J. Aprox. Theory*, **11** (1974), 236–253.

[154] A. L. Brown, "Chebyshev sets and facial systems of convex sets in finite-dimensional spaces", *Proc. Lond. Math. Soc.* (3), **41** (1980), 297–339.

[155] A. L. Brown, "Chebyshev sets and the shapes of convex bodies,", *Methods of Functional Analysis in Approximation Theory* (Proc. Int. Conf., Indian Inst. Techn. Bombay, 16–20.XII.1985.), ред. C. A. Micchelli, Birkhäuser, Basel, 1986, 97–121.

[156] A. L. Brown, "Suns in normed linear spaces which are finite-dimensional", *Math. Ann.*, **279** (1987), 87–101.

[157] A. L. Brown, “On the connectedness properties of suns in finite dimensional spaces”, *Proc. Cent. Math. Anal. Austral. Natl. Univ.*, **20** (1988), 1–15.

[158] A. L. Brown, “On the problem of characterising suns in finite dimensional spaces”, *Rend. Circ. Math. Palermo Ser. II*, **68**, 315–328.

[159] A. L. Brown, “Suns in polyhedral spaces”, *Seminar of Mathem. Analysis*, *Proceedings* (Univ. Malaga and Seville (Spain), Sept. 2002 – Feb. 2003), ред. D. G. Álvarez, G. Lopez Acedo and R. V. Caro, Universidad de Sevilla, Sevilla, 2003, 139–146.

[160] L. N. H. Bunt, *Bijdrage tot de theorie der convexe puntverzamelingen*, Thesis. Univ. Groningen, Amsterdam, 1934.

[161] E. W. Cheney, *Multivariate approximation theory*: *Selected topics*, SIAM, Philadelphia, 1986.

[162] L. Chong, G. A. Watson, “Characterization of a best and a unique best approximation from constrained rationals”, *Comput. Math. Appl.*, **30** (1995), 51–57.

[163] G. Choquet, “Sur la meilleure approximation dans les espaces vectoriels normés.”, *Rev. math*, *pures et appl.*, **8**:4 (1963), 541–542.

[164] S. Cobzaş, “Compact operators on spaces with asymmetric norm, Stud. Univ. Babeş–Bolyai Math.”, **51**:4 (2006), 69–87.

[165] S. Cobzaş, “Compact and precompact sets in asymmetric locally convex spaces”, *Topology Appl.*, **156**:9 (2009), 1620–1629.

[166] S. Cobzaş, C. Mustăţa, “Extension of bounded linear functionals and best approximation in spaces with asymmetric norm”, *Rev. Anal. Numér. Théor. Approx.*, **33**:1 (2004), 39–50.

[167] S. Cobzaş, “Best approximation in spaces with asymmetric norm”, *Rev. Anal. Numér Théor. Approx.*, **35**:1 (2006), 17–31.

[168] S. Cobzaş, “Functional analysis in asymmetric normed spaces”, *arXiv*.1006.1175*v* [*math FA*], 2010.

[169] S. Cobzaş, *Functional analysis in asymmetric normed spaces*, Birkhäuser, Basel, 2012.

[170] B. Csikós, “Edge-antipodal polytopes—a proof of the Talata conjecture.”, *Discrete Geometry*, ред. A. Bezdek, Marcell Deccer, New York, Basel, 2003, 201–205.

[171] E. N. Dancer, B. Sims, “Weak star separability”, *Bull. Austral. Math. Soc.*, **20** (1979), 253–257.

[172] L. Danzer, B. Grünbaum, "Über zwei Probleme bezüglich konvexer Körper von P. Erdős und von V. L. Klee", *Math. Z.*, **79** (1962), 95–99.

[173] F. Deutsch, J. M. Lambert, "On continuity of metric projections", *J. Approx. Theory*, **29**:2 (1980), 116–131.

[174] F. Deutsch, "The convexity of Chebyshev sets in Hilbert space", *Topics in Polynomials of One and Several Variables and their Applications*, World Scientific, River Edge, 1993, 143–150.

[175] F. Deutsch, *Best approximation in inner product spaces*, Springer, New York, 2001.

[176] M.-M. Deza, E. Deza, *Encyclopedia of distances*, Springer, Berlin, 2009.

[177] R. Dragoni, J. W. Macki, P. Nistri, and P. Zecca, *Solution sets of differential equations in abstract spaces*, Harlow, Longman, 1996.

[178] J. Dugundji, *Topology*, Allyn and Bacon, Boston, MA, 1966.

[179] Ch. Dunham, "Characterizability and uniqueness in real Chebyshev approximation", *J. Approx. Theory*, **2** (1969), 374–383.

[180] Ch. B. Dunham, "Chebyshev sets in $C[0,1]$ which are not suns", *Canad. Math. Bull.*, **18** (1975), 35–37.

[181] K. Eda, U. H. Karimov, D. Repovš, "On (co)homology locally connected spaces", *Topol. Appl.*, **120** (2002), 397–401.

[182] M. Fabian, P. Habala, P. Hájek , V. Montesinos, V. Zizler, *Banach space theory. The basis for linear and nonlinear analysis*, Springer, New York, 2011.

[183] F. Faraci, A. Iannizzotto, "An extension of a multiplicity theorem by Ricceri with an application to a class of quasilinear equations", *Studia Math.*, **172** (2006), 275–287.

[184] F. Faraci, A. Iannizzotto, "Well posed optimization problems and nonconvex Chebyshev sets in Hilbert spaces", *SIAM J. Optim.*, **19**:1 (2008), 211–216.

[185] R. C. Flagg, R. D. Kopperman, "The asymmetric topology of Computer Science", *Mathematical Foundations of Programming Semantics*, Springer, 1993, 544–553.

[186] J. Fletcher, *The Chebyshev set problem*, Master of Science Thesis, The University of Auckland, 2013.

[187] C. Franchetti, E. W. Cheney, "The embedding of proximinal sets", *J. Approx. Theory*, **48**:2 (1986), 213–225.

[188] C. Franchetti, S. Roversi, “Suns, M-connected sets and P-acyclic sets in Banach spaces”, *Preprint no*. 50139, Instituto di Matematica Applicata “G. Sansone”, 1988, 1–29.
[189] G. Gabor, “On the acyclicity of fixed point sets of multivalued maps”, *J. Juliusz Schauder Center*, **14** (1999), 327–343.
[190] L. M. García Raffi, *Asymmetric norms and the dual complexity spaces*, Memor. pres. para optar al Grado de Doctor en Cien. Matem., Valencia, 2003.
[191] L. M. García-Raffi, S. Romaguera, E. A. Sánchez-Pérez, “The bicompletion of an asymmetric normed linear space”, *Acta Math. Hungar*., **97**:3 (2002), 183–191.
[192] L. M. García Raffi, S. Romaguera, E. A. Sánchez Pérez, “Sequence spaces and asymmetric norms in the theory of computational complexity”, *Math. Comput. Modelling*, **36**:1–2 (2002), 1–11.
[193] L. M. García Raffi, S. Romaguera, E. A. Sánchez Pérez, “Weak topologies on asymmetric normed linear spaces and non-asymptotic criteria in the theory of complexity analysis of algorithms”, *J. Anal. Appl*., **2**:3 (2004), 125–138.
[194] L. M. García Raffi, E. A. Sánchez Pérez, “Asymmetric norms and optimal distance points in linear spaces”, *Topol. Appl*., **155**:13 (2008), 1410–1419.
[195] J. R. Giles, D. A. Gregory and B. Sims, “Characterisation of normed linear spaces with Mazur’s intersection property”, *Bull. Austral. Math. Soc*., **18** (1978), 105–123.
[196] J. R. Giles, “The Mazur intersection problem”, *J. Convex Anal*., **13**:3–4 (2006), 739–750.
[197] K. Goebel, W. A. Kirk, *Topics in metric fixed point theory*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990.
[198] L. Górniewicz, *Topological fixed point theory of multivalued mappings*, Springer, 2006.
[199] L. Górniewicz, “Topological structure of solution sets: current results”, *Arch. Math*. (*Brno*), **36** (2000), 343–382.
[200] A. S. Granero, M. Jiménez-Sevilla, J. P. Moreno, “Intersections of closed balls and geometry of Banach spaces”, *Extracta Math*., **19**:1 (2004), 55–92.
[201] A. S. Granero, J. P. Moreno, R. R. Phelps, “Mazur sets in normed spaces”, *Discrete Comput Geom*., **31** (2004), 411–420.

[202] P. M. Gruber, "Planar Chebyshev sets", *Mathem. Structure–Computational Math.–Math. Modelling. Vol.* 2, Sofia, Bulgar. Acad. Sci., 1984, 184–191.

[203] P. M. Gruber, "Fixpunktmengen von Kontraktionen in endlichdimensionalen Raumen", *Geom. Dedicata*, 1975, № 4, 173–198.

[204] K. P. Hart, J. Nagata, J. E. Vaughan, *Encyclopedia of general topology*, Elsevier, Amsterdam, 2004.

[205] A. B. Hansen and Å. Lima, "The structure of finite dimensional Banach spaces with the 3.2. intersection property", *Acta Math.*, **146** (1981), 1–23.

[206] L. Hetzelt, "On suns and cosuns in finite dimensional normed real vector spaces", *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **45**:1–2 (1985), 53–68.

[207] J.-B. Hiriart-Urruty, "Ensembles de Tchebychev vs. ensembles convexes: l'état de la situation vu via l'analyse convexe non lisse", *Ann. Sci. Math. Qué.*, **22**:1 (1998), 47–62.

[208] Sh. Hu, N. S. Papageorgiou, *Handbook of multivalued analysis Vol. II: Applications*, Kluwer, Dordrecht, 2000.

[209] Sze-Tsen Hu, *Theory of retracts*, Wayne State University Press, Detroit, 1965.

[210] G. E. Ivanov, "On well posed best approximation problems for a nonsymmetric seminorm", *J. Conv. Anal.*, **20**:2 (2013), 501–529.

[211] A. Jourani, L. Thibault, D. Zagrodny, "Differential properties of the Moreau envelope", *J. Funct. Anal.*, **266** (2014), 1185–1237.

[212] H. Haghshenas H., A. Assadi, T. D. Narang, "A look at proximinal and Chebyshev sets in Banach spaces", *Le Matematiche*, **LXIX**, Fasc. I (2014), 71–87.

[213] G. G. Johnson, "Chebyshev foam", *Topology Appl.*, **74** (1999), 163–171.

[214] G. G. Johnson, "Closure in a Hilbert space of a preHilbert space Chebyshev set", *Topology Appl.*, **153**, 239–244.

[215] O. Kalenda, "(I)-envelopes of closed convex sets in Banach spaces", *Israel J. Math.*, **162**:1 (2007), 157–181.

[216] W. Kirkland, W. K. Khamsi, W. Kirk, "An introduction to metric spaces and fixed point theory", 2001.

[217] V. Klee, "Dispersed Chebyshev sets and covering by balls", *Math. Ann.*, **257**:2 (1981), 251–260.

[218] V. Klee, "Do infinite-dimensional Banach spaces admit nice tiling?", *Stud. Sci. Math. Hungar.*, **21** (1986), 415–427.

[219] M. Kleiber, W. J. Pervin, “A generalized Banach–Mazur theorem”, *Bull. Austral. Math. Soc.*, **1** (1969), 169–173.

[220] H. König, “Sublineare Funktionale”, *Arch. Math.* (*Basel*), **23** (1972), 500–508.

[221] H. König, “On some basic theorems in convex analysis”, *Modern applied mathematics* (*Bonn*, 1979), North-Holland, Amsterdam, 1982, 107–144.

[222] H. König, “Sublinear functionals and conical measures”, *Arch. Math.* (*Basel*), **77**:1 (2001), 56–64.

[223] H. König, “A general minimax theorem based on connectedness”, *Arch. Math.* (*Basel*), **59** (1992), 55–64.

[224] V. A. Koshcheev, “On the structure of suns in Banach spaces”, *Approximation of functions*, ред. Cisielski, North–Holland, Gdańsk, 1979, 371–376.

[225] W. Kryszewski, “On the existence of equilibria and fixed points of maps under constraints”, *Handbook of topological fixed point theory*, ред. R. F. Brown, M. Furi et al., Springer, 2005.

[226] H. P.-A. Künzi, “Nonsymmetric distances and their associated topologies: about the origin of basic ideas in the area of asymmetric topology”, *Handbook of the History of General Topology*, ред. C.E. Aull and R. Lowen, Kluwer, Dordrecht, 2001, 853–868.

[227] H.-P. A Künzi, “Nonsymmetric topology, Topology with applications”, *Proceedings of the* 7 *th colloquium Szekszcrd*, *Hungary*, *August* 23–27, 1993, *Budapest*, *Janoš Bolyai Mathematical Society*, 1993, *Bolyai Soc. Math. Stud. V.* 4, 1995, *P.* 303–338.

[228] W. Li, D. Zou, D. Li and Zh. Zhang, “Best approximation in asymmetric normed linear spaces”, Int. Conf. Information Science Technol. (March 26–28, 2011 Nanjing, Jiangsu, China), 398–401.

[229] Å. Lima, “Intersection properties of balls and subspaces in Banach spaces”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **227** (1977), 1–62.

[230] Å. Lima, “Banach spaces with the 4.3 intersection property”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **80** (1980), 431–434.

[231] H. J. Maehly, Ch. Witzgall, “Tschebyscheff–Approximation in kleinen Intervallen. II. Stetigkeitssätze für gebrochen rationale Approximationen”, *Numer. Math.*, **2** (1960), 293–307.

[232] H. Martini, K. J. Swanepoel, P. O. de Wet, “Absorbing angles, Steiner minimal trees, and antipodality”, *J. Optim. Theory Appl.*, **143** (2009), 149–157.

[233] W. S. Massey, *Homology and cohomology theory*, Marcel Dekker, New York, 1978.

[234] G. Mayor, O. Valero, “Aggregation of asymmetric distances in Computer Science”, *Information Sciences*, **180**:6 (2010), 803–812.

[235] R. E. Megginson, *An introduction to Banach space theory*, Springer, New York, 1998.

[236] K. Menger, “Untersuchungen über allgemeine Metrik”, *Math. Ann.*, **100** (1928), 75–163.

[237] J. P. Moreno, R. Schneider, “Continuity properties of the ball hull mapping”, *Nonlinear Anal.*, **66** (2007), 914–925.

[238] J. P. Moreno, R. Schneider, “Intersection properties of polyhedral norms”, *Adv. Geom*, **7**:3 (2007), 391–402.

[239] T. J. Morrison, *Functional analysys. An introduction to Banach space theory*, Wiley, New York, 2001.

[240] T. S. Motzkin, “Sur quelques propriétés caractéristiques des ensembles convexes”, *Rend. Ac. Lincei*, *Cl. VI*, **21** (1935), 562–567.

[241] O. Nygaard, “A remark on Rainwater’s theorem”, *Annales Math. Inform.*, **32** (2005), 125–127.

[242] O. Nygaard, “Thick sets in Banach spaces and their properties”, *Quaest. Math.*, **29**:1 (2006), 59–72.

[243] R. R. Phelps, “A representation theorem for bounded convex sets”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **11** (1960), 976–983.

[244] Trans. Amer. Math. Soc., **348** (1996), 1805–1838.

[245] W. Pollul, *Topologien auf Mengen von Teilmengen und Stetigkeit von mengenwertigen metrischen Projektionen*, Diplomarbeit, Bonn, 1967.

[246] D. Repovš, P. V. Semenov, *Continuous selections of multivalued mappings*, Kluwer, Dordrecht, 1998.

[247] D. Repovš, P. V. Semenov, “Continuous selections of multivalued mappings”, *Recent Progress in General Topology III*, ред. K. P. Hart, Jan van Mill, P Simonar, Atlantis Press, 2014, 711–750.

[248] B. Ricceri, “3255–3261”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **133** (2005).

[249] B. Ricceri, “Recent advances in minimax theory and applications”, *Pareto Optimality*, *Game Theory and Equilibria*, ред. A. Chinchuluun et al, Springer, 2008, 23-52.

[250] B. Ricceri, “A conjecture implying the existence of non-convex Chebyshev sets in infinite-dimensional Hilbert spaces”, *Matematiche* (*Catania*), **65**:2 (2010), 193–199.

[251] S. Romaguera and M. Schellekens, "Duality and quasi-normability for complexity spaces", *Appl. Gen. Topol.*, **3**:1 (2002), 91–112.

[252] S. Romaguera, O. Valero, "On the structure of the space of complexity partial functions", *Intern. J. Computer Math.*, 2008, № 3–4, 631–640.

[253] A. Schürmann and K. Swanepoel, "Three-dimensional antipodal sets and norm-equilateral sets", *Pacific J. Math.*, **228**:2 (2006), 349–370.

[254] P. Shvartsman, "Lipschitz selections of set-valued mappings and Helly's theorem", *J. Geom. Anal.*, **12**:2 (2002), 289–324.

[255] S. Simons, "A convergence theorem with boundary", *Pac. J. Math.*, **40** (1972), 703–708.

[256] I. Singer, *The theory of best approximation and functional analysis*, SIAM, Philadelphia, 1974.

[257] I. Singer, "On the extension of continuous linear functionals and best approximation in normed linear spaces", *Math. Ann.*, **159**:5 (1965), 344–355.

[258] K. Swanepoel, "Upper bounds for edge-antipodal and subequilateral polytopes", *Period. Math. Hungar.*, **54**:1 (2007), 99–106.

[259] W. Sierpinski, *General topology*, University of Toronto Press, Toronto, 1952.

[260] I. Talata, "On extensive subsets of convex bodies", *Period. Math. Hungar.*, **38** (1999), 231–246.

[261] P. Terán, "Intersections of balls and the ball hull mapping", *J. Convex Anal.*, **17**:1 (2010), 277–292.

[262] J.-Ph. Vial, "Strong and weak convexity of sets and functions", *Math. Oper. Res.*, **8**:2 (1983), 231–259.

[263] A. Werner, *Linear constraints on face numbers of polytopes*, Doktor der Naturwissenschaften Dissertation, Technischen Universität Berlin, 2009.

[264] D. E. Wulbert, "Continuity of metric projections. Approximation theory in a normed linear lattice", *Thesis*, Univ. Texas. Austin, 1966.

[265] D. E. Wulbert, "Continuity of metric projections", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **134**:2 (1968), 335–341.

[266] L. Zajíček, "On σ-porous sets in abstract spaces", *Abstract Applied Analysis*, 2005, № 5, 509–534.

[267] E. Zeidler, *Nonlinear functional analysis and its applications*, *Vol. III*, Springer, 1985.

Основное содержание диссертации опубликовано в следующих работах автора:

1. А. Р. Алимов, Монотонная линейная связность чебышёвских множеств в пространстве $C(Q)$ // Матем. сборник. 2006. Т. 197. № 9. С. 3–18.

2. А. Р. Алимов, Монотонная линейная связность и солнечность связных по Менгеру множеств в банаховых пространствах // Изв. РАН. Сер. матем. 2014. Т. 78. № 4. 3–19.

3. А. Р. Алимов, Связность солнц в пространстве c_0 // Изв. РАН. Сер. матем. 2005. Т. 69. № 4. С. 3–18.

4. A. R. Alimov, Characterisations of Chebyshev sets in c_0 // J. Approx. Theory. 2004. Vol. 129. P. 217–229.

5. А. Р. Алимов, Сохранение аппроксимативных свойств подмножеств чебышевских множеств и солнц в $\ell^\infty(n)$ // Изв. РАН. Сер. матем. 2006. Т. 70 . № 5. С. 3–12.

6. А. Р. Алимов, О структуре дополнения к чебышёвским множествам // Функц. анализ и его прил. 2001. Т. 35. № 3. С. 19–27.

7. А. Р. Алимов, Геометрическое строение чебышёвских множеств в $\ell^\infty(n)$ // Функц. анализ и его прил. 2005. Т. 39. № 1. С. 1–10.

8. А Р. Алимов, Монотонно линейно связное чебышёвское множество является солнцем // Матем. заметки. 2012. Т. 91. № 2. С. 305–307.

9. А. Р. Алимов, Выпуклость чебышёвских множеств, содержащихся в подпространстве // Матем. заметки. 2005. Т. 78. № 1. С. 3–15.

10. А. Р. Алимов, Геометрическая характеризация строгих солнц в $\ell^\infty(n)$ // Матем. заметки 2001. Т. 70. № 1. С. 3–11.

11. А. Р. Алимов, Сохранение аппроксимативных свойств чебышёвских множеств и солнц на плоскости // Вестник Московского университета, сер. Математика. Механика. 2008. № 4. С. 46–49.

12. А Р. Алимов, Ограниченная строгая солнечность строгих солнц в пространстве $C(Q)$ // Вестник Московского университета, сер. Математика. Механика. 2012. № 6. Т. 67. С. 16–19.

13. А Р. Алимов, Монотонная линейная связность R-слабо выпуклых множеств в пространстве $C(Q)$ // Фундамент. и прикл. матем. 2012. Т. 17. № 1. С. 23–32.

14. A. R. Alimov, Monotone path-connectedness of R-weakly convex sets in the space $C(Q)$ // J. Math. Sci. 2012. Vol. 185, no. 3, P. 360–366 (перевод работы № 14).

15. A. R. Alimov, Monotone path-connectedness of R-weakly convex sets in spaces with linear ball embedding // Eurasian Math. J. 2012. № 3–2. P. 21–30.

16. A. R. Alimov, The Rainwater–Simons weak convergence theorem for the Brown associated norm // Eurasian Math. J. 2014. № 5 (2). P. 126–131.

17. А. Р. Алимов, Локальная солнечность солнц в линейных нормированных пространствах // Фундамент. и прикл. матем. 2012. Т. 17. № 7. С. 3–14.

18. A. R. Alimov, Local solarity of suns in normed linear spaces // J. Math. Sci. 2014. Vol. 197, no. 4, P. 447–454 (перевод работы № 17).

19. А. Р. Алимов, Теорема Банаха–Мазура для пространств с несимметричным расстоянием // УМН. 2003. Т. 58. № 2. С. 159–160.

20. А. Р. Алимов, Геометрическое строение чебышёвских множеств в пространствах $\ell^\infty(n)$, c_0 и c // УМН. 2005. Т. 60, № 3, 169–171.

21. А. Р. Алимов, Выпуклость ограниченных чебышёвских множеств в конечномерных пространствах с несимметричной нормой // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2014. Т. 14, № 4, 489–497.

22. A. R. Alimov, Solstice property for a system of 2-spaces // *East J. Approx.* 1998. Vol. 4, no 1. P. 25–34.

23. A. R. Alimov, The number of connected components of Chebyshev sets and suns complement // Proc. A. Razmadze Math. Inst. 1998. Vol. 117. P. 135–136.