Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 517.988

ВОЛКОВ БОРИС ОЛЕГОВИЧ

ЛАПЛАСИАНЫ ЛЕВИ И СВЯЗАННЫЕ С НИМИ КОНСТРУКЦИИ

Специальность 01.01.01 — Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертация
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор
Смолянов Олег Георгиевич

Москва — 2014

Оглавление

Введение

В диссертации рассматривается связь операторов Лапласа-Леви (лапласианов Леви) различных типов с уравнениями Янга-Миллса и с квантовыми случайными процессами.

Для функционалов, определенных на $L_2(0,1)$, Полем Леви были сформулированы несколько определений оператора Лапласа-Леви (см. например [35]). Одно из определений состоит в следующем. Пусть $\{e_n\}$ — ортонормированный базис $\{e_n\}$ в $L_2(0,1)$ и F — функция на $L_2(0,1)$; тогда значение лапласиана Леви Δ_L на F определяется равенством

$$\Delta_L F(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \langle F''(x)e_k, e_k\rangle,$$

(т.е. значение лапласиана Леви на функции F — это среднее Чезаро вторых производных этой функции по направлениям векторов из $\{e_n\}$.) Конечно, значение $\Delta_L F$ зависит от выбора ортонормированного базиса, но для некоторых базисов такое определение эквивалентно другому определению оператора Лапласа-Леви, которое заключается в следующем. Если для всех $x, f_1, f_2 \in L_2(0,1)$ выполняется соотношение

$$\langle F''(x)f_1, f_2\rangle = \int\limits_0^1\int\limits_0^1 K_V(x)(t_1,t_2)f_1(t_1)f_2(t_2)dt_1dt_2 + \int\limits_0^1 K_L(x)(t)f_1(t)f_2(t)dt,$$

где $K_V(x) \in L_2([0,1]\times[0,1])$ и $K_L(x) \in L_\infty([0,1])$, то значение лапласиана Леви на функции F определяется равенством

$$\Delta_L F(x) = \int\limits_0^1 K_L(x)(t)dt.$$

В диссертации используется аналог первого определения (см. [8]). Соответствующий оператор, который обозначается тем же символом Δ_L, действует на пространстве функционалов, определенных на множестве кусочно-гладких функций действительного переменного, принимающих значение в римановом многообразии. При этом доказывается, что связность (отождествляемая в теории калибровочных полей с вектором-потенциалом) в векторном расслоении, базой которого является риманово многообразие, является решением уравнений Янга-Миллса тогда и только тогда, когда порожденный этой связностью параллельный перенос U удовлетворяет уравнению $\Delta_L U = 0$, т.е. параллельный перенос является леви-гармоническим. Кроме того, в диссертации введен даламбертиан типа Леви (ср. [19]), и рассмотрена его связь с уравнениями Янга-Миллса-Хиггса, а также с уравнениями квантовой хромодинамики.

Стоит отметить, что интерес к работам, посвященным лапласианам Леви, значительно возрос после того, как в работах [18, 19] Л. Аккарди, П. Джибилиско и И. В. Волович доказали в евклидовом случае теорему о связи уравнений Янга-Миллса и лапласиана Леви, используя аналог второго определения лапласиана Леви (см. также [10]). Этот результат был обобщен на случай риманова многообразия Р. Леандром и И. В. Воловичем в работе [33]. Стоит подчеркнуть, что используемая в диссертации техника отличается от техники, используемой в упоминаемых выше работах.

Другим источником интереса к лапласиану Леви является обнаруженная в [20] и [6] его связь с квантовыми стохастическими процессами. Подход, предложенный в последней работе, был применен в [26] и [9] к обобщениям лапласиана Леви: к так называемым экзотическим лапласианам Леви. Такие дифференциальные операторы были введены в работе Л. Аккарди и О. Г. Смолянова [24].

Напомним общую схему определения линейного дифференциального оператора второго порядка из статьи [1], которая включает в себя лапласианы Гросса-Вольтерры и Леви. Пусть E — вещественное локально выпуклое пространство и E^* — его сопряженное пространство, наделенное *-слабой топологией. Пусть $L(E, E^*)$ — пространство непрерывных линейных функционалов из E в E^* и пусть S — линейный вещественный функционал, определенный на пространстве $domS \subset L(E, E^*)$. Областью определения $domD_S$ дифференциального оператора второго порядка D_S, порожденного линейным функционалом S, является пространство всех дважды дифференцируемых по Гато действительных функций на пространстве E, для которых $f''(x) \in domS$ для каждого $x \in E$. Оператор $domD_S$ действует следующим образом: $D_S f(x) = S(f''(x))$ для $x \in E$, $f \in domD_S$. Пусть E непрерывно вложено в действительное сепарабельное гильбертово пространство H так, что образ E при вложении плотен в H. Тогда $E \subset H \subset E^*$ — оснащенное гильбертово пространство. Зафиксируем в H ортонормированный базис $\{e_n\}$, состоящий из векторов пространства E. Обобщенный лапласиан Леви (или экзотический лапласиан Леви) Δ_L^l порядка $l \geq 0$ — это дифференциальный оператор второго порядка, порожденный функционалом S_l, который определяется следующим образом: $S_l(F) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^l}\sum_{k=1}^n (Fe_k, e_k)$ для $F \in L(E, E^*)$. Определение экзотического лапласиана Леви при $l = 0$ совпадает с определением лапласиана Гросса-Вольтерры, а при $l = 1$ совпадает с определением классического лапласиана Леви. Свойства лапласиана Леви, действующего на пространстве функций на оснащенном гильбертовом пространстве, изучались в работах Л. Аккарди, П. Розелли и О. Г. Смолянова [3], Л. Аккарди и О. Г. Смолянова [4, 5], О. О. Обрезкова [41], Х.-Х. Куо, Н. Обаты, К. Сайто [32] и многих других. Метод преобразования Фурье был впервые применен при изучении лапласиана Леви Л. Аккарди и О. Г. Смоляновым (см. например [24]).

В диссертации наряду с экзотическими лапласианами Леви рассматриваются неклассические лапласианы Леви Δ_R^L, порожденные линейным оператором $R\colon span\{e_n\colon n \in \mathbb{N}\} \to E$, т.е. дифференциальные операторы второго порядка D_{S_R}, где функционал S_R определяется следующим образом: $S_R(F) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n (FRe_n, Re_n)$ для $F \in L(E, E^*)$. Такие лапласианы были введены в работе [8]. В диссертации доказывается, что экзотические лапласианы Δ_L^l при $l > 0$ можно представить как неклассические лапласианы, при этом используется метод работы [9].

В 1970-е годы Т. Хидой были заложены основы белошумного анализа (white noise analysis) — бесконечномерного анализа, построенного с помощью фиксированной гауссовской меры на вещественном (сепарабельном) гильбертовом пространстве. В книге [28] был введен лапласиан Леви на обобщенных белошумных функционалах. Свойства такого лапласиана Леви рассматривались в работах Т. Хиды, Х.-Х. Куо, Н. Обаты, К. Сайто и многих других. Свойства экзотических лапласианов Леви в белошумном анализе рассматривались в статьях [21, 22, 23] Л. Аккарди, У. С. Джи и К. Сайто, а также в работе [17] К. Сайто. В диссертации методы работ [22, 17] и работы [8] используются, чтобы получить формулы, связывающие различные неклассические лапласианы Леви. Кроме того, в диссертации доказывается, что неклассические лапласианы Леви выражаются как квадратичные функции от квантовых стохастических процессов, которые определяются как непрерывные отображения отрезка в пространство непрерывных линейных операторов из пространства пробных белошумных функционалов $\mathcal{E}$ в пространство обобщенных белошумных функционалов $\mathcal{E}^*$ (см. например [40] и имеющиеся там ссылки). Процесс уничтожения определяется как отображение $t \mapsto b_t$, где b_t — оператор дифференцирования по направлению δ_t в пространстве $\mathcal{E}$. Известно, что лапласиан Гросса-Вольтерры, который, в отличии от лапласиана Леви, является непрерывным оператором на пространстве $\mathcal{E}$, выражается в виде $\Delta_V = \int b_t^2 dt$ (см. например [30, 37]). Для классического лапласиана Леви в диссертации доказывается формула $\Delta_L = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\|s-t\|<\varepsilon} b_s b_t ds dt$, которая обобщается для неклассических лапласианов Леви. В частности, доказывается, что $\Delta_{d^l}^L = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\|s-t\|_T<\varepsilon} b_s^{(l)} b_t^{(l)} ds dt$, где d — оператор дифференцирования и $l \in \mathbb{N}$. Первое выражение приводится без доказательства в работе [20] со ссылкой на Х.-Х. Куо и в работе [6], а вторая формула впервые приводится без доказательства в работе [8].

Основные результаты диссертации состоят в следующем:

- Доказано, что связность в векторном расслоении, базой которого является риманово многообразие, удовлетворяет уравнениям Янга-Миллса тогда и только тогда, когда порожденный связностью параллельный перенос является решением уравнения Лапласа для лапласиана Леви, определенного с помощью среднего Чезаро.

- Получены представления лапласианов Леви как квадратичных функций от квантовых стохастических процессов.

- Доказаны формулы, связывающие лапласианы Леви различных типов.

Диссертация состоит из трех глав.

В первой главе даются определения лапласианов Леви и доказываются формулы, связывающие различные лапласианы Леви. Обобщенным средним Чезаро порядка $l \geq 0$ числовой последовательности $g \in \mathbb{C}^\infty$ будем называть число $C_l(g) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^l}(\sum_{k=1}^n g(k))$, если этот предел существует. Пусть E — вещественное локально выпуклое пространство. Пусть E — вещественное локально выпуклое пространство, непрерывно вложенное в вещественное сепарабельное гильбертово пространство H так, что образ E при вложении плотен в H. $\{e_n\}$ — ортонормированный базис в H, состоящий из векторов пространства E. $C^2(E,\mathbb{R})$ — пространство дважды дифференцируемых по Гато действительных функций на E. Пусть при $l \geq 0$ пространство $dom\Delta_L^l$ — это подпространство $C^2(E,\mathbb{R})$, состоящее из функций f, для которых при каждом $x \in E$ существует обобщенное среднее $C_l(\langle f''(x)e_k, e_k\rangle)$.

Определение. *Экзотический (или обобщенный) лапласиан Леви порядка $l \geq 0$ — это линейное отображение из $dom\Delta_L^l$ в пространство функций на E, определенное так: $\Delta_L^l f(x) = C_l(\langle f''(x)e_k, e_k\rangle)$.*

При $l = 1$ определение совпадает с определением классического лапласиана Леви, который мы будем обозначать символом Δ_L, при $l = 0$ определение совпадает с определением лапласиана Гросса-Вольтерры.

Пусть R — линейный оператор, действующий из $span\{e_n\colon n \in \mathbb{N}\}$ в E. Пусть $dom\Delta_R^L$ — это подпространство $C^2(E,\mathbb{R})$, состоящее из функций f, для которых существует $C_1((\langle f''(x)Re_n, Re_n\rangle))$ при каждом $x \in E$.

Определение. *Неклассический лапласиан Леви, порожденный оператором R, — это линейное отображение из $Dom\Delta_R^L$ в пространство функций на E, определенное так: $\Delta_R^L f(x) = C_1((\langle f''(x)Re_n, Re_n\rangle))$.*

Тогда $\Delta_L = \Delta_I^L$, где I — тождественный оператор. Пусть для любого $l \in \mathbb{R}$ оператор N^l на $span\{e_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ определен следующим образом: $N^l e_n = n^l e_n$. Выполняется

Теорема. *Если $l \in \mathbb{R}$ и $l > -1$, то $\Delta^L_{N^{-\frac{l}{2}}} = (l+1)\Delta_L^{l+1}$.*

Пусть $H_{\mathbb{C}} = L_2([0,1],\mathbb{C})$. Обозначим скалярное произведение на этом пространстве символом $(\cdot,\cdot)_0$ и соответствующую гильбертову норму символом $|\cdot|_0$. Зафиксируем в $H_{\mathbb{C}}$ ортонормированный базис $\{e_n\}$, состоящий из тригонометрических функций: $e_1 = 1$, $e_{2k}(t) = \sqrt{2}\sin 2k\pi t$ и $e_{2k+1}(t) = \sqrt{2}\cos 2k\pi t$ при $k \in \mathbb{N}$. Пусть A — самосопряженный оператор в $H_{\mathbb{C}}$, определенный следующим образом: $A\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (\xi, e_k)_0 e_k$, $\xi \in domA$, где $1 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \ldots$ и $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-2} < \infty$, а $domA = \{\xi \in H_{\mathbb{C}} \colon \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 (\xi, e_k)_0 (e_k, \xi)_0 < \infty\}$. При $p \geq 0$ область определения $E_p = \{\xi \in H_{\mathbb{C}} \colon \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{2p} (\xi, e_k)_0 (e_k, \xi)_0 < \infty\}$ оператора A^p является гильбертовым пространством со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_p = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{2p} (\cdot, e_k)_0 (e_k, \cdot)_0$ и соответствующей гильбертовой нормой $|\cdot|_p$. При $p \geq 0$ пусть E_{-p} — пополнение $H_{\mathbb{C}}$ по гильбертовой норме $|\cdot|_{-p} = |A^{-p}\cdot|_0$, порожденной скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_{-p} = (A^{-p}\cdot, A^{-p}\cdot)_0$. Мы получаем оснащенное гильбертово пространство: $E_{\mathbb{C}} = \operatorname{proj}\lim_{p\to+\infty} E_p \subset H_{\mathbb{C}} \subset \operatorname{ind}\lim_{p\to+\infty} E_{-p} = E_{\mathbb{C}}^*$.

Бозонное фоковское пространство над гильбертовым пространством E_p определяется так: $\Gamma(E_p) = \{\phi = (f_n)_{n=0}^{\infty};\ f_n \in E_p^{\widehat{\otimes} n}, \|\phi\|_p^2 = \sum_{n=0}^{\infty} n! |f_n|_p^2 < \infty\}$. Мы получаем оснащенное гильбертово пространство:

$$\mathcal{E} = \operatorname*{proj\,lim}_{p\to+\infty} \Gamma(E_p) \subset \Gamma(H) \subset \operatorname*{ind\,lim}_{p\to+\infty} \Gamma(E_{-p}) = \mathcal{E}^*.$$

Двойственность между пространствами $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}^*$ обозначим символом $\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle$.

Аналогично с помощью сужения оператора A на $H_{\mathbb{R}} = L_2([0,1],\mathbb{R})$ получается оснащенное гильбертово пространство: $E_{\mathbb{R}} \subset H_{\mathbb{R}} = L_2([0,1],\mathbb{R}) \subset E_{\mathbb{R}}^*$. По теореме Минлоса существует вероятностная мера μ_I на σ-алгебре $E_{\mathbb{R}}$-цилиндрических подмножеств $E_{\mathbb{R}}^*$ такая, что $\widetilde{\mu_I}(\xi) = e^{-\frac{(\xi,\xi)_0}{2}}$ (мера μ_I является гауссовской). Существует унитарный изоморфизм Винера-Ито-Сигала между $\Gamma(H_{\mathbb{C}})$ и $L_2(E^*_{\mathbb{R}}, \mu_I, \mathbb{C})$, однозначно задающийся значением изоморфизма на когерентных состояниях:

$$\psi_\xi = (1, \xi, \frac{\xi^{\otimes 2}}{2}, \ldots, \frac{\xi^{\otimes n}}{n!}, \ldots) \longleftrightarrow \psi_\xi = e^{\langle x, \xi\rangle - \langle \xi, \xi\rangle/2}, \xi \in E_{\mathbb{C}}.$$

Тогда $\mathcal{E} \subset L_2(E^*_{\mathbb{R}}, \mu_I, \mathbb{C}) \subset \mathcal{E}^*$ называется пространством Хиды-Кубо-Такенаки, изоморфным пространству Фока над $E_{\mathbb{C}} \subset H_{\mathbb{C}} \subset E^*_{\mathbb{C}}$. $\mathcal{E}$ — пространство белошумных пробных функционалов и $\mathcal{E}^*$ — пространство белошумных обобщенных функционалов.

S-преобразование обобщенного функционала $\Phi \in \mathcal{E}^*$ — это функция $S\Phi\colon E_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$, определенная так: $S\Phi(\xi) = \langle\langle \Phi, \psi_\xi\rangle\rangle$, $\xi \in E_{\mathbb{C}}$. Комплекснозначную функцию, определенную на пространстве $E_{\mathbb{C}}$ и являющуюся S-преобразованием некоторого белошумного обобщенного функционала, называют U-функционалом.

С помощью S-преобразования определяются неклассические и экзотические лапласианы Леви и экзотические лапласианы Леви на пространстве обобщенных функционалов $\mathcal{E}^*$.

Определение. *Обобщенный функционал $\Phi \in \mathcal{E}^*$ лежит в области определения $Dom\Delta^L_R$ неклассического лапласиана Леви Δ^L_R, порожденного линейным оператором $R\colon span\{e_n\colon n \in \mathbb{N}\} \to E_{\mathbb{C}}$, тогда и только тогда, когда для всех $\xi \in E_{\mathbb{C}}$ существует $C_1((\langle S\Phi''(\xi), Re_n \otimes Re_n\rangle))$ и функция $E_{\mathbb{C}} \ni \xi \mapsto C_1((\langle S\Phi''(\xi), Re_n \otimes Re_n\rangle))$ является U-функционалом. Если $\Phi \in Dom\Delta^L_R$, то $\Delta^L_R\Phi$ — это такой обобщенный функционал из $\mathcal{E}^*$, что для всех $\xi \in E_{\mathbb{C}}$ выполняется $S\Delta^L_R\Phi(\xi) = C_1((\langle S\Phi''(\xi), Re_n \otimes Re_n\rangle))$.*

Аналогично определяются экзотические лапласианы Леви Δ^l_L $(l \geq 0)$ на пространстве обобщенных функционалов $\mathcal{E}^*$.

Пусть оператор дифференцирования d — непрерывный оператор на $E_{\mathbb{C}}$. Обозначим символом E_d замыкание $span\{e_n\colon n \in \mathbb{N}, n > 1\}$ в $E_{\mathbb{C}}$. Пусть τ'_0 — оператор, обратный оператору d на пространстве E_d. Пусть $\tau_\lambda \in L(E_{\mathbb{C}}, E_{\mathbb{C}})$ такой, что $\tau_\lambda(e_1) = \lambda e_1$ $(\lambda \in \mathbb{C})$ и ограничение τ_λ на E_d совпадает с τ'_0. Будем обозначать $\Delta^{d,l}_L = \Delta^L_{d^l}$ и $\Delta^{d,-l}_L = \Delta^L_{\tau^l_\lambda}$ при $l \in \mathbb{Z}_+$.

Предложение. *Если* $l \in \mathbb{N}$, *то* $\pi^{2l}\Delta_L^{d,-l} = (2l+1)\Delta_L^{2l+1}$.

Пусть $T \in L(E_{\mathbb{C}}, E_{\mathbb{C}})$, тогда его второе квантование — это оператор $\Gamma(T) \in L(\mathcal{E}, \mathcal{E})$, однозначно определяемый так: $\Gamma(T)\psi_\xi = \psi_{T\xi}$. Выполняется следующая теорема о связи между неклассическими лапласианами Леви:

Теорема. *Пусть* $l \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{N}$. *Пусть* $\Phi \in Dom\Delta_L^{d,l}$, *тогда* $\Delta_L^{d,(l-k)}\Gamma(d^k)^*\Phi = \Gamma(d^k)^*\Delta_L^{d,l}\Phi$, *и* $\Delta_L^{d,(l+k)}\Gamma(\tau_\lambda^k)^*\Phi = \Gamma(\tau_\lambda^k)^*\Delta_L^{d,l}\Phi$ *для всех* $\lambda \in \mathbb{C}$.

Во второй главе рассматриваются связи между семейством неклассических лапласианов Леви и квантовыми случайными процессами. Пусть X и Y — локально выпуклые пространства, символом $L^b(X,Y)$ обозначается пространство линейных непрерывных операторов из X в Y, наделенное топологией равномерной сходимости на ограниченных множествах. Будем называть непрерывное отображение отрезка $[0,1]$ в пространство $\mathcal{E}^*$ стохастическим процессом (в смысле белошумного анализа), а непрерывное отображение отрезка $[0,1]$ в $L^b(\mathcal{E}, \mathcal{E}^*)$ квантовым стохастическим процессом.

Символом $b(\zeta)$ обозначается оператор дифференцирования в $\mathcal{E}$ по направлению $\zeta \in E_{\mathbb{R}}^*$:

$$b(\zeta)\phi(\xi) = \lim_{t\to 0}(\phi(\xi+t\zeta) - \phi(\xi))/t, \xi \in E_{\mathbb{R}}^*, \phi \in \mathcal{E}.$$

Отображение $t \mapsto b_t = b(\delta_t)$ — квантовый случайный процесс, который называется процессом уничтожения.

Известно, если $\phi, \varphi \in \mathcal{E}$, то $\eta_{\phi,\varphi}(s,t) = \langle\langle b_s b_t \phi, \varphi\rangle\rangle \in E_{\mathbb{C}}^{\otimes 2}$. Если $\kappa \in (E_{\mathbb{C}}^{\otimes 2})^*$, то существует единственный непрерывный линейный оператор $\Xi_{0,2}(\kappa)$ из $\mathcal{E}$ в $\mathcal{E}^*$ такой, что $\langle\langle \Xi_{0,2}(\kappa)\phi, \varphi\rangle\rangle = \langle \kappa, \eta_{\phi,\varphi}\rangle$. Если $\kappa \in E_{\mathbb{C}}^{\otimes 2}$, то $\Xi_{0,2}(\kappa)$, продолжается до непрерывного оператора из $\mathcal{E}^*$ в $\mathcal{E}^*$. Это продолжение мы будем обозначать символом $\widetilde{\Xi}_{0,2}(\kappa)$.

Если оператор дифференцирования d — непрерывный оператор на $E_{\mathbb{C}}$, то отображения $t \mapsto b_t^{(l)}$ и $t \mapsto b((\tau_0^*)^l\delta_t)$ являются квантовыми стохастическими процессами.

Пусть $\theta(\varepsilon) \in (E_{\mathbb{C}}^{\otimes 2})^*$ такой, что для $f, g \in E_{\mathbb{C}}$ выполняется $\langle \theta(\varepsilon), f \otimes g\rangle = \int_{\|s-t\|_T<\varepsilon} f(s)g(t)dsdt$, где $\|t\|_T = \min_{k\in\mathbb{Z}}|t-k|$. Пусть $\theta^l(\varepsilon) = (d^* \otimes d^*)^l\theta(\varepsilon)$

при $l \in \mathbb{Z}_+$. При $l \in \mathbb{Z}_+$ для всех $\phi, \varphi \in \mathcal{E}$ выполняется

$$\langle\langle \Xi_{0,2}(\theta^l(\varepsilon))\phi, \varphi\rangle\rangle = \int\limits_{\|s-t\|_T<\varepsilon} \langle\langle b_s^{(l)} b_t^{(l)} \phi, \varphi\rangle\rangle dsdt.$$

Пусть $\theta^l(\varepsilon) = (\tau_0^* \otimes \tau_0^*)^{-l}\theta(\varepsilon)$ при $l \in \mathbb{Z}_-$. При $l \in \mathbb{Z}_-$ для всех $\phi, \varphi \in \mathcal{E}$

$$\langle\langle \Xi_{0,2}(\theta^l(\varepsilon))\phi, \varphi\rangle\rangle = \int\limits_{\|s-t\|_T<\varepsilon} \langle\langle b((\tau_0^*)^{-l}\delta_t) b((\tau_0^*)^{-l}\delta_s)\phi, \varphi\rangle\rangle dsdt.$$

Для всех $l \in \mathbb{Z}$ пусть $\theta_n^l(\varepsilon) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle \theta^l(\varepsilon), e_i \otimes e_j\rangle e_i \otimes e_j$. Тогда $\lim_{n\to\infty} \Xi_{0,2}(\theta_n^l(\varepsilon)) = \Xi_{0,2}(\theta^l(\varepsilon))$ в $L^b(\mathcal{E}, \mathcal{E})$, причем каждый $\Xi_{0,2}(\theta_n^l(\varepsilon))$ продолжается до непрерывного оператора $\widetilde{\Xi}_{0,2}(\theta_n^l(\varepsilon))$ в $\mathcal{E}^*$.

Рассмотрим на пространстве $\mathcal{E}^*$ топологию σ_1, порожденную семейством норм $\|\cdot\|_\xi = |S(\cdot)(\xi)|$. Пусть $\widetilde{(\mathcal{E}^*, \sigma_1)}$ — пополнение $(\mathcal{E}^*, \sigma_1)$. Пусть $\mathcal{G}$ — секвенциальное замыкание $\mathcal{E}^*$ в $\widetilde{(\mathcal{E}^*, \sigma_1)}$.

Теорема. *Для $l \in \mathbb{Z}$ пусть $\Phi \in \mathcal{E}^*$ такое, что для каждого $\xi \in E_{\mathbb{C}}$ ограничение $S\Phi''(\xi)$ на $E_d \otimes E_d$ представляется в виде*

$$\langle S\Phi''(\xi), \zeta_1 \otimes \eta_1\rangle = \int\limits_{[0,1]\times[0,1]} (\tau_0')^l \zeta_1(t)(\tau_0')^l \eta_1(s) d\mu_\xi(s,t),$$

где $\zeta_1, \eta_1 \in E_d$ и μ_ξ — борелевская комплекснозначная мера на $[0,1]\times[0,1]$. Пусть $\Phi \in Dom\Delta_L^{d,l}$, тогда $\Delta_L^{d,l}\Phi = \lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{n\to\infty} \widetilde{\Xi}_{0,2}(\theta_n^l(\varepsilon))\Phi$, где сходимость понимается как сходимость в $\mathcal{G}$.

Третья глава посвящена связи лапласиана Леви с калибровочными полями. Пусть (M,g) — это C^3-гладкое связное риманово многообразие размерности d с C^3-гладкой метрикой g. Зафиксируем точку x на M. Пусть $PC_x^1([0,1],M)$ — множество кусочно C^1-гладких функций из отрезка $[0,1]$ в M, значение которых в точке 0 совпадает с x (множество кривых с началом в точке x). Для фиксированной кривой $\gamma \in PC_x^1([0,1],M)$ и касательного вектора T в точке x и любого $t \in [0,1]$, пусть T_t обозначает параллельный перенос с помощью связности Леви-Чивиты вектора T вдоль кривой

$\gamma_{[0,t]}$ (символом $\gamma_{[s,t]}$ мы будем обозначать ограничение кривой γ на отрезок $[s,t] \subset [0,1]$).

Пусть символ $\varphi(\tau, y, Y)$ обозначает геодезическую, параметризованную τ, чья начальная точка совпадает с $y \in M$, а направление в начальной точке совпадает с $Y \in T_y M$. Для $\tau < 0$ мы считаем, что $\varphi(\tau, y, Y) = \varphi(-\tau, y, -Y)$. Если Y — нормированный вектор, то τ — натуральный параметр.

Символом $PC^1_{x,W}([0,1], M)$ будем обозначать множество кусочно C^1-гладких кривых с началом в точке x и концом, принадлежащим открытому множеству $W \subset M$. Для фиксированной кривой $\gamma \in PC^1_{x,W}([0,1], M)$, для касательного вектора T в точке x, для кусочно C^1-гладкой действительной функции f на $[0,1]$ такой, что $f(0) = 0$, и для каждого $\alpha \in (-\delta, \delta)$ для некоторого $\delta > 0$ кривая $\gamma^{T,f}_\alpha \in PC^1_{x,W}([0,1], M)$ определяется следующим образом: $\gamma^{T,f}_\alpha(t) = \varphi(\alpha f(t), \gamma_t, T_t)$. Тогда для каждой функции F с областью определения $PC^1_{x,W}([0,1], M)$ и подходящей областью значений символ $F^\gamma_{T,f}(\alpha)$ обозначает функцию действительного аргумента $\alpha \in (-\delta, \delta)$, определенную так: $F^\gamma_{T,f}(\alpha) = F(\gamma^{T,f}_\alpha)$.

Зафиксируем ортонормированный базис $\{Z_1, Z_2, \dots, Z_d\}$ для касательного пространства к M в точке x. Зафиксируем в $L_2(0,1)$ ортонормированный базис $\{e_n\}$. Пусть для любого $n \in \mathbb{N}$ выполняется $e_n \in PC^1([0,1], \mathbb{R})$ и $e_n(0) = 0$. Будем обозначать $F^\gamma_{Z_i, e_n}$ символом $F^\gamma_{i,n}$.

Символом M_N будем обозначать пространство комплексных $N \times N$ матриц. Пусть $\mathfrak{F}(PC^1_{x,W}([0,1], M), M_N)$ — пространство всех M_N-значных функций на $PC^1_{x,W}([0,1], M)$.

Определение. *Лапласиан Леви — это линейное отображение*

$$\Delta_L : dom\Delta_L \to \mathfrak{F}(PC^1_{x,W}([0,1], M), M_N),$$

определенное формулой

$$\Delta_L F(\gamma) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{dn} \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{d} (F^\gamma_{i,k})''(0), \tag{1}$$

где $dom\Delta_L$ — векторное пространство всех функций из $\mathfrak{F}(PC^1_{x,W}([0,1], M), M_N)$, для которых правая часть (1) существует.

Определение (П. Леви). *Ортонормированный базис* $\{e_n\}$ *в* $L_2(0,1)$ *называется слабо равномерно плотным, если* $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 h(t)(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n e_k^2(t)-1)dt=0$ *для любой функции* $h\in L_\infty[0,1]$.

Примером слабо равномерно плотного базиса $L_2(0,1)$ является последовательность $e_n(t)=\sqrt{2}\sin n\pi t$.

Пусть V — комплексное векторное пространство размерности N, G — группа Ли, реализованная как замкнутая подгруппа $GL(V)$. Пусть $\{W_a\}_{a\in\Lambda}$ — открытое покрытие M и $\psi_{ab}\colon W_a\cap W_b\to G$ — C^3-гладкие функции перехода такие, что

$$\psi_{ac}(y)=\psi_{ab}(y)\psi_{bc}(y),$$

где $y\in W_a\cap W_b\cap W_c$. Функции перехода задают главное расслоение $P(M,G)$ и векторное расслоение $E(M,V,P,G)$ с базой M, слоем V и структурной группой Ли G, ассоциированное с главным расслоением $P(M,G)$.

Мы можем определить связность на $E(M,V,P,G)$ как семейство $Lie(G)$-значных 1-форм $\{A^a(y)\}_{a\in\Lambda}$ на M таких, что $A^a(y)=A^a_\mu(y)dy^\mu$ определены на W_a, причем для $y\in W_a\cap W_b$ выполняется

$$A^a_\mu(y)=\psi_{ab}(y)A^b_\mu(y)\psi^{-1}_{ab}(y)-\frac{\partial\psi_{ab}(y)}{\partial y^\mu}\psi^{-1}_{ab}(y).$$

Тогда тензор кривизны определяется как семейство $Lie(G)$-значных 2-форм $\{F^a(y)\}_{a\in\Lambda}$ таких, что $F^a(y)=\sum_{\mu<\nu}F^a_{\mu\nu}(y)dy^\mu\wedge dy^\nu$ определена на W_a и $F^a_{\mu\nu}(y)=\partial_\mu A^a_\nu(y)-\partial_\nu A^a_\mu(y)+[A^a_\mu(y),A^a_\nu(y)]$.

Для кривой $\gamma\in PC^1([0,1],M)$ пусть $\gamma([p,r])\subset W_a$. Тогда мы можем определить G-значную функцию $U^{a,a}_{t,s}(\gamma)$ на $\{(t,s)\in\mathbb{R}^2: r\geq t\geq s\geq p\}$ как сумму ряда

$$U^{a,a}_{t,s}(\gamma)=I_N+\sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_{\Delta^k_{s,t}}d\tau_1\dots d\tau_k\left(-A^a_\mu(\gamma_{\tau_k})\gamma'^\mu_{\tau_k}\right)\dots\left(-A^a_\mu(\gamma_{\tau_1}))\gamma'^\mu_{\tau_1}\right),$$

где $\Delta^k_{s,t}:=\{(\tau_1,\dots,\tau_k)\in\mathbb{R}^k: s\leq\tau_1\leq\dots\leq\tau_k\leq t\}$. Для кривой $\gamma\in PC^1([0,1],M)$ рассмотрим разбиение $s=t_1<t_2<\dots<t_m=t$ отрезка $[s,t]$ такое, что $\gamma([t_i,t_{i+1}])\subset W_{a_i}$ для всех $i\in\{1,\dots,m-1\}$. Мы определим

параллельный перенос $U_{t,s}^{a_{m-1},a_1}(\gamma)$ вдоль $\gamma_{[s,t]}$ следующим образом:

$$U_{t,s}^{a_{m-1},a_1}(\gamma) = U_{t_m,t_{m-1}}^{a_{m-1},a_{m-1}}(\gamma)\psi_{a_{m-1}a_{m-2}}(\gamma_{t_{m-1}})\dots U_{t_3,t_2}^{a_2,a_2}(\gamma)\psi_{a_2a_1}(\gamma_{t_2})U_{t_2,t_1}^{a_1,a_1}(\gamma).$$

Значение $U_{t,s}^{a_{m-1},a_1}(\gamma)$ не зависит от выбора разбиения. Пусть $a_x \in \Lambda$ такой, что $x \in W_{a_x}$. Тогда $\gamma \mapsto U_{1,0}^{a,a_x}(\gamma)$ — корректно определенный функционал на $PC^1_{x,W_a}([0,1],M)$.

В локальных координатах ковариантные производные тензора кривизны ∇F определяются следующим образом:

$$\nabla_\lambda F_{\mu\nu} = \partial_\lambda F_{\mu\nu} + [A_\lambda, F_{\mu\nu}] - F_{\mu\kappa}\Gamma^\kappa_{\lambda\nu} - F_{\kappa\nu}\Gamma^\kappa_{\lambda\mu},$$

где $\Gamma^\kappa_{\lambda\mu}$ — символы Кристоффеля связности Леви-Чивиты на (M,g).

Теорема. *Пусть все A_μ — C^2-гладкие функции. Пусть $\{e_n\}$ — слабо равномерно плотный базис в $L_2(0,1)$ такой, что все элементы $\{e_n\}$ принадлежат пространству $PC^1([0,1],\mathbb{R})$, причем для каждого $n \in \mathbb{N}$ выполняется $e_n(0) = e_n(1) = 0$. Следующие два утверждения равносильны:*

1. *связность A на M является решением уравнений Янга-Миллса:*

$$\nabla_\mu F^\mu_\nu = 0;$$

2. *для каждого $a \in \Lambda$ функция $PC^1_{x,W_a}([0,1],M) \ni \gamma \mapsto U_{1,0}^{a,a_x}(\gamma)$ (параллельный перенос вдоль кривых из $PC^1_{x,W_a}([0,1],M)$) является решением уравнения Лапласа-Леви:*

$$\Delta_L U_{1,0}^{a,a_x} = 0.$$

Пусть $W_2^1([0,1],\mathbb{R}^d)$ — пространство абсолютно непрерывных функций, принимающих значение в $\mathbb{R}^d$ и обладающих квадратично интегрируемой производной. Пусть $H = \{\gamma \in W_2^1([0,1],\mathbb{R}^d)\colon \gamma(0) = 0\}$ — гильбертово пространство со скалярным произведением: $(g_1,g_2)_H = \int_0^1 (g_1'(r), g_2'(r))_{\mathbb{R}^d} dr$. Пусть $\{p_i\}_{i=1}^d$ — ортонормированный базис в $\mathbb{R}^d$. Выберем в H следующий ортонормированный базис: $e_n(r) = p_{n-d\lfloor\frac{n-1}{d}\rfloor} f_{\lfloor\frac{n-1}{d}\rfloor}(r)$, где $f_0(r) = r$,

$f_j(r) = \frac{\sqrt{2}}{\pi j}\sin(\pi j r)$ для $j \in \mathbb{N}$. Ниже считается, что связность задана на $\mathbb{R}^d$ как $gl(N)$-значная C^2-гладкая 1-форма $A_\mu(x)dx^\mu$, определенная на всем $\mathbb{R}^d$. Определение параллельного переноса $U_{t,s}(\gamma)$ вдоль $\gamma_{[s,t]}$ естественным образом переносится на случай $\gamma \in H$.

Пусть оператор $N_1\colon span\{e_n\colon n \in \mathbb{N}\} \to H$ определен следующим образом: $N_1 e_n = \pi\lfloor\frac{n-1}{d}\rfloor e_n$.

Теорема. *Функция $H \ni \gamma \mapsto U_{1,0}(\gamma)$ (параллельный перенос вдоль кривых из H) лежит в области определения оператора $\Delta^L_{N^1}$. При этом выполняется:*

$$d\Delta^L_{N_1}U_{1,0}(\gamma) = \frac{\pi^2}{d}\Delta^L_{N^1}U_{1,0}(\gamma) = \int\limits_0^1 U_{1,r}(\gamma)(-\nabla_\mu F^\mu_\nu(\gamma_r)\gamma'^\nu_r)U_{r,0}(\gamma)dr.$$

В параграфе 3.4 диссертации вводится неклассический даламбертиан Леви, соответствующий лапласиану $d\Delta^L_{N_1}$, и выводится система бесконечномерных уравнений, содержащая такой даламбертиан, эквивалентная уравнениям квантовой хромодинамики. В параграфе 3.5 выводится система бесконечномерных уравнений, содержащая такой даламбертиан, эквивалентная уравнениям Янга-Миллса-Хиггса.

В заключении выражаю глубокую благодарность своему научному руководителю, доктору физико-математических наук, профессору Олегу Георгиевичу Смолянову за постановку задач, постоянное внимание к работе и поддержку.

Глава 1

Иерархия лапласианов Леви

1.1 Обобщенные средние Чезаро

Обобщенным средним Чезаро порядка $l \geq 0$ числовой последовательности $g \in \mathbb{C}^\infty$ будем называть число $C_l(g) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^l}(\sum_{k=1}^n g(k))$, если этот предел существует. Докажем несколько лемм о чезаровских средних. Для этого в начале докажем следующий факт:

Лемма 1. *Пусть* $(d_k) \in \mathbb{C}^\infty$ *и для каждого* $n \in \mathbb{N}$ *пусть* $\{c_{kn}\}_{k=1}^{n-1} \in \mathbb{R}^{n-1}$. *Пусть все* $c_{kn} \geq 0$. *Пусть* $\sum_{k=1}^{n-1} c_{kn} = C_n$, $\sum_{k=1}^{n-1} c_{kn} d_k = B_n$. *Пусть* $\lim_{k\to\infty} d_k = D$, $\lim_{n\to\infty} C_n = C$, *и при каждом фиксированном* k *выполняется* $\lim_{n\to\infty} c_{kn} = 0$. *Тогда* $\lim_{n\to\infty} B_n = CD$.

Доказательство. Пусть $\sup_{k\in\mathbb{N}} |d_k| = d'$ и $\sup_{n\in\mathbb{N}} C_n = C'$. Для любого $\varepsilon > 0$ существует такие $k_\varepsilon, n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, что при $k > k_\varepsilon$ выполняется $|D - d_k| < \varepsilon/(4C')$, при $k \leq k_\varepsilon$ и $n > n_\varepsilon$ выполняется $|c_{kn}| < \varepsilon/(4k_\varepsilon d')$, при $n > n_\varepsilon$ выполняется $|C_n - C| < \varepsilon/(4D)$. Тогда при $n > k_\varepsilon$ выполняется:

$$CD - B_n = CD - \sum_{k=1}^{n-1} d_k c_{kn} = CD - \sum_{k=k_\varepsilon+1}^{n-1} c_{kn} D + \sum_{k=k_\varepsilon+1}^{n-1} (D - d_k) c_{kn} -$$

$$- \sum_{k=1}^{k_\varepsilon} d_k c_{kn} = D(C - \sum_{k=1}^{n-1} c_{kn}) + \sum_{k=k_\varepsilon+1}^{n-1} (D - d_k) c_{kn} + \sum_{k=1}^{k_\varepsilon} (D - d_k) c_{kn}.$$

При $n > \max\{k_\varepsilon, n_\varepsilon\}$ верна оценка:

$$|CD - B_n| \le |D||C - \sum_{k=1}^{n-1} c_{kn}| + \sup_{k>k_\varepsilon} |(D - d_k)|(\sum_{k=k_\varepsilon+1}^{n-1} c_{kn})+$$
$$+ \sum_{k=1}^{k_\varepsilon}(|D| + d')c_{kn} \le \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

Лемма 2. *Пусть* $q > 0$*, тогда*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} k^p}{n^q} = \begin{cases} \frac{1}{q}, & \text{\textit{если} } p = q - 1 \\ 0, & \text{\textit{если} } p < q - 1 \end{cases}$$

Доказательство. Если $p \ge 0$, то

$$\frac{n^{p+1}}{(p+1)} = \int\limits_0^n x^p dx \le \sum_{k=1}^{n} k^p \le \int\limits_1^{n+1} x^p dx = \frac{(n+1)^{p+1} - 1}{p+1}.$$

Если $p < 0$ и $p \ne -1$, то

$$1 + \frac{n^{p+1} - 1}{(p+1)} = 1 + \int\limits_1^n x^p dx \ge \sum_{k=1}^{n} k^p \ge \int\limits_1^n x^p dx = \frac{n^{p+1} - 1}{(p+1)}.$$

Если $p = -1$, то

$$1 + \ln n = 1 + \int\limits_1^n \frac{1}{x} dx \ge \sum_{k=1}^{n} k^p \ge \int\limits_1^n \frac{1}{x} dx = \ln n.$$

Используя эти оценки, мы получаем утверждение леммы. □

Лемма 3. *Пусть* $(a_n) \in \mathbb{C}^\infty$*. Пусть* $l, \alpha \in \mathbb{R}$ *и* $l+\alpha > 0$*. Пусть существует* $\lim_{n\to\infty} n^{-l} \sum_{k=1}^{n} a_k$*. Тогда*

$$C_{l+\alpha}((n^\alpha a_n)) = \frac{l}{l+\alpha} \lim_{n\to\infty} n^{-l} \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Доказательство. Будем обозначать $A_n = \sum_{k=1}^n a_k$. Применяя преобразование Абеля, получаем

$$\frac{1}{n^{l+\alpha}}(\sum_{k=1}^{n} k^\alpha a_k) = \frac{1}{n^{l+\alpha}}(n^\alpha A_n - \sum_{k=1}^{n-1} A_k((k+1)^\alpha - k^\alpha)) =$$

$$= \frac{A_n}{n^l} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{A_n}{k^l}\frac{k^{l+\alpha}((1+\frac{1}{k})^\alpha - 1)}{n^{l+\alpha}}.$$

Покажем, что мы можем выбрать $c_{kn} = \frac{k^{l+\alpha}((1+\frac{1}{k})^\alpha - 1)}{n^{l+\alpha}}$ и $d_k = \frac{A_k}{k^l}$ и применить лемму 1. Пусть $\binom{\alpha}{n} = \prod_{k=1}^n \frac{(\alpha-k+1)}{k}$. Разложим $(1+x)^\alpha$ в ряд Тейлора с остаточным членом Лагранжа:

$$\left(1+\frac{1}{k}\right)^\alpha = 1 + \sum_{j=1}^{m} \binom{\alpha}{j}\frac{1}{k^j} + \binom{\alpha}{m+1}\left(\frac{\theta_{km}}{k}\right)^{m+1}, \tag{1.1}$$

где $0 \le \theta_{km} \le 1$. Пусть $m_\alpha \in \mathbb{N}$ такой, что $\binom{\alpha}{m_\alpha} \le 0$, тогда $\binom{\alpha}{m_\alpha+1} \ge 0$. В силу (1.1) верна оценка:

$$\alpha\frac{1}{k} + \sum_{j=2}^{m_\alpha} \binom{\alpha}{j}\frac{1}{k^j} \le (1+\frac{1}{k})^\alpha - 1 \le \alpha\frac{1}{k} + \sum_{j=2}^{m_\alpha-1} \binom{\alpha}{j}\frac{1}{k^j}.$$

В силу леммы 2 выполняется

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k^{l+\alpha}((1+\frac{1}{k})^\alpha - 1)}{n^{l+\alpha}} = \lim_{n\to\infty}(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\alpha k^{l+\alpha-1} + \sum_{j=2}^{m_\alpha}\binom{\alpha}{j}k^{l+\alpha-j}}{n^{l+\alpha}}) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\alpha k^{l+\alpha-1} + \sum_{j=2}^{m_\alpha+1}\binom{\alpha}{j}k^{l+\alpha-j}}{n^{l+\alpha}} = \frac{\alpha}{l+\alpha}. \tag{1.2}$$

Тогда, действительно,

$$C_{l+\alpha}((n^\alpha a_n)) = C_l((a_n)) - \frac{\alpha}{l+\alpha}C_l((a_n)).$$

□

Лемма 4. *Пусть* $(a_n) \in \mathbb{C}^\infty$ *и существует предел* $\lim_{n\to\infty} n^l(\sum_{k=n+1}^\infty a_k)$ *при* $l \in \mathbb{N}$*, тогда*

$$C_1((n^{l+1}a_n)) = l \lim_{n\to\infty} n^l(\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k).$$

Доказательство. Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a$. Рассмотрим последовательность $\{a'_n\} \in \mathbb{C}^{\infty}$ такую, что $a'_1 = a_1 - a$ и $a'_n = a_n$ при $n > 1$. Тогда $\lim_{n\to\infty} n^l(\sum_{k=1}^{n} a'_k) = -\lim_{n\to\infty} n^l(\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k)$. Тогда по лемме 3

$$C_1((n^{l+1}a_n)) = C_1((n^{l+1}a'_n)) = -l \lim_{n\to\infty} n^l(\sum_{k=1}^{n} a'_k) = l \lim_{n\to\infty} n^l(\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k).$$

□

Замечание 1. *Связь между обобщенными средними Чезаро различных порядков была обнаружена в работе [9] Л. Аккарди и О. Г. Смолянова.*

1.2 Лапласианы Леви

Пусть E — вещественное локально выпуклое пространство. Пусть E непрерывно вложено в вещественное сепарабельное гильбертово пространство H так, что образ E при вложении плотен в H. Пусть $\{e_n\}$ — ортонормированный базис в H, состоящий из векторов пространства E. Напомним определение дифференцируемости по Гато.

Определение 1. *Пусть X и Y — локально выпуклые пространства над полем $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Пусть V_x — открытая окрестность точки $x \in X$. Функция $f\colon V_x \to Y$ дифференцируема по Гато (слабо дифференцируема) в точке x, если для каждого $h \in X$ существует предел $d_h f(x) = \lim_{t\to 0, t\in\mathbb{K}} \frac{f(x+th)-f(x)}{t} \in Y$ и отображение $f'(x)\colon h \to d_h f(x)$ — линейный непрерывный оператор. Пусть $L_0 = Y$ и для каждого $n \in \mathbb{N}$ пусть $L_n = L(X, L_{n-1})$ — пространство непрерывных линейных операторов из X в L_{n-1}, наделенное топологией равномерной сходимости на конечных множествах. Производная Гато порядка $n \in \mathbb{N}$ определяется по индукции: функция $f\colon V_x \to Y$ n раз дифференцируема по Гато в точке x, если $f^{n-1}\colon V_x \to L_{n-1}$ дифференцируема по Гато в точке x (см. [17]).*

Пусть $C^2(E,\mathbb{R})$ — пространство дважды дифференцируемых по Гато действительных функций на E. Пусть при $l \geq 0$ пространство $dom\Delta_L^l$ — это подпространство $C^2(E,\mathbb{R})$, состоящее из функций f, для которых при каждом $x \in E$ существует $C_l((\langle f''(x)e_n, e_n\rangle))$.

Определение 2. *Экзотический (или обобщенный) лапласиан Леви порядка $l \geq 0$ — это линейное отображение из $dom\Delta_L^l$ в пространство функций на E, определенное так*

$$\Delta_L^l f(x) = C_l((\langle f''(x)e_n, e_n\rangle)).$$

При $l = 1$ определение совпадает с определением классического лапласиана Леви, который мы будем обозначать символом Δ_L.

Пусть R — линейный оператор, действующий из $span\{e_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ в E. Пусть $dom\Delta_R^L$ — это подпространство $C^2(E,\mathbb{R})$, состоящее из функций f, для которых существует среднее $C_1((\langle f''(x)Re_n, Re_n\rangle))$ при каждом $x \in E$.

Определение 3. *Неклассический лапласиан Леви, порожденный оператором R, — это линейное отображение из $Dom\Delta_R^L$ в пространство функций на E, определенное так:*

$$\Delta_R^L f(x) = C_1((\langle f''(x)Re_n, Re_n\rangle)).$$

Тогда $\Delta_L = \Delta_I^L$, где I — тождественный оператор. Пусть для любого $l \in \mathbb{R}$ оператор N^l на $span\{e_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ определен следующим образом: $N^l e_n = n^l e_n$. Прямым следствием леммы 3 является

Теорема 1. *Если $l \in \mathbb{R}$ и $l > -1$, то $\Delta_{N^{-\frac{l}{2}}}^L = (l+1)\Delta_L^{l+1}$.*

Доказательство. Действительно, выполняется равенство для всех $x \in E$

$$C_1((\langle f''(x)N^{-\frac{l}{2}}e_n, N^{-\frac{l}{2}}e_n\rangle)) =$$
$$= C_1((n^{-l}\langle f''(x)e_n, e_n\rangle)) = (l+1)C_l((\langle f''(x)e_n, e_n\rangle)).$$

□

Аналогично прямым следствием леммы 4 является

Предложение 1. *Если $f \in dom\Delta_L^0$ и для каждого $x \in E$ существует предел*

$$\lim_{n\to\infty} n^l(\sum_{k=n+1}^{\infty}\langle f''(x)e_k, e_k\rangle),$$

где $l \in \mathbb{N}$, тогда

$$\Delta^L_{N^{\frac{(l+1)}{2}}} f(x) = l\lim_{n\to\infty} n^l(\sum_{k=n+1}^{\infty}\langle f''(x)e_k, e_k\rangle).$$

Пример 1. *Пусть $E = H$ и $l \in \mathbb{N}$. Пусть на H задан ядерный самосопряженный оператор: $A_1 x = \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n^l} - \frac{1}{(n+1)^l})(x, e_n)e_n$, $x \in H$. Тогда для функции $f(x) = (A_1 x, x)$ выполняется $\Delta^L_{N^{\frac{(l+1)}{2}}} f(x) = 2l$.*

1.3 Лапласианы Леви в белошумном анализе

Пусть $H_{\mathbb{C}} = L_2([0,1],\mathbb{C})$. Обозначим скалярное произведение на этом пространстве символом $(\cdot,\cdot)_0$ и соответствующую гильбертову норму символом $|\cdot|_0$. Зафиксируем в $H_{\mathbb{C}}$ ортонормированный базис $\{e_n\}$, состоящий из тригонометрических функций: $e_1 = 1$, $e_{2k}(t) = \sqrt{2}\sin 2k\pi t$ и $e_{2k+1}(t) = \sqrt{2}\cos 2k\pi t$ при $k \in \mathbb{N}$. Пусть A — самосопряженный оператор в $H_{\mathbb{C}}$, определенный следующим образом:

$$A\xi = \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k(\xi, e_k)_0 e_k,\ \xi \in domA,$$

где $1 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \ldots$ и $\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-2} < \infty$, а

$$domA = \{\xi \in H_{\mathbb{C}}\colon \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2(\xi, e_k)_0(e_k, \xi)_0 < \infty\}.$$

При $p \geq 0$ область определения

$$E_p = domA^p = \{\xi \in H_{\mathbb{C}}\colon \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{2p}(\xi, e_k)_0(e_k, \xi)_0 < \infty\}$$

оператора A^p является гильбертовым пространством со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_p = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{2p} (\cdot, e_k)_0 (e_k, \cdot)_0$ и соответствующей гильбертовой нормой $|\cdot|_p$. При $p \geq 0$ пусть E_{-p} — пополнение пространства $H_{\mathbb{C}}$ по гильбертовой норме $|\cdot|_{-p} = |A^{-p}\cdot|_0$, порожденной скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_{-p} = (A^{-p}\cdot, A^{-p}\cdot)_0$. Так мы получаем следующую цепочку гильбертовых пространств:

$$\operatorname*{proj\,lim}_{p\to+\infty} E_p \subset \ldots E_p \subset \ldots \subset H_{\mathbb{C}} \subset \ldots \subset E_{-p} \ldots \subset \operatorname*{ind\,lim}_{p\to+\infty} E_{-p}.$$

Обозначим проективный предел $\operatorname{proj\,lim}_{p\to+\infty} E_p$ символом $E_{\mathbb{C}}$. Тогда $E_{\mathbb{C}}$ — ядерное пространство Фреше. Т.к. $E_{\mathbb{C}}$ — рефлексивное пространство, то индуктивный предел $\operatorname{ind\,lim}_{p\to+\infty} E_{-p} = E_{\mathbb{C}}^*$ (см. например [37, 31] и приведенные там ссылки). (Здесь и далее мы считаем, что для любого локально выпуклого пространства K сопряженное пространство K^* наделено сильной топологией, т.е. топологией равномерной сходимости на ограниченных множествах, если не оговаривается иное. Если K — ядерное пространство Фреше, то K — рефлексивное.)

Для наглядности приведем доказательство следующего предложения. В [37] приведено доказательство для более общего случая.

Предложение 2. *Пространство $E_{\mathbb{C}}$ обладает следующими свойствами:*

1. *для любого $\xi \in E$ существует $\widetilde{\xi} \in C[0,1]$ такая, что $\xi = \widetilde{\xi}$ почти всюду;*

2. *δ_t — корректно определенный функционал из $E_{\mathbb{C}}^*$ для всех $t \in [0,1]$;*

3. *отображение $t \mapsto \delta_t$ непрерывно.*

Доказательство. Т.к. $\sup_{n\in\mathbb{N}, t\in[0,1]} |e_n(t)| < \sqrt{2}$, для любого $\xi \in E_{\mathbb{C}}$ выполняется

$$\sum_{k=N}^{\infty}|e_n(t)\langle\xi,e_n\rangle| \leq \sqrt{2}\sum_{k=N}^{\infty}|\langle\xi,e_n\rangle| \leq \sqrt{2}(\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j^2\langle e_j,\xi\rangle^2)^{\frac{1}{2}}(\sum_{j=N}^{\infty}\lambda_j^{-2})^{\frac{1}{2}} =$$
$$= \sqrt{2}|\xi|_1(\sum_{j=N}^{\infty}\lambda_j^{-2})^{\frac{1}{2}}.$$

Тогда $\lim_{N\to\infty}\sum_{k=N}^{\infty}|e_n(t)\langle\xi,e_n\rangle| \rightrightarrows 0$ на $[0,1]$ и, следовательно, $\sum_{n=1}^{\infty}e_n(t)\langle\xi,e_n\rangle$ сходится равномерно на $[0,1]$ к непрерывной $\widetilde{\xi}$. Тогда $\widetilde{\xi}=\xi$ почти всюду. Везде ниже будем считать, что если $\xi\in E_{\mathbb{C}}$, то ξ - непрерывная. Т.к. $|\xi(t)| \leq \sqrt{2}|\xi|_1(\sum_{j=0}^{\infty}\lambda_j^{-2})^{\frac{1}{2}}$, δ_t является корректно определенным функционалом из пространства $E_{\mathbb{C}}^*$ при любом $t\in[0,1]$. Пусть B - ограниченное множество из $E_{\mathbb{C}}$, тогда

$$\sup_{\xi\in B}|\langle\delta_t-\delta_s,\xi\rangle| = \sup_{\xi\in B}|\xi(t)-\xi(s)| \leq$$
$$\leq \sum_{n=1}^{N}|e_n(t)-e_n(s)|\sqrt{2}\sup_{\xi\in B}|\xi|_1(\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j^{-2})^{\frac{1}{2}} + 2\sqrt{2}\sup_{\xi\in B}|\xi|_1(\sum_{j=N+1}^{\infty}\lambda_j^{-2})^{\frac{1}{2}}.$$

Тогда отображение $t\mapsto\delta_t\in E_{\mathbb{C}}^*$ $t\in[0,1]$ непрерывно. □

Также для каждого $n\in\mathbb{N}$ мы получаем оснащенное гильбертово пространство:

$$E_{\mathbb{C}}^{\otimes n}\subset L_2([0,1]^n,\mathbb{C})\subset(E_{\mathbb{C}}^{\otimes n})^*,$$

где $E_{\mathbb{C}}^{\otimes n}=\operatorname{proj}\lim_{p\to+\infty}E_p^{\otimes n}$ и $(E_{\mathbb{C}}^{\otimes n})^*=(E_{\mathbb{C}}^*)^{\otimes n}=\operatorname{ind}\lim_{p\to+\infty}E_{-p}^{\otimes n}$ (см. [37]). (Мы считаем, что если X и Y — локально выпуклые пространства, то $X\otimes Y$ — это пополнение алгебраического тензорного произведения $X\otimes_{alg}Y$ по сильнейшей локально выпуклой топологией такой, что каноническое вложение $X\times Y\to X\otimes_{alg}Y$ непрерывно). Будем обозначать символом $|\cdot|_p$ гильбертову норму на гильбертовом пространстве $E_p^{\otimes n}$. Если $f_n\in E_{\mathbb{C}}^{\otimes n}$ и $F_n\in(E_{\mathbb{C}}^{\otimes n})^*$ такое, что $|F|_{-p}<\infty$, то выполняется

$$|\langle F_n,f_n\rangle| \leq |F_n|_{-p}|f_n|_p. \tag{1.3}$$

Бозонное фоковское пространство над гильбертовым пространством E_p определяется так:

$$\Gamma(E_p)=\{\phi=(f_n)_{n=0}^{\infty};\ f_n\in E_p^{\widehat{\otimes}n},\|\phi\|_p^2=\sum_{n=0}^{\infty}n!|f_n|_p^2<\infty\}.$$

Мы получаем цепочку пространств Фока:

$$\operatorname*{proj\,lim}_{p\to+\infty}\Gamma(E_p)\subset\ldots\subset\Gamma(E_p)\subset\ldots\subset\Gamma(H)\subset$$
$$\ldots\subset\Gamma(E_{-p})\subset\ldots\subset\operatorname*{ind\,lim}_{p\to+\infty}\Gamma(E_{-p}).$$

Обозначим проективный предел $\operatorname{proj\,lim}_{p\to+\infty}\Gamma(E_p)$ символом $\mathcal{E}$, тогда индуктивный предел $\operatorname{ind\,lim}_{p\to+\infty}\Gamma(E_{-p})=\mathcal{E}^*$. Двойственность между пространствами $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}^*$ обозначим символом $\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle$. Тогда

$$\mathcal{E}=\{\phi=(f_n)_{n=0}^{\infty};\ f_n\in E^{\widehat{\otimes}n},\|\phi\|_p^2=\sum_{n=0}^{\infty}n!|f_n|_p^2<\infty \text{ для всех } p\in\mathbb{R}\},$$

$$\mathcal{E}^*=$$
$$=\{\Phi=(F_n)_{n=0}^{\infty};\ F_n\in(E^*)^{\widehat{\otimes}n},\ \|\Phi\|_p^2=\sum_{n=0}^{\infty}n!|F_n|_p^2<\infty \text{ для некоторого } p\in\mathbb{R}\}$$

и, если $\phi=(f_n)\in\mathcal{E}$ и $\Phi=(F_n)\in\mathcal{E}^*$, то $\langle\langle\Phi,\phi\rangle\rangle=\sum_{n=1}^{\infty}n!\langle F_n,f_n\rangle$. Если $\|\Phi\|_{-p}<\infty$, то выполняется $|\langle\langle\Phi,\phi\rangle\rangle|\leq\|\Phi\|_{-p}\|\phi\|_p$ (см. [37]).

Аналогично с помощью сужения оператора A на $H_{\mathbb{R}}=L_2([0,1],\mathbb{R})$ получается оснащенное гильбертово пространство:

$$E_{\mathbb{R}}\subset H_{\mathbb{R}}=L_2([0,1],\mathbb{R})\subset E_{\mathbb{R}}^*.$$

По теореме Минлоса (см. например [15]) существует вероятностная мера μ_I на σ-алгебре $E_{\mathbb{R}}$-цилиндрических подмножеств $E_{\mathbb{R}}^*$ такая, что $\widetilde{\mu_I}(\xi)=e^{-\frac{(\xi,\xi)_0}{2}}$ (мера μ_I является гауссовской). Существует унитарный изоморфизм Винера-Ито-Сигала между $\Gamma(H_{\mathbb{C}})$ и $L_2(E_{\mathbb{R}}^*,\mu_I,\mathbb{C})$ (см. например [37, 31]), однозначно задающийся значением изоморфизма на когерентных состояниях:

$$\psi_\xi=(1,\xi,\frac{\xi^{\otimes2}}{2},\ldots,\frac{\xi^{\otimes n}}{n!},\ldots)\longleftrightarrow\psi_\xi=e^{\langle x,\xi\rangle-\langle\xi,\xi\rangle/2},\xi\in E_{\mathbb{C}}.$$

Тогда $\mathcal{E} \subset L_2(E^*_{\mathbb{R}}, \mu_I, \mathbb{C}) \subset \mathcal{E}^*$ называется пространством Хиды-Кубо-Такенаки, изоморфным пространству Фока над $E_{\mathbb{C}} \subset H_{\mathbb{C}} \subset E^*_{\mathbb{C}}$. $\mathcal{E}$ — пространство белошумных пробных функционалов и $\mathcal{E}^*$ — пространство белошумных обобщенных функционалов.

S-преобразование обобщенного функционала $\Phi \in \mathcal{E}^*$ — это функция $S\Phi\colon E_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$, определенная так: $S\Phi(\xi) = \langle\langle \Phi, \psi_\xi \rangle\rangle$, $\xi \in E_{\mathbb{C}}$. Т.к. множество когерентных состояний плотно в $\mathcal{E}$, каждый $\Phi \in \mathcal{E}^*$ однозначно определяется своим S-преобразованием.

В [43] доказывается, что комплекснозначная функция F на $E_{\mathbb{C}}$ является S-преобразованием обобщенного функционала $\Phi \in \mathcal{E}^*$ тогда и только тогда, когда

1. для любых ζ и η из $E_{\mathbb{C}}$ функция $F_{\zeta,\eta}(z) = F(z\eta + \zeta)$ голоморфна на $\mathbb{C}$;

2. существуют такие $C, K > 0$ и $p \in \mathbb{R}$, что для всех $\xi \in E_{\mathbb{C}}$ выполняется оценка:
$$|F(\xi)| \leq Ce^{K\|\xi\|_p^2}.$$

Комплекснозначные функции, определенные на пространстве $E_{\mathbb{C}}$ и удовлетворяющие условиям 1 и 2, называются U-функционалами.

Пусть X и Y — локально выпуклые пространства, символом $L^b(X, Y)$ обозначается пространство линейных непрерывных операторов из X в Y, наделенное топологией равномерной сходимости на ограниченных множествах. Напомним определение дифференцируемости по Фреше:

Определение 4. *Пусть X и Y — локально выпуклые пространства над полем $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Пусть V_x — открытая окрестность точки $x \in X$. Функция $f\colon V_x \to Y$ дифференцируема по Фреше в точке x, если она дифференцируема по Гато в этой точке и $d_h f(x) = \lim_{t\to 0, t\in\mathbb{K}} \frac{f(x+th)-f(x)}{t} \in Y$ равномерно на ограниченных множествах из X. Пусть $L^b_0 = Y$ и для каждого $n \in \mathbb{N}$ пусть $L^b_n = L^b(X, L^b_{n-1})$. Производная Фреше порядка $n \in \mathbb{N}$ определяется по индукции: функция $f\colon V_x \to Y$ n раз дифференцируема* *по Фреше в точке x, если $f^{n-1}\colon V_x \to L^b_{n-1}$ дифференцируема по Фреше в точке x (см. [17]).*

Предложение 3. *Для каждого $\Phi \in \mathcal{E}^*$ его S-преобразование бесконечно дифференцируемо по Фреше.*

Доказательство. Пусть $\Phi = (F_n)_{n=0}^{\infty} \in \mathcal{E}$ и $\|\Phi\|_{-p} < \infty$. Тогда $S\Phi(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty}\langle F_n, \xi^{\otimes n}\rangle$ и для $h_1, \dots, h_k \in E_{\mathbb{C}}$ выполняется

$$d_{h_1}\dots d_{h_k}S\Phi(\xi) = \sum_{n=k}^{\infty}\langle \frac{n!}{(n-k)!}F_n, \xi^{\otimes(n-k)}\widehat{\otimes}(h_1\widehat{\otimes}\dots\widehat{\otimes}h_k)\rangle.$$

Пусть $q_k = \sup_{n\in\mathbb{N}, n\geq k}\frac{(\ln n! - \ln(n-k)!}{2n\ln\lambda_1}$. Тогда при $n \geq k$ выполняется

$$|F_n|_{-p} \geq \lambda_1^{q_k n}|F_n|_{-p-q_k} = \left(\frac{n!}{(n-k)!}\right)^{\frac{1}{2}}|F_n|_{-p-q_k}.$$

Учитывая (1.3), мы получаем:

$$|d_{h_1}\dots d_{h_k}S\Phi(\xi)| \leq \prod_{i=1}^{k}|h_i|_{p+q_k}(\sum_{n=k}^{\infty}\frac{n!}{(n-k)!}|F_n|_{-p-q_k}|\xi|^{n-k}_{p+q_k}) \leq$$

$$\leq \prod_{i=1}^{k}|h_i|_{p+q_k}(\sum_{n=k}^{\infty}\sqrt{n!}|F_n|_{-p}\frac{1}{\sqrt{(n-k)!}}|\xi|^{n-k}_{p+q_k}) \leq$$

$$\leq \prod_{i=1}^{k}|h_i|_{p+q_k}(\sum_{n=0}^{\infty}n!|F_n|^2_{-p})^{\frac{1}{2}}(\sum_{n=0}\frac{1}{n!}|\xi|^{2n}_{p+q_k})^{\frac{1}{2}} \leq \prod_{i=1}^{k}|h_i|_{p+q_k}\|\Phi\|_{-p}e^{\frac{1}{2}\|\xi\|_{p+q_k}} \quad (1.4)$$

Аналогично учитывая, что $|\xi_1^{\otimes k} - \xi_2^{\otimes k}|_p \leq k|\xi_1 - \xi_2|_p \sup_{\xi\in\{\xi_1,\xi_2\}}|\xi|_p^{k-1}$, мы получаем:

$$|d_{h_1}\dots d_{h_k}S\Phi(\xi_1) - d_{h_1}\dots d_{h_k}S\Phi(\xi_2)| \leq$$

$$\leq \prod_{i=1}^{k}|h_i|_{p+q_{k+1}}|\xi_1 - \xi_2|_{p+q_{k+1}}\|\Phi\|_{-p}\sup_{\xi\in\{\xi_1,\xi_2\}}e^{\frac{1}{2}|\xi|^2_{p+q_{k+1}}}. \quad (1.5)$$

Тогда мы можем по индукции получить бесконечную дифференцируемость по Фреше функции $S\Phi$. Для $k = 1$ в силу (1.4) мы получаем, что существует производная Гато $S\Phi'(\xi) \in E^*_{\mathbb{C}}$, а в силу (1.5) $\xi \mapsto S\Phi'(\xi)$ непрерывно.

Тогда по теореме о непрерывной производной (см. [17]) $S\Phi$ дифференцируема по Фреше. Пусть $L_0^b = \mathbb{C}$ и $L_k^b = L^b(E_\mathbb{C}, L_{k-1}^b)$. Пусть $k \geq 2$. Если $S\Phi$ $(k-1)$ раз дифференцируема по Фреше, то в силу (1.4) мы получаем, что существует производная Гато $S\Phi^{(k)}(\xi) \in L_k^b$, а в силу (1.5) $\xi \mapsto S\Phi^{(k)}(\xi) \in L_k^b$ непрерывно. Тогда по теореме о непрерывной производной функция $S\Phi^{(k-1)}$ дифференцируема по Фреше. $\square$

По теореме о ядре (см. например [37] и имеющиеся там ссылки) существует канонический топологический изоморфизм между $L^b(E_\mathbb{C}, E_\mathbb{C}^*)$ и $(E_\mathbb{C} \otimes E_\mathbb{C})^*$. Поэтому ниже будет использоваться обозначение $\langle F''(\xi), \zeta \otimes \eta\rangle$ для $\langle F''(\xi)\zeta, \eta\rangle$.

С помощью S-преобразования определяются неклассические и экзотические лапласианы Леви и экзотические лапласианы Леви на пространстве обобщенных функционалов $\mathcal{E}^*$.

Определение 5. *Обобщенный функционал $\Phi \in \mathcal{E}^*$ лежит в области определения $Dom\Delta_R^L$ неклассического лапласиана Леви Δ_R^L, порожденного линейным оператором $R\colon span\{e_n\colon n \in \mathbb{N}\} \to E_\mathbb{C}$, тогда и только тогда, когда для всех $\xi \in E_\mathbb{C}$ существует $C_1((\langle S\Phi''(\xi), Re_n \otimes Re_n\rangle))$ и функция $E_\mathbb{C} \ni \xi \mapsto C_1((\langle S\Phi''(\xi), Re_n \otimes Re_n\rangle))$ является U-функционалом. Если $\Phi \in Dom\Delta_R^L$, то $\Delta_R^L\Phi$ — это такой обобщенный функционал из $\mathcal{E}^*$, что для всех $\xi \in E_\mathbb{C}$ выполняется $S\Delta_R^L\Phi(\xi) = C_1((\langle S\Phi''(\xi), Re_n \otimes Re_n\rangle))$.*

Определение 6. *Обобщенный функционал $\Phi \in \mathcal{E}^*$ лежит в области определения $Dom\Delta_L^l$ ($l \geq 0$) экзотического лапласиана Леви Δ_L^l тогда и только тогда, когда для всех $\xi \in E_\mathbb{C}$ существует $C_l((\langle S\Phi''(\xi), e_n \otimes e_n\rangle))$ и функция $E_\mathbb{C} \ni \xi \mapsto C_l((\langle S\Phi''(\xi), e_n \otimes e_n\rangle))$ является U-функционалом. Если $\Phi \in Dom\Delta_L^l$, то $\Delta_L^l\Phi$ — это такой обобщенный функционал из $\mathcal{E}^*$, что для всех $\xi \in E_\mathbb{C}$ выполняется $S\Delta_L^l\Phi(\xi) = C_l((\langle S\Phi''(\xi), e_n \otimes e_n\rangle))$.*

Замечание 2. *Известно, что* $\Delta_L \Phi = 0$, *если* $\Phi \in \Gamma(H_{\mathbb{C}})$ *(см. например [31]).*

Определим оператор дифференцирования d на $span\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$, следующим образом:

$$de_n = \begin{cases} 0, & \text{если } n = 0 \\ 2\pi k e_{2k+1}, & \text{если } n = 2k \\ -2\pi k e_{2k}, & \text{если } n = 2k+1, \end{cases}$$

где $k \in \mathbb{N}$.

Предложение 4. *Если* d *продолжается до непрерывного оператора на* $E_{\mathbb{C}}$ *(который мы будем обозначать тем же символом* d*), то для любого* $\xi \in E_{\mathbb{C}}$ $d\xi(t) = \xi'(t)$ *при* $t \in [0,1]$.

Доказательство. Действительно, если $\xi \in E_{\mathbb{C}}$ и $d\xi \in E_{\mathbb{C}}$, то $\sum_{n=1}^{\infty} e_n(t)\langle \xi, e_n\rangle \rightrightarrows \xi$ и $\sum_{n=1}^{\infty} e_n(t)\langle d\xi, e_n\rangle \rightrightarrows d\xi$ на $[0,1]$, а $\sum_{n=1}^{\infty}(e_n(t)\langle d\xi, e_n\rangle - e_n'(t)\langle \xi, e_n\rangle) \rightrightarrows 0$ на $[0,1]$, т.к.

$$\sum_{n=1}^{N}(e_n(t)\langle d\xi, e_n\rangle - e_n'(t)\langle \xi, e_n\rangle) =$$

$$= \begin{cases} -2\pi k(e_{2k+1}(t)\langle \xi, e_{2k}\rangle + e_{2k}(t)\langle \xi, e_{2k+1}\rangle), & \text{если } N = 2k \\ 0, & \text{если } N = 2k+1, \end{cases}$$

где $k \in \mathbb{N}$. □

Предложение 5. *Если выполняются следующие условия на собственные числа* $\{\lambda_n\}$ *оператора* A: $\sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{\lambda_{2k+1}}{\lambda_{2k}} = \gamma < \infty$ *и существует такое* $\beta > 0$, *что* $k < \lambda_{2k+1}^{\beta}$ *для любого* $k \in \mathbb{N}$, *то* d *продолжается до непрерывного оператора на пространстве* $E_{\mathbb{C}}$, *который мы будем обозначать тем же символом* d. *(Эти условия равносильны условиям из [22].)*

Доказательство. Действительно, если $\xi \in span\{e_n \colon n \in \mathbb{N}\}$, то для любого $q \in \mathbb{R}$

$$|d\xi|_q^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{2q} |(d\xi, e_k)_0|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{2k+1}^{2q} (2\pi k) |(\xi, e_{2k})_0|^2 +$$
$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{2k}^{2q} (2\pi k) |(\xi, e_{2k+1})_0|^2 \leq 2\pi\gamma^{2q+\beta} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{2q+\beta} |(\xi, e_k)_0|^2 = 2\pi\gamma^{2q+\beta} |\xi|_{q+\frac{\beta}{2}}^2.$$

Тогда $|d\xi|_q \leq \sqrt{2\pi\gamma^{q2+\beta}} |\xi|_{q+\frac{\beta}{2}}$ и d продолжается до непрерывного оператора на пространстве $E_{\mathbb{C}}$. □

Ниже в этом параграфе считается, что d — непрерывный оператор на $E_{\mathbb{C}}$. Тогда d^* — непрерывный оператор на $E_{\mathbb{C}}^*$, его сужение на $E_{\mathbb{C}}$ совпадает с $-d$. Обозначим символом E_d замыкание $span\{e_n \colon n \in \mathbb{N}, n > 1\}$ в $E_{\mathbb{C}}$. Пусть τ_0' — оператор обратный оператору d на пространстве E_d. Пусть $\tau_\lambda \in L(E_{\mathbb{C}}, E_{\mathbb{C}})$ такой, что $\tau_\lambda(e_1) = \lambda e_1$ $(\lambda \in \mathbb{C})$ и сужение τ_λ на E_d совпадает с τ_0'. При $\lambda \neq 0$ τ_λ — топологический автоморфизм пространства $E_{\mathbb{C}}$.

Будем обозначать $\Delta_L^{d,l} = \Delta_{d^l}^L$ и $\Delta_L^{d,-l} = \Delta_{\tau_\lambda^l}^L$ при $l \in \mathbb{Z}_+$. Заметим, что определение оператора $\Delta_{\tau_\lambda^l}^L$ не зависит от выбора $\lambda \in \mathbb{C}$. Аналогично теореме 1 мы получаем следующее предложение для лапласианов Леви на обобщенных белошумных функционалах:

Предложение 6. *Если $l \in \mathbb{N}$, то* $\pi^{2l} \Delta_L^{d,-l} = (2l+1) \Delta_L^{2l+1}$.

Доказательство. Пусть символ π_1 обозначает следующую перестановку натуральных чисел: $1 \to 1$, $2k+1 \to 2k$, $2k \to 2k+1$ при $k \in \mathbb{N}$. Если $(a_n) \in \mathbb{C}^\infty$, тогда $C_1(((2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor)^{-2l} a_{\pi_1^l(n)}) = C_1((\frac{1}{n^{2l}} a_n))$. Из леммы 3 следует

$$\pi^{2l} C_1((\langle S\Phi''(\xi), \tau_\lambda^l e_n \otimes \tau_\lambda^l e_n \rangle)) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(2\lfloor \frac{k}{2} \rfloor)^{2l}} \langle S\Phi''(\xi), e_{\pi_1(k)} \otimes e_{\pi_1(k)} \rangle = (2l+1) C_{2l+1}((\langle S\Phi''(\xi), e_k \otimes e_k \rangle)).$$

□

Пусть $T \in L(E_{\mathbb{C}}, E_{\mathbb{C}})$, тогда его второе квантование — это оператор $\Gamma(T) \in L(\mathcal{E}, \mathcal{E})$ однозначно определяемый так:

$$\Gamma(T)\psi_\xi = \psi_{T\xi}.$$

В [37] доказывается, что каждый T из $L(E_{\mathbb{C}}, E_{\mathbb{C}})$ обладает своим вторым квантованием. Для второго квантования выполняется:

$$S(\Gamma(T)^*\Phi)(\xi) = (S\Phi \circ T)(\xi) = S\Phi(T\xi). \tag{1.6}$$

Выполняется следующая теорема о связи между экзотическими лапласианами Леви:

Теорема 2. *Пусть* $l \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{N}$. *Пусть* $\Phi \in Dom\Delta_L^{d,l}$, *тогда* $\Delta_L^{d,(l-k)}\Gamma(d^k)^*\Phi = \Gamma(d^k)^*\Delta_L^{d,l}\Phi$, *и* $\Delta_L^{d,(l+k)}\Gamma(\tau_\lambda^k)^*\Phi = \Gamma(\tau_\lambda^k)^*\Delta_L^{d,l}\Phi$ *для всех* $\lambda \in \mathbb{C}$.

Доказательство. Докажем вторую формулу теоремы для случая $-k \le l \le 0$. Действительно, в силу (1.6):

$$S(\Gamma(\tau_\lambda^k)^*\Delta_L^{d,l}\Phi)(\xi) = S(\Delta_L^{d,l}\Phi)(\tau_\lambda^k\xi) = C_1(((\langle S\Phi''(\tau_\lambda^k\xi), \tau_\lambda^{-l}e_n \otimes \tau_\lambda^{-l}e_n\rangle)) =$$
$$= C_1(((\langle (S\Phi \circ \tau_\lambda^k))''(\xi), d^{l+k}e_n \otimes d^{l+k}e_n\rangle)) = S(\Delta_L^{d,(l+k)}\Gamma(\tau_\lambda^k)^*\Phi)(\xi).$$

В остальных случаях теорема доказывается аналогично. □

Заметим, что при $\lambda \neq 0$ $\Gamma(\tau_\lambda)$ — топологический автоморфизм пространства $\mathcal{E}$. Как прямое следствие теоремы 2 и предложения 6 мы получаем следующую теорему:

Теорема 3. *Пусть* $l \in \mathbb{Z}_+$ *и* $k \in \mathbb{N}$. *Если* $\Phi \in Dom\Delta_L^{2l+1}$, *то*

$$\Delta_L^{2(k+l)+1}\Gamma(d^k)^*\Phi = \frac{\pi^{2k}(2l+1)}{2(k+l)+1}\Gamma(d^k)^*\Delta_L^{2l+1}\Phi. \tag{1.7}$$

Если $\Phi \in Dom\Delta_L^{2(l+k)+1}$, *то*

$$\Delta_L^{2l+1}\Gamma(\tau_\lambda^k)^*\Phi = \frac{2(k+l)+1}{\pi^{2k}(2l+1)}\Gamma(\tau_\lambda^k)^*\Delta_L^{2(l+k)+1}\Phi.$$

Замечание 3. *Пусть* $H^0_{\mathbb{C}} = \{f \in L_2([0,1],\mathbb{C}) \colon \int_0^1 f(r)dr = 0\}$ *и в* H_0 *выбран ортонормированный базис:* $e_{2k-1}(t) = \sqrt{2}\sin 2k\pi t$ *и* $e_{2k}(t) = \sqrt{2}\cos 2k\pi t$ *при* $k \in \mathbb{N}$. *С помощью сужения оператора* A *на* H^0_C *мы получаем оснащенное гильбертово пространство* $E_d \subset H^0_{\mathbb{C}} \subset E^*_d$ *и его пространство Хиды-Кубо-Такенаки* $\mathcal{E}_d \subset L_2(E^*_{d\mathbb{R}}, \mu_{dI}, \mathbb{C}) \cong \Gamma(H_0) \subset \mathcal{E}^*_d$. *Пусть числа* $\{\lambda_k\}_{k=2}^{\infty}$, *такие, что оператор дифференцирования* d *становится топологическим автоморфизмом пространства* E_d. *Определение обобщенных и неклассических Лапласианов-Леви без изменений переносятся на пространство* $\mathcal{E}^*_d$. *Мы получаем, что для* $l, k \in \mathbb{Z}$, *если* $\Phi \in Dom\Delta^{d,l}_L$, *то* $\Delta^{d,(l-k)}_L \Gamma(d^k)^* = \Gamma(d^k)^* \Delta^{d,l}_L$. *Как следствие, если* $l, k \in \mathbb{Z}_+$ *и* $l + k \geq 0$, *то*

$$\Delta^{2(k+l)+1}_L \Gamma(d^k)^* = \frac{\pi^{2k}(2l+1)}{2(k+l)+1} \Gamma(d^k)^* \Delta^{2l+1}_L. \tag{1.8}$$

Теорема 3 была сформулирована в [22] в виде (1.7) на пространстве $\mathcal{E}^*_d$ *и была доказана в [44].*

Глава 2

Квантовая вероятность и лапласианы Леви

2.1 Классический лапласиан Леви и процесс уничтожения

Следуя [38, 40], будем называть непрерывное отображение отрезка $[0,1]$ в пространство $\mathcal{E}^*$ стохастическим процессом (в смысле белошумного анализа), а непрерывное отображение отрезка $[0,1]$ в $L^b(\mathcal{E},\mathcal{E}^*)$ квантовым стохастическим процессом. Т.к. поточечное умножение в $\mathcal{E}$ продолжается до непрерывного отображения из $\mathcal{E}^* \times \mathcal{E}$ в $\mathcal{E}^*$ (см. [37]), то существует непрерывное вложение $id : \mathcal{E}^* \hookrightarrow L^b(\mathcal{E},\mathcal{E}^*)$, которое определяется так: $id\Phi\colon \phi \mapsto \Phi\phi$ для $\Phi \in \mathcal{E}^*$.

В [34] доказывается (см. также [31]), что комплекснозначная функция ϕ, определенная на $E^*_{\mathbb{R}}$, принадлежит $\mathcal{E}$ тогда и только тогда, когда существует ее продолжение $\widetilde{\phi}$ на $E^*_{\mathbb{C}}$ такое, что для любого $p \geq 0$ сужение $\widetilde{\phi}$ на E_{-p} аналитично (т.е. сужение $\widetilde{\phi}$ на E_{-p} всюду дифференцируемо по Фреше) и для любого $p \geq 0$ существует такое $K_p > 0$, что для каждого $x \in E_{-p}$ выполняется оценка:

$$|\widetilde{\phi}(x)| \leq K_p e^{\frac{1}{2}\|x\|^2_{-p}}.$$

Определим оператор $b(\zeta)$, как оператор дифференцирования в $\mathcal{E}$ по направлению $\zeta \in E_{\mathbb{R}}^*$:

$$b(\zeta)\phi(\xi) = \lim_{t\to 0}(\phi(\xi + t\zeta) - \phi(\xi))/t = d_\zeta\phi(\xi), \xi \in E_{\mathbb{R}}^*, \phi \in \mathcal{E}.$$

Известно, что если $\zeta \in E_{\mathbb{R}}^*$, то $b(\zeta) \in L^b(\mathcal{E}, \mathcal{E})$. Если $\zeta \in E_{-q}$ и $p > q$ причем $2\lambda_1^{-2(p-q)} \leq 1$, то для любого $\varphi \in \mathcal{E}$:

$$\|b(\zeta)\varphi\|_q \leq \lambda_1^{-(p-q)}|\zeta|_{-q}\|\varphi\|_p. \tag{2.1}$$

Если $\zeta \in \mathcal{E}$, то $b(\zeta)$ продолжается до непрерывного оператора $\widetilde{b}(\zeta)$ на пространстве $\mathcal{E}^*$ (см. [31]).

Предложение 7. *Для оператора $\widetilde{b}(\zeta)$, где $\zeta \in E_{\mathbb{R}}$, выполняется*

$$S(\widetilde{b}(\zeta)\Phi)(\xi) = \langle S\Phi'(\xi), \zeta\rangle, \Phi \in \mathcal{E}^*, \xi \in E_{\mathbb{C}}. \tag{2.2}$$

Доказательство. Пусть $F \in (E_{\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes} n+1})^*$ и $\xi \in E_{\mathbb{C}}$, тогда $F\widehat{\otimes}_1\xi$ такой элемент из $(E_{\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes} n})^*$, что для любого $h \in E_{\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes} n}$ выполняется $\langle F\widehat{\otimes}_1\zeta, h\rangle = \langle F, h\widehat{\otimes}\zeta\rangle$. Известно, что отображение $\widehat{\otimes}_1\colon (E_{\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes} n+1})^* \times E_{\mathbb{C}} \to (E_{\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes} n})^*$ раздельно непрерывно и для $\phi = (f_n)_{n=0}^\infty \in \mathcal{E}$ выполняется $b(\zeta)\phi = (nf_n\widehat{\otimes}_1\zeta)_{n=0}^\infty$ (см. например [37]). В силу непрерывности $\widetilde{b}(\zeta)$ на $\mathcal{E}^*$, для $\Phi = (F_n)_{n=0}^\infty \in \mathcal{E}$ выполняется $\widetilde{b}(\zeta)\Phi = (nF_n\widehat{\otimes}_1\zeta)_{n=0}^\infty$. Следовательно,

$$S(\widetilde{b}(\zeta)\Phi)(\xi) = \langle\langle\widetilde{b}(\zeta)\Phi, \phi_\xi\rangle\rangle = \sum_{n=0}^\infty \langle nF_n\widehat{\otimes}_1\zeta, \xi^{\otimes n}\rangle =$$

$$= \sum_{n=1}^\infty n\langle F_n, \xi^{\otimes(n-1)}\widehat{\otimes}\zeta\rangle = \langle S\Phi'(\xi), \zeta\rangle.$$

□

Заметим, что пространство $E_{\mathbb{R}}$ также обладает свойствами 1)-3) предложения 2. В силу того, что $t \mapsto \delta_t \in E_{\mathbb{R}}^*$ непрерывно и выполняется (2.1), отображение $t \mapsto b_t = b(\delta_t) \in L^b(\mathcal{E}, \mathcal{E})$ — квантовый случайный процесс. Этот квантовый случайный процесс называется процессом уничтожения (оператор b_t также называют оператором дифференцирования Хиды). Отображение $t \mapsto b_t^* = b(\delta_t)^*$ является квантовым случайным процессом, который называется процессом рождения. Пусть $B_t = (B^t_n)_{n=0}^\infty \in \mathcal{E}^*$, где $B^t_1 = \mathbf{1}_{[0,t]}$ и $B^t_n = 0$ при $n \neq 1$. Тогда $t \mapsto B_t \in \Gamma(H_{\mathbb{C}}) \cong L^b_2(E^*, \mu_I, \mathbb{C})$ — винеровский процесс. Его производная — процесс белого шума $W_t = (W^t_n)_{n=0}^\infty \in \mathcal{E}^*$, где $W^t_1 = \delta_t$ и $W^t_n = 0$ при $n \neq 1$. Тогда $idW_t = b_t + b^*_t$ (см. [37, 40]).

Известно, что, если $\phi, \varphi \in \mathcal{E}$, то $\eta_{\phi,\varphi}(s,t) = \langle\langle b_s b_t \phi, \varphi \rangle\rangle \in E^{\otimes 2}_{\mathbb{C}}$. Если $\kappa \in (E^{\otimes 2}_{\mathbb{C}})^*$, то существует единственный непрерывный линейный оператор $\Xi_{0,2}(\kappa)$ из $\mathcal{E}$ в $\mathcal{E}^*$ такой, что $\langle\langle \Xi_{0,2}(\kappa)\phi, \varphi \rangle\rangle = \langle \kappa, \eta_{\phi,\varphi} \rangle$. (Это частный случай интегрального ядерного оператора (integral kernel operator). Более того, $\Xi_{0,2}(\kappa) \in L^b(\mathcal{E}, \mathcal{E})$, и для любых $p \in \mathbb{R}$ и $q > 0$ существует $C > 0$, что выполняется

$$\|\Xi_{0,2}(\kappa)\|_p < C|\kappa|_{-q-p}\|\phi\|_{q+p} \tag{2.3}$$

при $\kappa \in E^{\otimes 2}_{-q-p}$ для всех $\phi \in \mathcal{E}$. Если $\kappa \in E^{\otimes 2}_{\mathbb{C}}$, то $\Xi_{0,2}(\kappa)$, продолжается до непрерывного оператора из $\mathcal{E}^*$ в $\mathcal{E}^*$ (см. например [37]). Это продолжение мы будем обозначать символом $\widetilde{\Xi}_{0,2}(\kappa)$.

Пусть

$$J_\varepsilon = \{(s,t) \in [0,1] \times [0,1] \colon \|s - t\|_T \leq \varepsilon\},$$

где $\|t\|_T = \min_{k \in \mathbb{Z}} |t - k|$. Пусть $\theta(\varepsilon) = \mathbf{1}_{J_\varepsilon} \in L_2([0,1] \times [0,1])$. (Здесь и ниже символом $\mathbf{1}_C$ обозначается индикатор множества C.) Тогда $\theta(\varepsilon) \in (E^{\otimes 2}_{\mathbb{C}})^*$ такой, что для $f, g \in E_{\mathbb{C}}$ выполняется

$$\langle \theta(\varepsilon), f \otimes g \rangle = \int\limits_{\|s-t\|_T < \varepsilon} f(s)g(t)dsdt,$$

Тогда

$$\langle\langle \Xi_{0,2}(\theta(\varepsilon))\phi, \varphi \rangle\rangle = \int\limits_{\|s-t\|_T < \varepsilon} \langle\langle b_s b_t \phi, \varphi \rangle\rangle dsdt$$

для всех $\phi, \varphi \in \mathcal{E}$. Обозначим $\theta_n(\varepsilon) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle \theta(\varepsilon), e_i \otimes e_j \rangle e_i \otimes e_j$. Тогда

$$\theta_n(\varepsilon) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\int\limits_{\|s-t\|_T < \varepsilon} e_i(s)e_j(t)dsdt \right) e_i \otimes e_j =$$

$$= (2\varepsilon - \varepsilon^2)e_1 \otimes e_1 + \sum_{i=2}^n \frac{\sin 2\pi \lfloor \frac{i}{2} \rfloor \varepsilon}{\pi \lfloor \frac{i}{2} \rfloor} e_i \otimes e_i, \tag{2.4}$$

т.к.

$$\int\limits_{\|s-t\|_T<\varepsilon} \sqrt{2}\cos 2\pi nt\sqrt{2}\cos 2\pi ks\ dtds =$$

$$= \int\limits_{\|s-t\|_T<\varepsilon} \sqrt{2}\sin 2\pi nt\sqrt{2}\sin 2\pi ks\ dtds = \frac{\sin 2\pi n\varepsilon}{\pi n}\delta_{nk},$$

$$\int\limits_{\|s-t\|_T<\varepsilon} \sin 2\pi kt\cos 2\pi ns\ dtds = 0,$$

$$\int\limits_{\|s-t\|_T<\varepsilon} \sin 2\pi kt\ dtds = \int\limits_{\|s-t\|_T<\varepsilon} \cos 2\pi kt\ dtds = 0.$$

В силу (2.3) выполняется $\lim_{n\to\infty}\Xi_{0,2}(\theta_n(\varepsilon)) = \Xi_{0,2}(\theta(\varepsilon))$ в $L^b(\mathcal{E},\mathcal{E})$. Если $\zeta_1,\zeta_2\in E^*_{\mathbb{R}}$, то $\Xi_{0,2}(\zeta_1\otimes\zeta_2) = b(\zeta_1)b(\zeta_2)$ (см. например [37]). Тогда в силу (2.4):

$$\Xi_{0,2}(\theta_n) = (2\varepsilon-\varepsilon^2)b^2(e_1) + \sum_{i=2}^{n}\frac{\sin 2\pi\lfloor\frac{i}{2}\rfloor\varepsilon}{\pi\lfloor\frac{i}{2}\rfloor}b^2(e_i). \tag{2.5}$$

Рассмотрим топологию $\sigma_1 = \sigma(\mathcal{E}^*, span\{\psi_\xi\colon \xi\in E\})$ на линейном пространстве $\mathcal{E}^*$, т.е. топологию, порожденную семейством норм $\|\cdot\|_\xi = |S(\cdot)(\xi)|$. $\widetilde{(\mathcal{E}^*,\sigma_1)}$ — пополнение $\mathcal{E}^*$ по топологии σ_1. Пусть $\mathcal{G}$ — секвенциальное замыкание $\mathcal{E}^*$ в $\widetilde{(\mathcal{E}^*,\sigma_1)}$.

Теорема 4. *Если $\Phi\in\mathcal{E}^*$ такое, что*

$$\langle S\Phi''(\xi),\zeta\otimes\eta\rangle = \int\limits_{[0,1]\times[0,1]} \zeta(t)\eta(s)d\mu_\xi(s,t) \tag{2.6}$$

для всех $\xi,\zeta,\eta\in E_{\mathbb{C}}$, где μ_ξ — борелевская комплекснозначная мера на $[0,1]\times[0,1]$ и $\Phi\in Dom\Delta_L$, то

$$\Delta_L\Phi = \lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{n\to\infty}\widetilde{\Xi}_{0,2}(\theta_n(\varepsilon))\Phi,$$

где сходимость понимается как сходимость в $\mathcal{G}$.

Доказательство. Пусть

$$J = \{(s,t) \in [0,1]\times[0,1] \colon \|s-t\|_T = 0\} = \\ = \{(s,t)\in[0,1]\times[0,1] \colon s=t\} \cup \{0,1\} \cup \{1,0\}.$$

Ортонормированный базис $\{e_n\}$ обладает свойствами:

1. $\sup_{n\in\mathbb{N}} |\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e_k(s)e_k(t)| < 2$ при $(s,t)\in[0,1]\times[0,1]$;

2. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e_k(s)e_k(t) = \mathbf{1}_J(s,t)$ поточечно.

Тогда, если Φ удовлетворяет условиям теоремы, то по теореме Лебега

$$S(\Delta_L\Phi)(\xi) = \int\limits_{[0,1]\times[0,1]} \mathbf{1}_J(s,t)d\mu_\xi(s,t).$$

Для того чтобы доказать теорему, достаточно доказать, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{n\to\infty} S(\widetilde{\Xi}_{0,2}(\theta_n(\varepsilon))\Phi)(\xi) = \int\limits_{[0,1]\times[0,1]} \mathbf{1}_J(s,t)d\mu_\xi(s,t).$$

В силу (2.5) и (2.2) выполняется

$$S(\widetilde{\Xi}_{0,2}(\theta_n(\varepsilon))\Phi)(\xi) = \\ = S(\left((2\varepsilon-\varepsilon^2)\widetilde{b}^2(e_1) + \sum_{i=2}^{n} \frac{\sin 2\pi\lfloor\frac{i}{2}\rfloor\varepsilon}{\pi\lfloor\frac{i}{2}\rfloor}\widetilde{b}^2(e_i)\right)\Phi)(\xi) = \\ = \int\limits_{[0,1]\times[0,1]} \left((2\varepsilon-\varepsilon^2)e_1(s)e_1(t) + \sum_{i=2}^{n} \frac{\sin 2\pi\lfloor\frac{i}{2}\rfloor\varepsilon}{\pi\lfloor\frac{i}{2}\rfloor} e_i(s)e_i(t)\right) d\mu_\xi(s,t)).$$

Ряд Фурье для дробной части $\{x\}$ сходится к $\{x\}$ при $x\not\subseteq\mathbb{N}$:

$$\{x\} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin 2\pi n x,$$

причем частичные суммы этого ряда равномерно ограничены. Тогда

$$\sum_{i=2}^{\infty}\frac{\sin 2\pi\lfloor\frac{i}{2}\rfloor\varepsilon}{\pi\lfloor\frac{i}{2}\rfloor}e_i(s)e_i(t)=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2\pi n\varepsilon)}{\pi n}2(\cos(2\pi ns)\cos(2\pi nt)+\sin(2\pi ns)\sin(2\pi nt))=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi n}\sin(2\pi n\varepsilon)\cos 2\pi n(s-t)=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi n}(\sin 2\pi n(\varepsilon+s-t)+\sin 2\pi n(\varepsilon+t-s))=$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{2}-\{\varepsilon+s-t\}+\frac{1}{2}-\{\varepsilon+t-s\}, & \text{если } \|t-s\|_T\neq\varepsilon\\ 1-\{2\varepsilon\}, & \text{если } \|t-s\|_T=\varepsilon,\end{cases}$$

причем частичные суммы этого ряда равномерно ограничены на $[0,1]\times[0,1]$. Тогда при достаточно малых $\varepsilon>0$

$$\lim_{n\to\infty}\left((2\varepsilon-\varepsilon^2)e_1(s)e_1(t)+\sum_{i=2}^{n}\frac{\sin 2\pi\lfloor\frac{i}{2}\rfloor\varepsilon}{\pi\lfloor\frac{i}{2}\rfloor}e_i(s)e_i(t)\right)=$$

$$=g_\varepsilon(s,t)\colon=\begin{cases}1-\varepsilon^2, & \text{если } \|t-s\|_T\leq\varepsilon\\ -\varepsilon^2, & \text{если } \|t-s\|_T>\varepsilon.\end{cases}$$

По теореме Лебега мы получаем

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{n\to\infty}S(\widetilde{\Xi}_{0,2}(\theta_n)\Phi)(\xi)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{[0,1]\times[0,1]}g_\varepsilon(s,t)d\mu_\xi(s,t)=\int\limits_{[0,1]\times[0,1]}\mathbf{1}_J(s,t)d\mu_\xi(s,t).$$

$\square$

Приведем пример такого обобщенного белошумного функционала Φ, лежащего в области определения оператора Лапласа-Леви $Dom\Delta_L$, что $S\Phi''$ не представляется в виде (2.6) и при этом $\Delta_L\Phi\neq\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{n\to\infty}\widetilde{\Xi}_{0,2}(\theta_n(\varepsilon))\Phi$.

Пример 2. *Пусть собственные числа $\{\lambda_k\}$ оператора A удовлетворяют следующему условию: существует такое $\alpha>0$, что $\sum_{k=1}^{\infty}k^2\lambda_{2k^2}^{-4\alpha}<\infty$.*

Тогда $\sum_{k=1}^{\infty} ke_{2k^2}\otimes e_{2k^2} \in (E^*)^{\widehat{\otimes}2}$ *и* $F_1(\xi) = \langle\sum_{k=1}^{\infty} ke_{2k^2}\otimes e_{2k^2}, \xi\otimes\xi\rangle$ *является* U*-функционалом и, следовательно,* S*-преобразованием некоторого обобщенного функционала* Φ_1 *из* $\mathcal{E}^*$*. Покажем, что* Φ_1 *лежит в области определения лапласиана Леви. Пусть для любого натурального* $N>1$ *число* n_N *определяется так:* $n_N = \max\{i\in\mathbb{N}\colon 2i^2\le N\}$*. Тогда*

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\langle F_1''(\xi), e_i\otimes e_i\rangle = \langle\sum_{k=1}^{\infty} 2ke_{2k^2}\otimes e_{2k^2}, \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} e_i\otimes e_i\rangle = \frac{2}{N}\sum_{k=1}^{n_N} k$$

и, следовательно, $\frac{n_N(n_N+1)}{2(n_N+1)^2} \le \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\langle F_1''(\xi), e_k\otimes e_k\rangle \le \frac{n_N(n_N+1)}{2n_N^2}$*. Тогда* $\Delta_L\Phi_1$ *существует и* $S(\Delta_L\Phi_1)(\xi) = 1/2$*.*

Теперь покажем, что не существует предела $\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{n\to\infty} S(\widetilde{\Xi}_{0,2}(\theta_n(\varepsilon))\Phi_1)(\xi)$*. Действительно, для любого* $N\in\mathbb{N}$*:*

$$S(\widetilde{\Xi}_{0,2}(\theta_N(\varepsilon))\Phi_1)(\xi) = S((\widetilde{b}^2(e_1)(2\varepsilon-\varepsilon^2) + \sum_{i=2}^{N}\widetilde{b}^2(e_i)\frac{\sin 2\pi\lfloor\frac{i}{2}\rfloor\varepsilon}{\pi\lfloor\frac{i}{2}\rfloor})\Phi_1)(\xi) =$$

$$= \langle F_1''(\xi), (2\varepsilon-\varepsilon^2)e_1\otimes e_1 + \sum_{i=2}^{N}\frac{\sin 2\pi\lfloor\frac{i}{2}\rfloor\varepsilon}{\pi\lfloor\frac{i}{2}\rfloor} e_i\otimes e_i\rangle = 2\sum_{k=1}^{n_N}\frac{\sin 2\pi k^2\varepsilon}{\pi k}.$$

Но ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin 2\pi k^2\varepsilon}{k}$ *расходится, если* $\varepsilon = \frac{1}{p}$*, где* p *— простое и* $p\equiv 3 \pmod 4$*. Действительно, т.к. при таких* p *квадратичная сумма Гаусса* $\sum_{k=1}^{p-1} e^{\frac{2\pi k^2 i}{p}}$ *равна* $\sum_{k=1}^{p}\sin\frac{2\pi k^2}{p} i = \sqrt{p} i$ *, то при* $l\in\mathbb{N}$ *выполняется*

$$\sum_{k=1}^{pl}\frac{\sin\frac{2\pi k^2}{p}}{k} = \sum_{n=1}^{l}\frac{\sqrt{p}}{pn+1} + \sum_{k=1}^{p}(1-k)\sin\frac{2\pi k^2}{p}\left(\sum_{n=1}^{l}\frac{1}{(np+1)(np+k)}\right)$$

и, следовательно, $\lim_{l\to\infty}\sum_{k=1}^{pl}\frac{\sin\frac{2\pi k^2}{p}}{k} = +\infty$*. Тогда* $\lim_{n\to\infty} S(\widetilde{\Xi}_{0,2}(\theta_n(\frac{1}{p}))\Phi_1)(\xi) = +\infty$ *и не существует конечного предела* $\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{n\to\infty} S(\widetilde{\Xi}_{0,2}(\theta_n(\varepsilon))\Phi_1)(\xi)$*.*

2.2 Неклассические лапласианы Леви и квантовые случайные процессы

В этом параграфе мы снова считаем, что оператор дифференцирования d — непрерывный оператор на $E_{\mathbb{C}}$. Оператор τ_0 на пространстве $E_{\mathbb{C}}$ и его сужение τ_0' на пространство E_d определяются как в параграфе 1.3. Заметим, что отображения $t \mapsto b((d^*)^l\delta_t) \in L^b(\mathcal{E},\mathcal{E})$ и $t \mapsto b((\tau_0^*)^l\delta_t) \in L^b(\mathcal{E},\mathcal{E})$ непрерывны и, следовательно, являются квантовыми стохастическими процессами.

Предложение 8. *Отображение $t \mapsto b_t \in L^b(\mathcal{E},\mathcal{E})$ бесконечно дифференцируемо, причем $b_t^{(l)} = b((d^*)^l\delta_t)$.*

Доказательство. Для каждого $\xi \in E_{\mathbb{R}}$ выполняется

$$\sup_{h\in[t-\varepsilon,t+\varepsilon]} |\langle \frac{1}{h}((d^*)^l\delta_{t+h} - (d^*)^l\delta_t) - ((d^*)^{l+1}\delta_t), \xi\rangle| =$$

$$= \sup_{h\in[t-\varepsilon,t+\varepsilon]} |\frac{1}{h}(\xi^{(l)}(t+h) - \xi^{(l)}(t)) - \xi^{(l+1)}(t)| \leq$$

$$\leq \sup_{h\in[t-\varepsilon,t+\varepsilon]} |\xi^{(l+1)}(t+h)) - \xi^{(l+1)}(t)| = \sup_{h\in[t-\varepsilon,t+\varepsilon]} |\langle (d^*)^{(l+1)}\delta_{t+h} - (d^*)^{(l+1)}\delta_t, \xi\rangle|.$$

Пусть B — ограниченное множество из $E_{\mathbb{R}}$, тогда

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{h\in[t-\varepsilon,t+\varepsilon]} \sup_{\xi\in B} |\langle \frac{1}{h}((d^*)^l\delta_{t+h} - (d^*)^l\delta_t^l) - ((d^*)^l\delta_t^{l+1}), \xi\rangle| \leq$$

$$\leq \lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{h\in[t-\varepsilon,t+\varepsilon]} \sup_{\xi\in B} |\langle (d^*)^{(l+1)}\delta_{t+h} - (d^*)^{(l+1)}\delta_t, \xi\rangle| = 0.$$

Последнее равенство выполняется в силу непрерывности отображения $t \mapsto (d^*)^l\delta_t \in E^*$. Так мы доказали бесконечную дифференцируемость отображения $t \mapsto \delta_t \in E_{\mathbb{R}}^*$. В силу (2.1) мы получаем бесконечно дифференцируемость отображения $t \mapsto \delta_t \in E_{\mathbb{R}}^*$ и $b_t^{(l)} = b((d^*)^l\delta_t)$. □

Предложение 9. *Пусть R — непрерывный оператор на $E_{\mathbb{R}}$. Тогда для всех $\phi, \varphi \in \mathcal{E}$ выполняется*

$$\langle\langle \Xi_{0,2}((R^* \otimes R^*)\theta(\varepsilon))\phi, \varphi\rangle\rangle = \int\limits_{\|s-t\|_T<\varepsilon} \langle\langle b(R^*\delta_t)b(R^*\delta_s)\phi, \varphi\rangle\rangle dtds.$$

Доказательство. Множество когерентных состояний плотно в $\mathcal{E}$. Достаточно доказать утверждение предложения для когерентных состояний $\phi = \phi_\zeta$ и любых $\varphi \in \mathcal{E}$. Т.к. $b(\xi)\phi_\zeta = \langle \xi, \zeta\rangle \phi_\zeta$ для любого $\xi \in E^*_{\mathbb{R}}$, выполняется

$$\langle\langle b(R^*\delta_t)b(R^*\delta_s)\phi_\zeta, \varphi\rangle\rangle = \langle\langle\ \langle R^*\delta_t, \zeta\rangle\langle R^*\delta_s, \zeta\rangle\phi_\zeta, \varphi\rangle\rangle = R\zeta(s)R\zeta(t)\langle\langle \phi_\zeta, \varphi\rangle\rangle =$$

$$= (R\otimes R)\zeta(s)\zeta(t)\langle\langle \phi_\zeta, \varphi\rangle\rangle = (R\otimes R)\langle\langle b_s b_t \phi_\zeta, \varphi\rangle\rangle = (R\otimes R)\eta_{\phi_\zeta,\varphi}(t,s).$$

Тогда мы получаем

$$\langle\langle \Xi_{0,2}((R^* \otimes R^*)\theta(\varepsilon))\phi_\zeta, \varphi\rangle\rangle = \langle \theta(\varepsilon), (R\otimes R)\eta_{\phi_\zeta,\varphi}\rangle =$$

$$= \int\limits_{\|s-t\|_T<\varepsilon} \langle\langle b(R^*\delta_t)b(R^*\delta_s)\phi, \varphi\rangle\rangle dtds.$$

□

Пусть $\theta^l(\varepsilon) = (d^* \otimes d^*)^l\theta(\varepsilon)$ при $l \in \mathbb{Z}_+$. В силу предложений 8 и 9 при $l \in \mathbb{Z}_+$ для всех $\phi, \varphi \in \mathcal{E}$ выполняется равенство

$$\langle\langle \Xi_{0,2}(\theta^l(\varepsilon))\phi, \varphi\rangle\rangle = \int\limits_{\|s-t\|_T<\varepsilon} \langle\langle b_s^{(l)} b_t^{(l)}\phi, \varphi\rangle\rangle dsdt.$$

Пусть $\theta^l(\varepsilon) = (\tau_0^* \otimes \tau_0^*)^{-l}\theta(\varepsilon)$ при $l \in \mathbb{Z}_-$. В силу предложения 9 при $l \in \mathbb{Z}_-$ для всех $\phi, \varphi \in \mathcal{E}$ выполняется равенство

$$\langle\langle \Xi_{0,2}(\theta^l(\varepsilon))\phi, \varphi\rangle\rangle = \int\limits_{\|s-t\|_T<\varepsilon} \langle\langle b((\tau_0^*)^{-l}\delta_t)b((\tau_0^*)^{-l}\delta_s)\phi, \varphi\rangle\rangle dsdt.$$

Для всех $l \in \mathbb{Z}$ пусть $\theta^l_n(\varepsilon) = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \langle \theta^l(\varepsilon), e_i \otimes e_j\rangle e_i \otimes e_j$. Тогда $\lim_{n\to\infty}\Xi_{0,2}(\theta^l_n(\varepsilon)) = \Xi_{0,2}(\theta^l(\varepsilon))$ в $L^b(\mathcal{E},\mathcal{E})$, причем каждый $\Xi_{0,2}(\theta^l_n(\varepsilon))$ продолжается до непрерывного на $\mathcal{E}^*$ оператора $\widetilde{\Xi}_{0,2}(\theta^l_n(\varepsilon))$. Выполняется следующая теорема:

Теорема 5. *Для $l \in \mathbb{Z}$ пусть $\Phi \in \mathcal{E}^*$ такое, что для каждого $\xi \in E_{\mathbb{C}}$ сужение $S\Phi''(\xi)$ на $E_d \otimes E_d$ представляется в виде*

$$\langle S\Phi''(\xi), \zeta_1 \otimes \eta_1 \rangle = \int\limits_{[0,1]\times[0,1]} (\tau_0')^l \zeta_1(t) (\tau_0')^l \eta_1(s) d\mu_\xi(s,t), \tag{2.7}$$

где $\zeta_1, \eta_1 \in E_d$ и μ_ξ — борелевская комплекснозначная мера на $[0,1]\times[0,1]$. Пусть $\Phi \in Dom\Delta_L^{d,l}$, тогда

$$\Delta_L^{d,l}\Phi = \lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{n\to\infty} \widetilde{\Xi}_{0,2}(\theta_n^l(\varepsilon))\Phi,$$

где сходимость понимается как сходимость в $\mathcal{G}$.

Доказательство. Рассмотрим случай $l < 0$, случай $l \geq 0$ доказывается аналогично. Если Φ удовлетворяет условиям теоремы, то $S(\Delta_L^{d,l}\Phi)(\xi) = \int_{[0,1]\times[0,1]} \mathbf{1}_J(s,t) d\mu_\xi(s,t)$. Т.к.

$$\theta_n^l(\varepsilon) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\int\limits_{\|s-t\|_T<\varepsilon} \tau_0^{-l} e_i(s) \tau_0^{-l} e_j(t) ds dt \right) e_i \otimes e_j =$$

$$= \sum_{i=2}^n \frac{\sin 2\pi \lfloor \frac{i}{2} \rfloor \varepsilon}{\pi \lfloor \frac{i}{2} \rfloor (2\pi \lfloor \frac{i}{2} \rfloor)^{2l}} e_i \otimes e_i,$$

то

$$S(\widetilde{\Xi}_{0,2}((\theta_n^l(\varepsilon))\Phi)(\xi) = S\left(\sum_{i=2}^n \frac{\sin 2\pi \lfloor \frac{i}{2} \rfloor \varepsilon}{\pi \lfloor \frac{i}{2} \rfloor (2\pi \lfloor \frac{i}{2} \rfloor)^{2l}} \widetilde{b}^2(e_i)\Phi \right)(\xi) =$$

$$= \int\limits_{[0,1]\times[0,1]} \sum_{i=2}^n \frac{\sin 2\pi \lfloor \frac{i}{2} \rfloor \varepsilon}{\pi \lfloor \frac{i}{2} \rfloor (2\pi \lfloor \frac{i}{2} \rfloor)^{2l}} d^{-l} e_i(s) d^{-l} e_i(t) d\mu_\xi(s,t) =$$

$$= \int\limits_{[0,1]\times[0,1]} \sum_{i=2}^n \frac{\sin 2\pi \lfloor \frac{i}{2} \rfloor \varepsilon}{\pi \lfloor \frac{i}{2} \rfloor} e_{\pi_1^l(i)}(s) e_{\pi_1^l(i)}(t) d\mu_\xi(s,t).$$

Как и в доказательстве теоремы 3 применима теорема Лебега:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{n\to\infty} S(\widetilde{\Xi}_{0,2}(\theta_n^l(\varepsilon))\Phi(\xi) = \int\limits_{[0,1]\times[0,1]} \mathbf{1}_J(s,t) d\mu_\xi(s,t) = S(\Delta_L^{d,l}\Phi)(\xi).$$

$\square$

Приведем пример такого обобщенного белошумного функционала Φ, лежащего в области определения оператора $\Delta_L^{d,l}$, что $S\Phi''$ не представляется в виде (2.7) и при этом $\Delta_L^{d,l}\Phi \neq \lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{n\to\infty}\widetilde{\widetilde{\Xi}}_{0,2}(\theta_n^l(\varepsilon))\Phi$.

Пример 3. *Рассмотрим Φ_1 из примера 2. По теореме 2 $\Gamma(\tau_\lambda^l)^*\Phi_1$ лежит в области определения $\Delta_L^{d,l}$. Теперь покажем, что не существует конечного предела $\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{n\to\infty} S(\widetilde{\widetilde{\Xi}}_{0,2}(\theta_n^l(\varepsilon))\Gamma(\tau_\lambda^l)^*\Phi_1)(\xi)$. Рассмотрим случай $l<0$, случай $l>0$ расматривается аналогично. Действительно, т.к. $S(\Gamma(\tau_\lambda^l)^*\Phi_1)(\xi) = S\Phi_1(\tau_\lambda^l\xi)$, для каждого натурального $N>1$ выполняется*

$$S(\widetilde{\widetilde{\Xi}}_{0,2}(\theta_N^l(\varepsilon))\Gamma(\tau_\lambda^l)^*\Phi_1)(\xi) =$$
$$= S((\sum_{i=2}^N \widetilde{b}^2(e_i)(\int_{\|s-t\|_T<\varepsilon} \tau_0^{-l}e_i(s)\tau_0^{-l}e_i(t)dsdt)\Gamma(\tau_\lambda^l)^*\Phi_1)(\xi) =$$
$$= \sum_{i=2}^N(\int_{\|s-t\|_T<\varepsilon} \tau_0^{-l}e_i(s)\tau_0^{-l}e_i(t)dsdt)d_{e_i}d_{e_i}(S\Phi_1\circ\tau_\lambda^l)(\xi) =$$
$$= \langle\sum_{k=1}^\infty 2ke_{2k^2}\otimes e_{2k^2}, \sum_{i=2}^N \frac{\sin 2\pi\lfloor\frac{i}{2}\rfloor\varepsilon}{\pi\lfloor\frac{i}{2}\rfloor} e_{\pi_1^l(i)}\otimes e_{\pi_1^l(i)}\rangle = 2\sum_{k=2}^{n_N}\frac{\sin 2\pi k^2\varepsilon}{\pi k}.$$

Но ряд $\sum_{k=2}^\infty \frac{\sin 2\pi k^2\varepsilon}{k}$ расходится, если $\varepsilon = \frac{1}{p}$, где p — простое и $p\equiv 3 \pmod 4$.

Замечание 4. *Обобщенные функционалы $\Phi\in\mathcal{E}^*$ такие, что $S\Phi''$ представляются в виде (2.6), причем $\int_{[0,1]\times[0,1]}\mathbf{1}_J(s,t)d\mu_\xi(s,t)$ является U-функционалом, обобщают понятие L-функционала (см. [32, 31]). Обобщенные функционалы $\Phi\in\mathcal{E}^*$ такие, что $S\Phi''$ представляются в виде (2.7) при $l<0$, причем $\int_{[0,1]\times[0,1]}\mathbf{1}_J(s,t)d\mu_\xi(s,t)$ является U-функционалом, обобщают понятие K-сингулярного функционала (см. [22]).*

Глава 3

Лапласианы Леви и калибровочные поля

3.1 Лапласиан Леви на многообразии

Пусть (M, g) — это C^3-гладкое связное риманово многообразие размерности d с метрикой g. Зафиксируем точку x на M. Пусть $PC_x^1([0,1], M)$ — множество кусочно C^1-гладких функций из отрезка $[0,1]$ в M, значение которых в точке 0 — это x (множество кусочно гладких кривых с началом в точке x). Для фиксированной кривой $\gamma \in PC_x^1([0,1], M)$, касательного вектора T в точке x и любого $t \in [0,1]$ пусть T_t обозначает параллельный перенос вектора T вдоль кривой $\gamma_{[0,t]}$ (символом $\gamma_{[s,t]}$ мы будем обозначать ограничение кривой γ на отрезок $[s,t] \subset [0,1]$). В локальной системе координат T_t — это решение задачи Коши:

$$\begin{cases} T_t'^{\kappa} + \Gamma^{\kappa}_{\lambda\mu}(\gamma_t) T_t^{\lambda} \gamma_t'^{\mu} = 0 \\ T_0 = T, \end{cases} \tag{3.1}$$

где $\Gamma^{\kappa}_{\lambda\mu}$ — символы Кристоффеля связности Леви-Чивиты на (M, g) (здесь и ниже мы будем пользоваться обозначением γ_t для $\gamma(t)$).

Символом $\varphi(\tau, y, Y)$ будем обозначать геодезическую, параметризованную τ, чья начальная точка совпадает с $y \in M$, а направление в начальной точке совпадает с $Y \in T_y M$. Т.е. мы считаем, что φ — решение задачи Коши:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial \tau^2}\varphi^\kappa(\tau,y,Y) + \Gamma^\kappa_{\lambda\mu}(\varphi(\tau,y,Y))\dfrac{\partial}{\partial \tau}\varphi^\lambda(\tau,y,Y)\dfrac{\partial}{\partial \tau}\varphi^\mu(\tau,y,Y) = 0 \\ \varphi(0,y,Y) = y \\ \dfrac{\partial}{\partial \tau}\,\varphi(0,y,Y) = Y. \end{cases} \tag{3.2}$$

Для $\tau < 0$ мы считаем, что $\varphi(\tau,y,Y) = \varphi(-\tau,y,-Y)$. Если Y — нормированный вектор, то геодезическая параметризована натуральным параметром τ. Символом $PC^1_{x,W}([0,1],M)$ будем обозначать множество кусочно C^1-гладких кривых с началом в точке x и концом, принадлежащим открытому множеству $W \subset M$, т.е. $PC^1_{x,W}([0,1],M) = \{\gamma \in PC^1_x([0,1],M) \colon \gamma_1 \in W\}$. Для фиксированной кривой $\gamma \in PC^1_{x,W}([0,1],M)$, для касательного вектора T в точке x, для кусочно C^1-гладкой действительной функции f на $[0,1]$ такой, что $f(0) = 0$, и для каждого $\alpha \in (-\delta,\delta)$ для некоторого $\delta > 0$ кривая $\gamma^{T,f}_\alpha \in PC^1_{x,W}([0,1],M)$ определяется следующим образом: $\gamma^{T,f}_\alpha(t) = \varphi(\alpha f(t), \gamma_t, T_t)$. Тогда для каждой функции F с областью определения $PC^1_{x,W}([0,1],M)$ и подходящей областью значений символ $F^\gamma_{T,f}(\alpha)$ обозначает функцию действительного аргумента $\alpha \in (-\delta,\delta)$, определенную так: $F^\gamma_{T,f}(\alpha) = F(\gamma^{T,f}_\alpha)$.

Зафиксируем ортонормированный базис $\{Z_1, Z_2, \ldots, Z_d\}$ для касательного пространства к M в точке x. Для каждой $\gamma \in PC^1_x([0,1],M)$ и для каждого $t \in [0,1]$ пусть $\{Z_1(\gamma,t), Z_2(\gamma,t), \ldots, Z_d(\gamma,t)\}$ — ортонормированный базис для касательного пространства к M в точке γ_t, полученный параллельным переносом $\{Z_1, Z_2, \ldots, Z_d\}$ вдоль кривой $\gamma_{[0,t]}$. Зафиксируем в $L_2(0,1)$ ортонормированный базис $\{e_n\}$. Пусть для любого $n \in \mathbb{N}$ выполняется $e_n \in PC^1([0,1],\mathbb{R})$ и $e_n(0) = 0$. Будем обозначать $F^\gamma_{Z_i,e_n}$ символом $F^\gamma_{i,n}$.

Символом M_N будем обозначать пространство комплексных $N \times N$ матриц, наделенное операторной нормой $\|\cdot\|$. Пусть $\mathfrak{F}(PC^1_{x,W}([0,1],M), M_N)$ — пространство всех M_N-значных функций на $PC^1_{x,W}([0,1],M)$.

Определение 7. *Лапласиан Леви — это линейное отображение*

$$\Delta_L : dom\Delta_L \to \mathfrak{F}(PC^1_{x,W}([0,1],M), M_N),$$

определенное формулой

$$\Delta_L F(\gamma) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{dn} \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{d} (F^{\gamma}_{i,k})''(0), \tag{3.3}$$

где $dom\Delta_L$ *— векторное пространство всех функций из* $\mathfrak{F}(PC^1_{x,W}([0,1],M),M_N)$, *для которых правая часть (3.3) существует.*

Если это специально не оговорено, считается, что открытое множество W из определения 7 совпадает со всем M.

Напомним определение слабо равномерно плотной последовательности из [35]:

Определение 8. *Ортонормированный базис* $\{e_n\}$ *в* $L_2(0,1)$ *называется слабо равномерно плотным, если* $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 h(t)(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n e_k^2(t)-1)dt = 0$ *для любой функции* $h\in L_\infty[0,1]$.

Пример 4. *Пусть* $e_n(t)=\sqrt{2}\sin n\pi t$, *тогда* $\{e_n\}$ *— слабо равномерно плотный базис* $L_2(0,1)$.

Сформулируем следующее предложение, иллюстрирующее понятие лапласиана Леви для случая многообразия.

Предложение 10. *Пусть* $L\in C^2(M,\mathbb{C})$. *Пусть функционал*

$$F\colon PC^1_x([0,1],M)\to\mathbb{C}$$

определен следующим образом:

$$F(\gamma)=\int\limits_0^1 L(\gamma_t)dt.$$

Пусть e_n *— слабо равномерно плотный базис в* $L_2([0,1],\mathbb{R})$ *такой, что все элементы* $\{e_n\}$ *принадлежат пространству* $PC^1([0,1],R)$. *Пусть* $e_n(0)=0$ *для любого* $n\in\mathbb{N}$. *Тогда*

$$\Delta_L F(\gamma_t)=\frac{1}{d}\int\limits_0^1 \Delta L(\gamma_t)dt,$$

где $\Delta = \nabla_\mu \nabla^\mu$ — оператор Лапласа-Бельтрами.

Мы докажем это предложение в следующем параграфе.

Также мы можем определить аналог даламбертиана Леви для C^3-гладкого связного псевдориманова многообразия (M, g) сигнатуры $(1, d-1)$. Зафиксируем псевдоортонормированный базис $\{Z_1, Z_2, \ldots, Z_d\}$ для касательного пространства к многообразию (M, g) в точке x. Мы считаем $g(Z_i, Z_j) = \eta_{ij}$, где $\eta = \mathrm{diag}\{+1, -1, \ldots, -1\}$. Мы определим множество $PC^1_{x,W}([0,1], M)$, где W — открытое подмножество M, пространство $\mathfrak{F}(PC^1_{x,W}([0,1], M), M_N)$ и функции $F^\gamma_{i,k}$ ($i \in \{1, \ldots, d\}$, $k \in \mathbb{N}$), где $F \in \mathfrak{F}(PC^1_{x,W}([0,1], M), M_N)$, как мы это сделали в случае риманова многообразия.

Определение 9. *Даламбертиан Леви — это линейное отображение*

$$\Box_L : dom\Box_L \to \mathfrak{F}(PC^1_{x,W}([0,1], M), M_N),$$

определенное формулой

$$\Box_L F(\gamma) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{dn} \left(\sum_{k=1}^{k=n} (F^\gamma_{1,k})''(0) - \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=2}^{d} (F^\gamma_{i,k})''(0) \right), \tag{3.4}$$

где $dom\Box_L$ это векторное пространство всех функций из $\mathfrak{F}(PC^1_{x,W}([0,1], M), M_N)$, для которых правая часть (3.4) существует.

3.2 Уравнение Лапласа-Леви и уравнения Янга-Миллса

Ниже мы считаем, что греческие индексы пробегают значения $1, \ldots, d$. Мы суммируем по повторяющим индексам.

Как и в предыдущем параграфе, M — C^3-гладкое связное риманово многообразие размерности d или C^3-гладкое связное псевдориманово многообразия с сигнатурой $(1, d-1)$ Пусть V — комплексное векторное пространство размерности N, G — группа Ли, реализованная как замкнутая подгруппа $GL(V)$. Пусть $\{W_a\}_{a\in\Lambda}$ — открытое покрытие M и $\psi_{ab}\colon W_a \cap W_b \to G$ — C^3-гладкие функции перехода такие, что

$$\psi_{ac}(y) = \psi_{ab}(y)\psi_{bc}(y),$$

где $y \in W_a \cap W_b \cap W_c$. Функции перехода задают главное расслоение $P(M, G)$ и векторное расслоение $E(M, V, P, G)$ с базой M, слоем V и структурной группой Ли G, ассоциированное с главным расслоением $P(M, G)$ (см. например [12]).

Мы можем определить связность на $E(M, V, P, G)$ как семейство $Lie(G)$-значных 1-форм $\{A^a(y)\}_{a\in\Lambda}$ на M таких, что $A^a(y) = A^a_\mu(y)dy^\mu$ определены на W_a, причем для $y \in W_a \cap W_b$ выполняется

$$A^a_\mu(y) = \psi_{ab}(y)A^b_\mu(y)\psi^{-1}_{ab}(y) - \frac{\partial\psi_{ab}(y)}{\partial y^\mu}\psi^{-1}_{ab}(y). \tag{3.5}$$

Тогда тензор кривизны определяется как семейство $Lie(G)$-значных 2-форм $\{F^a(y)\}_{a\in\Lambda}$ таких, что $F^a(y) = \sum_{\mu<\nu} F^a_{\mu\nu}(y)dy^\mu \wedge dy^\nu$ определена на W_a и $F^a_{\mu\nu}(y) = \partial_\mu A^a_\nu(y) - \partial_\nu A^a_\mu(y) + [A^a_\mu(y), A^a_\nu(y)]$. Для $y \in W_a \cap W_b$ тогда выполняется $F^a_{\mu\nu}(y) = \psi_{ab}(y)F^b_{\mu\nu}(y)\psi^{-1}_{ab}(y)$.

Для кривой $\gamma \in PC^1([0,1], M)$ пусть $\gamma([p,r]) \subset W_a$. Тогда мы можем определить G-значную функцию $U^{a,a}_{t,s}(\gamma)$ на $\{(t,s) \in \mathbb{R}^2 : r \geq t \geq s \geq p\}$ как сумму ряда

$$U^{a,a}_{t,s}(\gamma) = \sum_{k=0}^{\infty} U^a_{t,s}(\gamma, k), \tag{3.6}$$

где $U^a_{t,s}(\gamma, 0) := I_N$ (I_N — единичная матрица из M_N) и

$$U^a_{t,s}(\gamma, k) := \int\limits_{\Delta^k_{s,t}} d\tau_1 \dots d\tau_k \left(-A^a_\mu(\gamma_{\tau_k})\gamma'^\mu_{\tau_k}\right) \dots \left(-A^a_\mu(\gamma_{\tau_1}))\gamma'^\mu_{\tau_1}\right), \tag{3.7}$$

где $\Delta^k_{s,t} := \{(\tau_1, \dots, \tau_k) \in \mathbb{R}^k : s \leq \tau_1 \leq \dots \leq \tau_k \leq t\}$. Заметим, что $U^{a,a}_{t,s}(\gamma)$ — решение системы:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}U^{a,a}_{t,s}(\gamma) = -A^a_\mu(\gamma_t)\gamma'^\mu_t U^a_{t,s}(\gamma) \\ \dfrac{d}{ds}U^{a,a}_{t,s}(\gamma) = U^a_{t,s}(\gamma)A^a_\mu(\gamma_s)\gamma'^\mu_s \\ U^{a,a}_{t,s}(\gamma)\big|_{t=s} = I_N. \end{cases} \tag{3.8}$$

Если $\gamma([s,t]) \subset W_a \cap W_b$, в силу (3.5) выполняется

$$U^{a,a}_{t,s}(\gamma) = \psi_{ab}(\gamma_t)U^{b,b}_{t,s}(\gamma)\psi^{-1}_{ab}(\gamma_s). \tag{3.9}$$

Для любой $\gamma \in PC^1([0,1],M)$ рассмотрим разбиение $s = t_1 < t_2 < \ldots < t_m = t$ отрезка $[s,t]$ такое, что $\gamma([t_i,t_{i+1}]) \subset W_{a_i}$ для всех $i \in \{1,\ldots,m-1\}$. Мы определим параллельный перенос $U_{t,s}^{a_{m-1},a_1}(\gamma)$ вдоль $\gamma_{[s,t]}$ следующим образом:

$$U_{t,s}^{a_{m-1},a_1}(\gamma) = U_{t_m,t_{m-1}}^{a_{m-1},a_{m-1}}(\gamma)\psi_{a_{m-1}a_{m-2}}(\gamma_{t_{m-1}})\ldots U_{t_3,t_2}^{a_2,a_2}(\gamma)\psi_{a_2a_1}(\gamma_{t_2})U_{t_2,t_1}^{a_1,a_1}(\gamma).$$

Т.к. выполняется равенство (3.9), $U_{t,s}^{a_{m-1},a_1}(\gamma)$ не зависит от выбора разбиения. Если $s \le r \le t$ такие, что $\gamma_t \in W_{a_4}$, $\gamma_r \in W_{a_3} \cap W_{a_2}$, $\gamma_s \in W_{a_1}$, выполняется

$$U_{t,s}^{a_4,a_1}(\gamma) = U_{t,r}^{a_4,a_2}(\gamma)U_{r,s}^{a_2,a_1}(\gamma) = U_{t,r}^{a_4,a_3}(\gamma)U_{r,s}^{a_3,a_1}(\gamma) = U_{t,r}^{a_4,a_3}(\gamma)\psi_{a_3a_2}(\gamma_r)U_{r,s}^{a_2,a_1}(\gamma).$$

Параллельный перенос не зависит от параметризации кривой γ. Пусть $a_x \in \Lambda$ такой, что $x \in W_{a_x}$. Тогда $\gamma \to U_{1,0}^{a,a_x}(\gamma)$ корректно определенный функционал на $PC^1_{x,W_a}([0,1],M)$

Мы не будем писать индекс a в A^a, F^a и $U_{t,s}^{a,a}(\gamma)$, если это не будет вызывать путаницы.

В локальных координатах ковариантные производные связности и тензора кривизны ∇A и ∇F определяются следующим образом:

$$\nabla_\mu A_\nu = \partial_\mu A_\nu + [A_\mu, A_\nu] - A_\kappa \Gamma^\kappa_{\mu\nu}, \tag{3.10}$$

$$\nabla_\lambda F_{\mu\nu} = \partial_\lambda F_{\mu\nu} + [A_\lambda, F_{\mu\nu}] - F_{\mu\kappa}\Gamma^\kappa_{\lambda\nu} - F_{\kappa\nu}\Gamma^\kappa_{\lambda\mu}. \tag{3.11}$$

Для $y \in W_a \cap W_b$ тогда выполняется

$$\nabla_\lambda F^a_{\mu\nu} = \psi_{ab}(y)\nabla_\lambda F^b_{\mu\nu}\psi^{-1}_{ab}(y). \tag{3.12}$$

Замечание 5. *Пусть* $\gamma \in PC^1_{x,W_a}([0,1],M)$. *Если* $\gamma_r \in W_{a'_r} \cap W_{a_r}$, *то в силу (3.12) и (3.9):*

$$U_{1,r}^{a,a'_r}(\gamma)(-\nabla_\mu F_\nu^{a'_r\mu}(\gamma_r))\gamma_r^{\prime\nu}U_{r,0}^{a'_r,a_x}(\gamma) = U_{1,r}^{a,a_r}(\gamma)(-\nabla_\mu F_\nu^{a_r\mu}(\gamma_r))\gamma_r^{\prime\nu}U_{r,0}^{a_r,a_x}(\gamma).$$

Поэтому мы будем опускать индекс a'_r *в этом выражении. Если* $\{J^a\}_{a\in\Lambda}$ *семейство* $Lie(G)$*-значных функций таких, что* J^a *определена на* W^a*, причем для* $y \in W_a \cap W_b$ *выполняется* $J^a(y) = \psi_{ab}(y)J^b(y)\psi^{-1}_{ab}(y)$. *Ниже в выражении* $U_{1,r}^{a,a'_r}(\gamma)J^{a'_r}(\gamma_r))U_{r,0}^{a'_r,a_x}$ *будет опускаться индекс* a'_r.

Сформулируем теорему для риманова многообразия M.

Теорема 6. *Пусть все A_μ — C^2-гладкие функции. Пусть $\{e_n\}$ — слабо равномерный плотный базис в $L_2(0,1)$ такой, что все элементы $\{e_n\}$ принадлежат пространству $PC^1[0,1]$. Пусть $e_n(0)=e_n(1)=0$ для всех $n\in\mathbb{N}$. Тогда для каждого $a\in\Lambda$ функция $PC^1_{x,W_a}([0,1],M)\ni\gamma\mapsto U^{a,a_x}_{1,0}(\gamma)$ (параллельный перенос вдоль кривых из $PC^1_{x,W_a}([0,1],M)$) лежит в области определения лапласиана Леви. Более того, выполняется следующее равенство:*

$$\Delta_L U^{a,a_x}_{1,0}(\gamma)=\frac{1}{d}\int\limits_0^1 dr U^a_{1,r}(\gamma)(-\nabla_\mu F^\mu_\nu(\gamma_r))\gamma'^\nu_r U^{a_x}_{r,0}(\gamma). \tag{3.13}$$

Для доказательства теоремы докажем несколько лемм.

Лемма 5. *Пусть $\gamma\in PC^1_x([0,1],M)$, $T\in T_xM$, $f\in PC^1([0,1],\mathbb{R})$, причем $f(0)=0$. Тогда существует такое разбиение $0=t_1<t_2<\ldots<t_m=1$ отрезка $[0,1]$ и такое $\delta>0$, что для каждого $i\in\{0,\ldots,m-1\}$ ограничения γ и f на отрезок $[t_i,t_{i+1}]$ are C^1-гладкие, $\gamma([t_i,t_{i+1}])\subset W_{a_i}$ и функция*

$$\begin{split}H(r,\alpha)=A^{a_i}_\nu(\varphi(\alpha f(r),\gamma_r,T_r))(\alpha\frac{d}{d\tau}\varphi^\nu(\alpha f(r),\gamma_r,T_r)f'(r)+\\+\frac{d}{d\gamma}\varphi^\nu(\alpha f(r),\gamma_r,T_r)\gamma'_r+\frac{d}{dT}\varphi^\nu(\alpha f(r),\gamma_r,T_r)T'_r)\end{split} \tag{3.14}$$

корректно определена на каждом из множеств $[t_i,t_{i+1}]\times[-\delta,\delta]$, производные $\frac{d}{d\alpha}H(r,\alpha)$, $\frac{d^2}{d\alpha^2}H(r,\alpha)$ существуют и принадлежат классам $C([t_i,t_{i+1}]\times[-\delta,\delta])$. Более того, выполняются следующие равенства

$$\left.\frac{d}{d\alpha}\right|_{\alpha=0}H(r,\alpha)=(\partial_\mu A^{a_i}_\nu(\gamma_r)T^\mu_r\gamma'^\nu_r+A^{a_i}_\nu(\gamma_r)T'^\nu_r)f(r)+A^{a_i}_\nu(\gamma_r)T^\nu_r f'(r); \tag{3.15}$$

$$\left.\frac{d^2}{d\alpha^2}\right|_{\alpha=0} H(r,\alpha) = \{\partial_\lambda \partial_\mu A^{a_i}_\nu(\gamma_r) - \partial_\kappa A^{a_i}_\nu(\gamma_r)\Gamma^\kappa_{\mu\lambda}(\gamma_r) - 2\partial_\mu A^{a_i}_\kappa(\gamma_r)\Gamma^\kappa_{\lambda\nu}(\gamma_r) +$$
$$+ A^{a_i}_\kappa(\gamma_r)((\Gamma^\kappa_{\beta\lambda}(\gamma_r) + \Gamma^\kappa_{\lambda\beta}(\gamma_r))\Gamma^\beta_{\mu\nu}(\gamma_r) - \partial_\nu \Gamma^\kappa_{\lambda\mu}(\gamma_r))\} T^\lambda_r T^\mu_r \gamma'^\nu_r f^2(r) +$$
$$+ \nabla_\mu A^{a_i}_\nu(\gamma_r) T^\mu_r T^\nu_r (f^2(r))'. \quad (3.16)$$

Доказательство. Зафиксируем точку $y \in M$ и вектор $Y \in T_yM$. Перепишем уравнение для геодезической следующим образом:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{d\tau}\varphi^\kappa(\tau) = Z^\kappa(\tau) \\ \dfrac{dZ^\kappa(\tau)}{d\tau} = -\Gamma^\kappa_{\lambda\mu}(\varphi(\tau))Z^\lambda(\tau)Z^\mu(\tau) \\ (\varphi(\tau_0,\varphi_0,Z_0), Z(\tau_0,\varphi_0,Z_0)) = (\varphi_0, Z_0), \end{cases} \quad (3.17)$$

и будем считать, что $(\varphi_0, Z_0) \in W'_y \times \mathbb{R}^d$, где W'_y — открытая окрестность точки y в M. Также будем считать, что $W'_y \subset W_a$, где W_a открытое множество из покрытия $\{W_a\}_{a\in\Lambda}$ многообразия M. Т.к. $\Gamma^\kappa_{\lambda\mu}$ — C^2-гладкие функции, мы можем использовать известную теорему о дифференциальной зависимости решения от начальных условий (см. например [14]). Тогда решение $(\varphi(\tau,\varphi_0,Z_0), Z(\tau,\varphi_0,Z_0))$ задачи Коши (3.17) — корректно определенная и непрерывно дифференцируемая функция аргумента (τ,φ_0,Y_0) на $(-\varepsilon,\varepsilon)\times V_{(y,Y)}$, где $\varepsilon > 0$, $V_{(y,Y)} \subset W'_y \times \mathbb{R}^d$ — открытая окрестность (y, Y). Выполняется следующее равенство:

$$\begin{pmatrix} \frac{d}{d\varphi_0}\varphi(\tau) & \frac{d}{dZ_0}\varphi(\tau) \\ \frac{d}{d\varphi_0}Z(\tau) & \frac{d}{dZ_0}Z(\tau) \end{pmatrix} = D_{\tau,\tau_0}, \quad (3.18)$$

где $D_{\tau,\tau_0} = D(\tau,\tau_0,\varphi_0,Z_0)$ — фундаментальная система решений системы (3.17):

$$\frac{d}{d\tau}D_{\tau,\tau_0} = \begin{pmatrix} 0 & I_d \\ A(\tau) & B(\tau) \end{pmatrix} D_{\tau,\tau_0}, \quad (3.19)$$

где I_d — единичная $d \times d$ матрица, $A^\kappa_\lambda(\tau) = -\partial_\lambda \Gamma^\kappa_{\mu\nu}(\varphi(\tau)) Z^\mu(\tau) Z^\nu(\tau)$, $B^\kappa_\lambda(\tau) = -(\Gamma^\kappa_{\mu\lambda}(\varphi(\tau)) + \Gamma^\kappa_{\lambda\mu}(\varphi(\tau)) Z^\mu(\tau)$. Тогда $A^\kappa_\lambda(\tau)$ и $B^\kappa_\lambda(\tau)$ — гладкие функции на $(-\varepsilon, \varepsilon)$ и мы можем дифференцировать (3.19):

$$\frac{d^2}{d\tau^2} D_{\tau,\tau_0} = \begin{pmatrix} A(\tau) & B(\tau) \\ \left(A(\tau)B(\tau) + \frac{d}{d\tau}A(\tau)\right) & \left(A(\tau) + B^2(\tau) + \frac{d}{d\tau}B(\tau)\right) \end{pmatrix} D_{\tau,\tau_0}. \quad (3.20)$$

Тогда функции $\frac{d}{d\varphi_0}\varphi(\tau)$, $\frac{d}{dZ_0}\varphi(\tau), \frac{d}{d\varphi_0}Z(\tau)$ и $\frac{d}{dZ_0}Z(\tau)$ are C^2-гладкие по аргументу τ, когда $|\tau| < \varepsilon$. Рассмотрим такое разбиение $0 = s_1 < s_2 < \ldots < s_{m_0} = 1$ отрезка $[0,1]$, что для каждого $i \in \{0, \ldots, m_0 - 1\}$ ограничения γ и f на отрезок $[s_i, s_{i+1}]$ являются C^1-гладкими и $\gamma([s_i, s_{i+1}]) \subset W_{a_i}$. Для каждой точки $p \in [s_i, s_{i+1}]$ функция $\varphi(\tau, \varphi_0, Z_0)$ непрерывно дифференцируема на $(-\varepsilon_p, \varepsilon_p) \times V_p$, где $V_p \subset W_{a_i} \times \mathbb{R}^d$ — окрестность (γ_p, T_p). Тогда существует отрезок $[t_p, t'_p] \subset [s_i, s_{i+1}]$ $(t_p < t'_p)$ такой, что для каждого $r \in [t_p, t'_p]$ мы получаем, что $(\gamma_r, T_r) \in V_p$. Будем считать, что $p \in (t_p, t'_p)$ или p совпадает с концом $[t_p, t'_p]$, если p совпадает с концом $[s_i, s_{i+1}]$. Тогда $\gamma^{T,f}_\alpha(r) = \varphi(\alpha f(r), \gamma_r, T_r)$ принадлежит пространству $C^1([-\delta_p, \delta_p] \times V_p)$, где $\delta_p = \varepsilon_p / (\sup_{r\in[0,1]} |f(r)| + 1)$. Рассмотрим покрытие $\{[t_p, t'_p]\}_{p \in [s_i, s_{i+1}]}$ отрезка $[s_i, s_{i+1}]$. Мы можем выбрать конечное подпокрытие $\{[t_{p_j}, t'_{p_j}]\}$. Пусть $\delta_i = \min \delta_{p_j}$ и $\delta = \min \delta_i$. Для каждого $i = \{0, \ldots, m_0 - 1\}$ добавим точки t_{p_j} к разбиению $\{s_1, \ldots, s_{m_0}\}$. Так мы получаем разбиение $0 = t_1 < t_2 < \ldots < t_m = 1$ отрезка $[0,1]$ такое, что $\gamma^{T,f}_\alpha(r) = \varphi(\alpha f(r), \gamma_r, T_r)$ принадлежит классу $C^1([-\delta, \delta] \times [t_i, t_{i+1}])$, а также $\gamma^{T,f}_\alpha([t_i, t_{i+1}]) \subset W_i$ при $|\alpha| \le \delta_i$ для всех $i \in \{0, \ldots, m-1\}$. Тогда функция $H(r, \alpha)$ принадлежит классу $C^1([-\delta, \delta] \times [t_i, t_{i+1}])$. Заметим, что мы также доказали, что $\gamma^{T,f}_\alpha \in PC^1_x([0,1], M)$ при $|\alpha| \le \delta$.

Дифференцируя (3.14) по α, мы получаем на каждом множестве $[-\delta, \delta] \times$

$[t_i, t_{i+1}]$:

$$\frac{d}{d\alpha}H(r,\alpha) = \partial_\mu A_\nu(\varphi(\alpha f(r),\gamma_r,T_r))(\frac{d}{d\tau}\varphi^\mu(\alpha f(r),\gamma_r,T_r)f(r))\times$$
$$\times\{\alpha\frac{d}{d\tau}\varphi^\nu(\alpha f(r),\gamma_r,T_r)f'(r)+\frac{d}{d\gamma}\varphi^\nu(\alpha f(r),\gamma_r,T_r)\gamma'_r+\frac{d}{dT}\varphi^\nu(\alpha f(r),\gamma_r,T_r)T'_r\}+$$
$$+A_\nu(\varphi(\alpha f(r),\gamma_r,T_r)\{\frac{d}{d\tau}\varphi^\nu(\alpha f(r),\gamma_r,T_r)f'(r)+\alpha\frac{d^2}{d\tau^2}\varphi^\nu(\alpha f(r),\gamma_r,T_r)f(r)f'(r)+$$
$$+\frac{d^2}{d\tau d\gamma}\varphi^\nu(\alpha f(r),\gamma_r,T_r)\gamma'(r)f(r)+\frac{d^2}{d\tau dT}\varphi^\nu(\alpha f(r),\gamma_r,T_r)T'_r\}. \quad (3.21)$$

Т.к. символы Кристоффеля -C^2-гладкие функции, а также выполняется равенство (3.17), $\frac{d^3}{d\tau^3}\varphi^\nu(\alpha f(r),\gamma_r,T_r)$ существует на $[-\delta,\delta]\times[t_i,t_{i+1}]$ и принадлежит пространству $C([-\delta,\delta]\times[t_i,t_{i+1}])$. Тогда D_{τ,τ_0} дважды дифференцируемая, мы можем дифференцировать (3.21) по α на $[-\delta,\delta]\times[t_i,t_{i+1}]$:

$$\frac{d^2}{d\alpha^2}H(r,\alpha) =$$
$$=\{\partial_\lambda\partial_\mu A_\nu(\varphi(\alpha f(r),\gamma_r,T_r)\frac{d}{d\tau}\varphi^\mu(\alpha f(r),\gamma_r,T_r)f(r)\frac{d}{d\tau}\varphi^\lambda(\alpha f(r),\gamma_r,T_r)f(r)+$$
$$+\partial_\mu A_\nu(\varphi(\alpha f(r),\gamma_r,T_r)\frac{d^2}{d\tau^2}\varphi^\mu(\alpha f(r),\gamma_r,T_r)f^2(r)\}\{\alpha\frac{d}{d\tau}\varphi^\nu(\alpha f(r),\gamma_r,T_r)f'(r)+$$
$$+\frac{d}{d\gamma}\varphi^\nu(\alpha f(r),\gamma_r,T_r)\gamma'_r+\frac{d}{dT}\varphi^\nu(\alpha f(r),\gamma_r,T_r)T'_r\}+$$
$$+2\{\partial_\mu A_\nu(\varphi(\alpha f(r),\gamma_r,T_r)\frac{d}{d\tau}\varphi^\mu(\alpha f(r),\gamma_r,T_r)f(r)\}\{\frac{d}{d\tau}\varphi^\nu(\alpha f(r),\gamma_r,T_r)f'(r)+$$
$$+\alpha\frac{d^2}{d\tau^2}\varphi^\nu(\alpha f(r),\gamma_r,T_r)f(r)f'(r)+\frac{d^2}{d\tau d\gamma}\varphi^\nu(\alpha f(r),\gamma_r,T_r)\gamma'_r f(r)+$$
$$+\frac{d^2}{d\tau dT}\varphi^\nu(\alpha f(r),\gamma_r,T_r)T'_r f(r)\}+A_\nu(\varphi(\alpha f(r),\gamma_r,T_r)\times$$
$$\times\{2\frac{d^2}{d\tau^2}\varphi^\nu(\alpha f(r),\gamma_r,T_r)f'(r)f(r)+\alpha\frac{d^3}{d\tau^3}\varphi^\nu(\alpha f(r),\gamma_r,T_r)f^2(r)f'(r)+$$
$$+\frac{d^2d}{d\tau^2d\gamma}\varphi^\nu(\alpha f(r),\gamma_r,T_r)\gamma'_r f^2(r)+\frac{d^2d}{d\tau^2dT}\varphi^\nu(\alpha f(r),\gamma_r,T_r)T'_r f^2(r)\}. \quad (3.22)$$

В силу (3.20) $\frac{d^2}{d\alpha^2}H(r,\alpha)\in C([t_i,t_{i+1}]\times[-\delta,\delta])$ для всех $i\in\{1,\dots,m-1\}$. В силу (3.18) и (3.19), мы получаем

$$\frac{d}{d\gamma}\varphi^\nu(0,\gamma_r,T_r)\gamma'_r=\gamma'^\nu_r,\ \frac{d}{dT}\varphi^\nu(0,\gamma_r,T_r)T'_r=0, \quad (3.23)$$

$$\frac{d^2}{d\tau d\gamma}\varphi^\nu(0,\gamma_r,T_r)\gamma'_r = 0,\ \frac{d^2}{d\tau dT}\varphi^\nu(0,\gamma_r,T_r)T'_r = T'^\nu_r. \qquad (3.24)$$

Учитывая (3.20), мы получаем

$$\frac{d^2 d}{d\tau^2 dT}\varphi^\nu(0,\gamma_r,T_r)T'_r = -(\Gamma^\nu_{\beta\lambda}(\gamma_r)+\Gamma^\nu_{\lambda\beta}(\gamma_r))T^\lambda_r T'^\beta_r =$$
$$= (\Gamma^\nu_{\beta\lambda}(\gamma_r)+\Gamma^\nu_{\lambda\beta}(\gamma_r))\Gamma^\beta_{\mu\kappa}(\gamma_r)T^\lambda_r T^\mu_r \gamma'^\kappa_r, \quad (3.25)$$

$$\frac{d^2 d}{d\tau^2 d\gamma}\varphi^\nu(0,\gamma_r,T_r)\gamma'_r = -\partial_\kappa\Gamma^\nu_{\lambda\mu}(\gamma_r)T^\lambda_r T^\mu_r \gamma'^\kappa_r. \qquad (3.26)$$

Беря $\alpha = 0$ в (3.21) и используя выражения (3.23) и (3.24), мы получаем (3.15). Беря $\alpha = 0$ в (3.22), используя выражения (3.23), (3.24), (3.25), (3.26), переименовав индексы, мы получаем (3.16). □

Лемма 6. *Пусть* $\gamma \in PC^1_x([0,1],M)$, $f \in PC^1([0,1],\mathbb{R})$ *и* $T \in T_xM$. *Пусть* $p \in [0,1]$ *такое, что* $\gamma_p \in W$, *где* W *— открытое подмножество* M. *Пусть* L *—* C^2*-гладкая* M_N*-значная функция, определенная на* M. *Тогда мы имеем следующие выражения для* $\frac{d}{d\alpha}L(\gamma^{T,f}_\alpha(p))$ *и* $\frac{d^2}{d\alpha^2}L(\gamma^{T,f}_\alpha(p)))$ *при* $\alpha = 0$ *:*

$$\left.\frac{d}{d\alpha}\right|_{\alpha=0}(L(\gamma^{T,f}_\alpha(p))) = \partial_\mu L(\gamma_p)T^\mu_p f(p); \qquad (3.27)$$

$$\left.\frac{d^2}{d\alpha^2}\right|_{\alpha=0}(L(\gamma^{T,f}_\alpha(p))) =$$
$$= \partial_\lambda\partial_\mu L(\gamma_p)T^\mu_p T^\lambda_p f^2(p) - \partial_\kappa L(\gamma_p)\Gamma^\kappa_{\mu\lambda}(\gamma_p)T^\mu_p T^\lambda_p f^2(p). \quad (3.28)$$

Доказательство. Действительно, $\gamma^{T,f}_\alpha(p) = \varphi(\alpha f(p),\gamma_p,T_p) \in W$ при $|\alpha| < \delta$. Тогда $L(\varphi(\alpha f(p),\gamma_p,T_p)$ дважды дифференцируема по α:

$$\frac{d}{d\alpha}(L(\varphi(\alpha f(p),\gamma_p,T_p)) = \partial_\mu L(\varphi(\alpha f(p),\gamma_p,T_p)\frac{d}{d\tau}\varphi^\mu(\alpha f(p),\gamma_p,T_p)f(p)) \quad (3.29)$$

и

$$\frac{d^2}{d\alpha^2}(L(\gamma_\alpha^{T,f}(p))) =$$
$$= \partial_\lambda\partial_\mu L(\varphi(\alpha f(p), \gamma_p, T_p)\frac{d}{d\tau}\varphi^\mu(\alpha f(p), \gamma_p, T_p)f(p)\frac{d}{d\tau}\varphi^\lambda(\alpha f(p), \gamma_p, T_p)f(p) +$$
$$+ \partial_\mu L(\varphi(\alpha f(p), \gamma_p, T_p)\frac{d^2}{d\tau^2}\varphi^\mu(\alpha f(p), \gamma_p, T_p)f^2(p) \quad (3.30)$$

Подставив $\alpha = 0$, используя (3.2), мы получаем утверждение леммы. $\square$

Сейчас мы можем доказать предложение 10 из предыдущего параграфа:

Доказательство. Пусть $f \in PC^1([0,1], \mathbb{R})$. Существует разбиение $0 = t_1 < t_2 < \ldots < t_m = 1$ отрезка $[0,1]$ такое, что $L(\varphi(\alpha f(p), \gamma_p, T_p))$, $\frac{d}{d\alpha}L(\varphi(\alpha f(p), \gamma_p, T_p))$, $\frac{d^2}{d\alpha^2}L((\varphi(\alpha f(p), \gamma_p, T_p))$ непрерывны при каждом $(\alpha, p) \in [-\delta, \delta] \times [t_i, t_{i+1}]$ для некоторого $\delta > 0$. В силу леммы 6 тогда выполняется

$$\frac{d^2}{d\alpha^2}\bigg|_{\alpha=0} \int_0^1 L(\varphi(\alpha f(p), \gamma_p, T_p)dp = \int_0^1 \nabla_\lambda\nabla_\mu L(\gamma_p)T_p^\mu T_p^\lambda f^2(p)dp.$$

Если e_n — слабо равномерно плотный, то

$$\Delta_L F(\gamma_t) = \frac{1}{d}\sum_{i=1}^d \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \int_0^1 \nabla_\lambda\nabla_\mu L(\gamma_p)Z_i^\mu(\gamma, p)Z_i^\lambda(\gamma, p)e_k^2(p)dp =$$
$$= \sum_{i=1}^d \int_0^1 \nabla_\lambda\nabla_\mu L(\gamma_p)Z_i^\mu(\gamma, p)Z_i^\lambda(\gamma, p)dp.$$

Пусть в касательном пространстве T_yM задан некоторый ортонормированный базис $Z_1(y), \ldots, Z_d(y)$, тогда выполняется равенство

$$\sum_{i=1}^d \nabla_\lambda\nabla_\mu L(y)Z_i^\mu(y)Z_i^\lambda(y) = \nabla^\mu\nabla_\mu L(y). \quad (3.31)$$

Обе части равенства (3.31) не зависят от выбора локальных координат, при этом равенство (3.31) очевидно верно в такой локальной системе координат

$(z^1,\ldots,z^d)$, что в точке y для всех $i\in\{1,\ldots,d\}$ выполняется $\frac{\partial}{\partial z^i}=Z_i$. Таким образом, мы доказали утверждение предложения 10. $\square$

Лемма 7. *Пусть все A_μ — C^2-гладкие функции. Пусть $\{e_n\}$ — слабо равномерно плотный базис в $L_2(0,1)$ такой, что все e_n принадлежат пространству $PC^1([0,1],\mathbb{R})$ и для каждого $n\in\mathbb{N}$ выполняется $e_n(0)=e_n(1)=0$. Пусть $\gamma\in PC^1_{x,W_a}([0,1],M)$. Тогда для любого касательного вектора T в точке x выполняется:*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{d^2}{d\alpha^2}\bigg|_{\alpha=0}U^{a,a_x}_{1,0}(\gamma^{T,f}_\alpha)=\int\limits_0^1 drU^a_{1,r}(\gamma)(-\nabla_\lambda F_{\mu\nu}(\gamma_r))T^\mu_r T^\lambda_r\gamma'^\nu_r U^{a_x}_{r,0}(\gamma). \tag{3.32}$$

Доказательство. Мы докажем лемму 6, показав, что, если f из $PC^1([0,1],\mathbb{R})$ такая, что $f(0)=f(1)=0$, то $\frac{d^2}{d\alpha^2}\Big|_{\alpha=0}U^{a,a_x}_{1,0}(\gamma^{T,f}_\alpha)(\alpha)$ представляется в виде

$$\int\limits_0^1 drK^L_\gamma(r)f^2(r)+\int\limits_0^1\int\limits_0^1 drdpK^V_\gamma(r,p)f(r)f(p), \tag{3.33}$$

где $K^L_\gamma(r)=U^a_{1,r}(-\nabla_\lambda F_{\mu\nu}(\gamma_r))T^\mu_r T^\lambda_r\gamma'^\nu_r U^{a_x}_{r,0}$ и $K^V_\gamma\in L_2([0,1]\times[0,1])$, причем K^V_γ не зависит от f. Зафиксируем $f\in PC^1([0,1],\mathbb{R})$ и применим лемму 5. Пусть $\gamma_t\in W_d$ и $\gamma_s\in W_c$, тогда мы будем использовать обозначения $U^{d,c}_{t,s}$ для $U^{d,c}_{t,s}(\gamma)$, $U^{d,c}_{t,s}(\alpha)$ для $U_{t,s}(\gamma^{T,f}_\alpha)$. Пусть $s=t_i$ и $t=t_{i+1}$, где t_i и t_{i+1} точки разбиения отрезка $[0,1]$ из утверждения леммы 5. В доказательстве леммы мы не будем писать индекс a_i в $U^{a_i,a_i}_{t,s}(\gamma)$, $U^{a_i,a_i}_{t,s}(\alpha)$ и будем использовать обозначение $U^k_{t,s}(\alpha)$ для $U_{t,s}(\gamma^{T,f}_\alpha,k)$. Тогда

$$U^k_{t,s}(\alpha)=U_{t,s}(\gamma^{T,f}_\alpha,k)=\int\limits_{\Delta^k_{s,t}}d\tau_1\ldots d\tau_k(-H(\tau_k,\alpha))\ldots(-H(\tau_1,\alpha)). \tag{3.34}$$

Если $|\alpha_0| \le \delta$, тогда $H(r,\alpha) \rightrightarrows H(r,\alpha_0)$, $\frac{d}{d\alpha}H(r,\alpha) \rightrightarrows \frac{d}{d\alpha}H(r,\alpha_0)$, $\frac{d^2}{d\alpha^2}H(r,\alpha) \rightrightarrows \frac{d^2}{d\alpha^2}H(r,\alpha_0)$ на $[s,t]$ при $\alpha \to \alpha_0$ как равномерно непрерывные функции на $[s,t]\times[-\delta,\delta]$. Для каждого $k \in \mathbb{N}$ на $\Delta^k_{s,t}\times[-\delta,\delta]$ введем функцию

$$H^k(\tau_1,\dots,\tau_k,\alpha) = H(\tau_k,\alpha)\times\ldots\times H(\tau_1,\alpha).$$

Тогда функции $H^k(\tau_1,\dots,\tau_k,\alpha) \rightrightarrows H^k(\tau_1,\dots,\tau_k,\alpha_0)$, $\frac{d}{d\alpha}H^k(\tau_1,\dots,\tau_k,\alpha) \rightrightarrows \frac{d}{d\alpha}H^k(\tau_1,\dots,\tau_k,\alpha_0)$ и $\frac{d^2}{d\alpha^2}H(\tau_1,\dots,\tau_k,\alpha) \rightrightarrows \frac{d^2}{d\alpha^2}H(\tau_1,\dots,\tau_k,\alpha_0)$ на $\Delta^k_{s,t}$ при $\alpha \to \alpha_0$. Тогда $U^k_{t,s}(\alpha)$ дважды дифференцируема при $|\alpha|\le\delta$:

$$\frac{d}{d\alpha}U_{t,s}(\gamma^{T,f}_\alpha,k) = (-1)^k\int\limits_{\Delta^k_{s,t}} d\tau_1\dots d\tau_k\frac{d}{d\alpha}H^k(\tau_1,\dots,\tau_k,\alpha); \tag{3.35}$$

$$\frac{d^2}{d\alpha^2}U_{t,s}(\gamma^{T,f}_\alpha,k) = (-1)^k\int\limits_{\Delta^k_{s,t}} d\tau_1\dots d\tau_k\frac{d^2}{d\alpha^2}H^k(\tau_1,\dots,\tau_k,\alpha). \tag{3.36}$$

Существует константа $C>0$ такая, что непрерывные функции H, $\frac{d}{d\alpha}H$, $\frac{d^2}{d\alpha^2}H$ ограничены по норме константой C на множестве $[s,t]\times[-\delta,\delta]$. Тогда ряд $\sum_{k=0}^\infty \frac{d}{d\alpha}U^k_{t,s}(\alpha)$ равномерно сходится на $[-\delta,\delta]$ по признаку Вейерштрасса, т.к. $\|\frac{d}{d\alpha}U^k_{t,s}(\alpha)\| \le \frac{1}{(k-1)!}C^k(t-s)^k$. Ряд $\sum_{k=0}^\infty \frac{d^2}{d\alpha^2}U^k_{t,s}(\alpha)$ сходится равномерно на $[-\delta,\delta]$ по признаку Вейерштрасса, т.к. $\|\frac{d^2}{d\alpha^2}U^k_{t,s}(\alpha)\| \le \frac{k}{(k-1)!}C^k(t-s)^k$. Т.к $\sum_{k=0}^\infty U^k_{t,s}(0) = U_{t,s}$, мы получаем, что $U_{t,s}(\alpha)\in C^2[-\delta,\delta]$ и $\sum_{k=0}^\infty \frac{d}{d\alpha}U^k_{t,s}(\alpha) \rightrightarrows \frac{d}{d\alpha}U_{t,s}(\alpha)$ и $\sum_{k=0}^\infty \frac{d^2}{d\alpha^2}U^k_{t,s}(\alpha) \rightrightarrows \frac{d^2}{d\alpha^2}U_{t,s}(\alpha)$ на $[-\delta,\delta]$. Тогда $\frac{d}{d\alpha}\Big|_{\alpha=0}U_{t,s}(\alpha)$ выражается следующим образом:

$$\frac{d}{d\alpha}\Big|_{\alpha=0}U_{t,s}(\alpha) = \sum_{k=1}^\infty(\sum_{j=1}^k\int\limits_{\Delta^k_{s,t}} d\tau_1\dots d\tau_k\left(-A_\nu(\gamma_{\tau_k})\gamma'^\nu_{\tau_k}\right)\times\ldots$$
$$\ldots\times\left(-\frac{d}{d\alpha}\Big|_{\alpha=0}H(\tau_j,\alpha)\right)\ldots\left(-A_\nu(\gamma_{\tau_1})\gamma'^\nu_{\tau_1}\right)). \tag{3.37}$$

По теореме Фубини

$$\left.\frac{d}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} U_{t,s}(\alpha) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{k}\int\limits_s^t drU_{t,r}^{k-j}\left(-\left.\frac{d}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} H(r,\alpha)\right)U_{r,s}^{j-1}. \tag{3.38}$$

Т.к. $\|U_{r,p}^n\| \le \frac{1}{n!}(r-p)^n C^n$ для каждых $n\in\mathbb{N}$ и, то для каждого $n\in\mathbb{N}$ выполняются следующие оценки:

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\|U_{t,r}^{k-j}\left.\frac{d}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} H(r,\alpha)U_{r,s}^{j-1}\| \le Ce^{(t-s)C}, \tag{3.39}$$

Тогда мы можем применить теорему Лебега:

$$\left.\frac{d}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} U_{t,s}(\alpha) = \int\limits_s^t drU_{t,r}\left(-\left.\frac{d}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} H(r,\alpha)\right)U_{r,s} \tag{3.40}$$

Аналогично $\left.\frac{d^2}{d\alpha^2}\right|_{\alpha=0} U_{t,s}(\alpha)$ выражается следующим образом:

$$\begin{aligned}\left.\frac{d^2}{d\alpha^2}\right|_{\alpha=0} U_{t,s}(\alpha) &= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{k}\int\limits_{\Delta_{s,t}^k} d\tau_1\dots d\tau_k\left(-A_\nu(\gamma_{\tau_k})\gamma_{\tau_k}'^{\nu}\right)\times\dots\\ &\dots\times\left(-\left.\frac{d^2}{d\alpha^2}\right|_{\alpha=0} H(\tau_j,\alpha)\right)\dots\left(-A_\nu(\gamma_{\tau_1})\gamma_{\tau_1}'^{\nu}\right)+\\ &+\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{1\le i<j\le k} 2\int\limits_{\Delta_{s,t}^k} d\tau_1\dots d\tau_k\left(-A_\nu(\gamma_{\tau_k})\gamma_{\tau_k}'^{\nu}\right)\dots\left(-\left.\frac{d}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} H(\tau_j,\alpha)\right)\times\dots\\ &\dots\times\left(-\left.\frac{d}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} H(t_i,\alpha)\right)\dots\left(-A_\nu(\gamma(\tau_1))\gamma_{\tau_1}'^{\nu}\right).\end{aligned} \tag{3.41}$$

По теореме Фубини

$$\begin{aligned}\left.\frac{d^2}{d\alpha^2}\right|_{\alpha=0} U_{t,s}(\alpha) &= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{k}\int\limits_s^t drU_{t,r}^{k-j}\left(-\left.\frac{d^2}{d\alpha^2}\right|_{\alpha=0} H(r,\alpha)\right)U_{r,s}^{j-1}+\\ &+2\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{j=2}^{k}\sum_{i=2}^{j}\int\limits_{\Delta_{s,t}^2} d\tau_2 d\tau_1 U_{t,\tau_2}^{k-j}\left(-\left.\frac{d}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} H(\tau_2,\alpha)\right)U_{t,\tau_2}^{j-i}\times\\ &\times\left(-\left.\frac{d}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} H(\tau_1,\alpha)\right)U_{r,s}^{i-2}.\end{aligned} \tag{3.42}$$

Для каждого $n \in \mathbb{N}$ выполняются следующие оценки:

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\|U_{t,r}^{k-j}\ \frac{d^2}{d\alpha^2}\Big|_{\alpha=0} H(r,\alpha)U_{r,s}^{j-1}\| \le Ce^{(t-s)C},$$

$$\sum_{k=2}^{n}\sum_{j=2}^{k}\sum_{i=2}^{j}\|U_{t,\tau_2}^{k-j}\ \frac{d}{d\alpha}\Big|_{\alpha=0} H(\tau_2,\alpha)U_{\tau_2,\tau_1}^{j-i}\ \frac{d}{d\alpha}\Big|_{\alpha=0} H(\tau_1,\alpha)U_{\tau_1,s}^{i-2}\| \le C^2e^{(t-s)C}.$$

Тогда мы можем применить теорему Лебега:

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{d\alpha^2}\Big|_{\alpha=0} U_{t,s}(\alpha) = \int_s^t drU_{t,r}\left(-\frac{d^2}{d\alpha^2}\Big|_{\alpha=0} H(r,\alpha)\right)U_{r,s}+\\ +2\int_{\Delta_{s,t}^2} d\tau_2 d\tau_1 U_{t,\tau_2}\left(-\frac{d}{d\alpha}\Big|_{\alpha=0} H(\tau_2,\alpha)\right)U_{\tau_2,\tau_1}\times\\ \times\left(-\frac{d}{d\alpha}\Big|_{\alpha=0} H(\tau_1,\alpha)\right)U_{\tau_1,s}.\end{aligned} \tag{3.43}$$

Мы можем представить $\frac{d^2}{d\alpha^2}\Big|_{\alpha=0} U_{t,s}(\alpha)$ как сумму $\sum_{i=1}^{6} U_i$, где

$$\begin{aligned}U_1 := \int_s^t drU_{t,r}\{-\partial_\lambda\partial_\mu A_\nu(\gamma_r) + \partial_\kappa A_\nu(\gamma_r)\Gamma^\kappa_{\mu\lambda}(\gamma_r) + 2\partial_\mu A_\kappa(\gamma_r)\Gamma^\kappa_{\lambda\nu}(\gamma_r)-\\ - A_\kappa(\gamma_r)(\Gamma^\kappa_{\beta\lambda}(\gamma_r) + \Gamma^\kappa_{\lambda\beta}(\gamma_r))\Gamma^\beta_{\mu\nu}(\gamma_r)+\\ + A_\kappa(\gamma_r)\partial_\nu\Gamma^\kappa_{\lambda\mu}(\gamma_r)\}T_r^\lambda T_r^\mu \gamma_r'^\nu f^2(r))U_{r,s},\end{aligned} \tag{3.44}$$

$$U_2 := \int_s^t drU_{t,r}(-\nabla_\mu A_\nu(\gamma_r)T_r^\mu T_r^\nu)(f^2(r))'U_{r,s}, \tag{3.45}$$

$$\begin{aligned}U_3 := 2\int_s^t drU_{t,r}\left(\partial_\lambda A_\nu(\gamma_r)T_r^\lambda\gamma_r'^\nu + A_\kappa(\gamma_r)T_r'^\kappa\right)f(r)\times\\ \times\int_s^r dpU_{r,p}\left(\partial_\lambda A_\nu(\gamma_p)T_p^\lambda\gamma_p'^\nu + A_\kappa(\gamma_p)T_p'^\kappa\right)f(p)U_{p,s},\end{aligned} \tag{3.46}$$

$$U_4 := 2\int\limits_s^t drU_{t,r}A_\mu(\gamma_r)T_r^\mu f'(r)\times$$

$$\times\int\limits_s^r dpU_{r,p}\left(\partial_\lambda A_\nu(\gamma_p)T_p^\lambda\gamma_p'^\nu + A_\kappa(\gamma_p)T_p'^\kappa\right)f(p)U_{p,s}, \quad (3.47)$$

$$U_5 := 2\int\limits_s^t dr\int\limits_r^t dpU_{t,p}\left(\partial_\lambda A_\nu(\gamma_p)T_p^\lambda\gamma_p'^\nu + A_\kappa(\gamma_p)T_p'^\kappa\right)f(p)U_{p,r}dr\times$$

$$\times A_\mu(\gamma_r)T_r^\mu f'(r)U_{r,s}, \quad (3.48)$$

$$U_6 := 2\int\limits_s^t dr\{\int\limits_r^t dpU_{t,p}A_\nu(\gamma_p)T_p^\nu f'(p)U_{p,r}\}A_\mu(\gamma_r)T_r^\mu f'(r)U_{r,s} \quad (3.49)$$

и преобразуем эти слагаемые. Интегрируя (3.45) по частям, используя выражение (3.1) для T', переименовав индексы мы получаем

$$U_2 = -\nabla_\mu A_\nu(\gamma_t)T_t^\mu T_t^\nu U_{t,s}f^2(t) + U_{t,s}\nabla_\mu A_\nu(\gamma_s)T_s^\mu T_s^\nu f^2(s)+$$

$$+\int\limits_s^t drU_{t,r}\{\partial_\nu\partial_\lambda A_\mu(\gamma_r) + [A_\nu(\gamma_r),\partial_\lambda A_\mu(\gamma_r)] - (\partial_\kappa A_\lambda(\gamma_r) + \partial_\lambda A_\kappa(\gamma_r))\Gamma^\kappa_{\mu\nu}(\gamma_r)-$$

$$-(\partial_\nu A_\kappa(\gamma_r) + [A_\nu(\gamma_r), A_\kappa(\gamma_r)])\Gamma^\kappa_{\mu\lambda}(\gamma_r) + A_\kappa(\gamma_r)(\Gamma^\kappa_{\lambda\beta}(\gamma_r) + \Gamma^\kappa_{\beta\lambda}(\gamma_r))\Gamma^\beta_{\mu\nu}(\gamma_r)-$$

$$-A_\kappa(\gamma_r)\partial_\nu\Gamma^\kappa_{\lambda\mu}(\gamma_r)\}T_r^\mu T_r^\lambda\gamma_r'^\nu f^2(r)U_{r,s}. \quad (3.50)$$

Преобразуем U_4. Интегрируя (3.47) по частям, мы получаем

$$U_4 = 2A_\mu(\gamma_t)T_t^\mu f(t)\int\limits_s^t drU_{t,r}\left(\partial_\lambda A_\nu(\gamma_r)T_r^\lambda\gamma_r'^\nu + A_\kappa(\gamma_r)T_r'^\kappa\right)f(r)U_{t,s}-$$

$$-\int\limits_s^t drU_{t,r}\{A_\mu(\gamma_r)\partial_\lambda A_\nu(\gamma_r) + A_\lambda(\gamma_r)\partial_\mu A_\nu(\gamma_r) - 2A_\mu(\gamma_r)A_\kappa(\gamma_r)\Gamma^\kappa_{\lambda\nu}(\gamma_r)\}\times$$

$$\times\gamma_r'^\nu T_r^\mu T_r^\lambda f^2(r)U_{r,s} + \int\limits_s^t\int\limits_s^t drdpK^{V,1}_{\gamma_{[s,t]}}(r,p)f(p)f(r), \quad (3.51)$$

где

$$K^{V,1}_{\gamma_{[s,t]}}(r,p) = -2(U_{t,r}A_\mu(\gamma_r)T^\mu_r U_{r,p})'_r \left(\partial_\lambda A_\nu(\gamma_p)T^\lambda_p\gamma'^\nu_p + A_\kappa(\gamma_p)T'^\kappa_p\right)\times$$
$$\times U_{p,s}\theta(r-p) = -2U_{t,r}\{(\partial_\nu A_\mu(\gamma_r) + [A_\nu(\gamma_r), A_\mu(\gamma_r)])\gamma'^\nu_r T^\mu_r + A_\mu(\gamma_r)T'^\mu_r\}\times$$
$$\times U_{r,p}\left(\partial_\mu A_\nu(\gamma_p)T^\mu_p\gamma'^\nu_p + A_\kappa(\gamma_p)T'^\kappa_p\right)U_{p,s}\theta(r-p), \quad (3.52)$$

где θ — функция Хевисайда, т.е. $\theta(r)=1$ при $r\geq 0$ и $\theta(r)=0$ при $r<0$ Преобразуем U_5. Интегрируя (3.48) по частям, мы получаем

$$U_5 = -2\int\limits_s^t drU_{t,r}\left(\partial_\lambda A_\nu(\gamma_r)T^\lambda_r\gamma'^\nu_r + A_\kappa(\gamma_r)T'^\kappa_r\right)f(r)U_{r,s}A_\mu(\gamma_s)T^\mu_s f(s)+$$
$$+\int\limits_s^t drU_{t,r}\{\partial_\lambda A_\nu(\gamma_r)A_\mu(\gamma_r) + \partial_\mu A_\nu(\gamma_r)A_\lambda(\gamma_r) - 2A_\kappa(\gamma_r)\Gamma^\kappa_{\lambda\nu}(\gamma_r)A_\mu(\gamma_r)\}\times$$
$$\times T^\lambda_r T^\mu_r\gamma'^\nu_r f^2(r)U_{r,s} + \int\limits_s^t\int\limits_s^t drdpK^{V,2}_{\gamma_{[s,t]}}(r,p)f(p)f(r), \quad (3.53)$$

где

$$K^{V,2}_{\gamma_{[s,t]}}(r,p) = -2U_{t,p}\{\partial_\mu A_\nu(\gamma_p)T^\mu_p\gamma'^\nu_p + A_\kappa(\gamma_p)T'^\kappa_p\}U_{p,r}\times$$
$$\times\{(\partial_\nu A_\mu(\gamma_r) + [A_\nu(\gamma_r), A_\mu(\gamma_r)])\gamma'^\nu_r T^\mu_r + A_\mu(\gamma_r)T'^\mu_r\}U_{r,s}\theta(p-r). \quad (3.54)$$

Преобразуем U_6. Используя (3.1) для T' и интегрируя по частям, мы получаем

$$\int\limits_r^t dpU_{t,p}A_\nu(\gamma_p)T^\nu_p f'(p)U_{p,r} = A_\lambda(\gamma_t)T^\lambda_t f(t)U_{t,r} - U_{t,r}A_\lambda(\gamma_r)T^\lambda_r f(r)-$$
$$-\int\limits_r^t dpU_{t,p}(\partial_\nu A_\mu(\gamma_p) + [A_\nu(\gamma_p), A_\mu(\gamma_p)] - A_\kappa(\gamma_p)\Gamma^\kappa_{\mu\nu}(\gamma_p))T^\mu_p\gamma'^\nu_p f(p)U_{p,r}. \quad (3.55)$$

Интегрируя по частям, мы получаем

$$U_6 = -2\int\limits_s^t drU_{t,r}\{\partial_\nu A_\lambda(\gamma_r) + [A_\nu(\gamma_r), A_\lambda(\gamma_r)] - A_\kappa(\gamma_r)\Gamma^\kappa_{\lambda\nu}(\gamma_r)\}\times$$

$$\times T^\lambda_r \gamma'^\nu_r f^2(r) A_\mu(\gamma_r) T^\mu_r U_{r,s} +$$

$$+\int\limits_s^t\int\limits_s^t drdpK^{V,3}_{\gamma_{[s,t]}}(r,p)f(p)f(r) - \int\limits_s^t drU_{t,r}A_\lambda(\gamma_r)T^\lambda_r A_\mu(\gamma_r)T^\mu_r (f^2)'(r)U_{r,s}+$$

$$+ 2A_\lambda(\gamma_t)T^\lambda_t f(t)\int\limits_s^t U_{t,r}A_\mu(\gamma_r)T^\mu_r f'(r)U_{r,s}dr+$$

$$+ 2\int\limits_s^t drU_{t,r}(\partial_\nu A_\mu(\gamma_r) + [A_\nu(\gamma_r), A_\mu(\gamma_r)])\gamma'^\nu_r T^\mu_r + A_\mu(\gamma_r)T'^\mu_r)\times$$

$$\times U_{r,s}A_\lambda(\gamma_s)T^\lambda_s f(s), \quad (3.56)$$

где

$$K^{V,3}_{\gamma_{[s,t]}}(r,p) = 2U_{t,p}((\partial_\nu A_\mu(\gamma_p) + [A_\nu(\gamma_p), A_\mu(\gamma_p)])T^\mu_p \gamma'^\nu_p + \ A_\mu(\gamma_p)T'^\mu_p\}\times$$
$$\times U_{p,r}\{(\partial_\nu A_\mu(\gamma_r) + [A_\nu(\gamma_r), A_\mu(\gamma_r)])\gamma'^\nu_r T^\mu_r + A_\mu(\gamma_r)T'^\mu_r\}U_{r,s}\theta(p-r). \quad (3.57)$$

Т.к. выполняется

$$\int\limits_s^t drU_{t,r}A_\lambda(\gamma_r)T^\lambda_r A_\mu(\gamma_r)T^\mu_r(f^2)'(r)U_{t,s} = A_\lambda(\gamma_t)T^\lambda_t A_\mu(\gamma_t)T^\mu_t f^2(t)U_{t,s}-$$

$$- U_{t,s}A_\lambda(\gamma_s)T^\lambda_s A_\mu(\gamma_s)T^\mu_s f^2(s) - \int\limits_s^t drU_{t,r}\{(\partial_\nu A_\lambda(\gamma_r) + A_\nu(\gamma_r)A_\lambda(\gamma_r))A_\mu(\gamma_r)+$$

$$+ A_\lambda(\gamma_r)\partial_\nu A_\mu(\gamma_r) - A_\lambda(\gamma_r)A_\mu(\gamma_r)A_\nu(\gamma_r) - A_\kappa(\gamma_r)\Gamma^\kappa_{\lambda\nu}(\gamma_r)A_\mu(\gamma_r)-$$

$$- A_\lambda(\gamma_r)A_\kappa(\gamma_r)\Gamma^\kappa_{\mu\nu}(\gamma_r)\}T^\mu_r T^\lambda_r \gamma'^\nu_r f^2(r)U_{r,s}, \quad (3.58)$$

мы получаем

$$U_6 = \int\limits_s^t drU_{t,r}\{-[\partial_\nu A_\lambda(\gamma_r) + [A_\nu(\gamma_r), A_\lambda(\gamma_r)], A_\mu(\gamma_r)] +$$

$$+ [A_\kappa(\gamma_r), A_\mu(\gamma_r)]\Gamma^\kappa_{\lambda\nu}(\gamma_r)\}T^\lambda_r T^\mu_r \gamma'^\nu(r) f^2(r) U_{t,s}$$

$$+2\int\limits_s^t drU_{t,r}\{(\partial_\nu A_\mu(\gamma_r) + [A_\nu(\gamma_r), A_\mu(\gamma_r)])\gamma'^\nu_r T^\mu_r + A_\mu(\gamma_r) T'^\mu_r\} U_{r,s} A_\lambda(\gamma_s) T^\lambda_s f(s) +$$

$$+ 2A_\lambda(\gamma_t) T^\lambda_t f(t)\{A_\mu(\gamma_t) T^\mu_t f(t) U_{t,s} - U_{t,s} A_\mu(\gamma_s) T^\mu_s f(s) -$$

$$- 2\int\limits_s^t drU_{t,r}\{(\partial_\nu A_\mu(\gamma_r) + [A_\nu(\gamma_r), A_\mu(\gamma_r)])\gamma'^\nu_r T^\mu_r + A_\mu(\gamma_r) T'^\mu_r\} U_{r,s}\}. \quad (3.59)$$

Заметим $U_3 = \int\limits_s^t drdpK^{V,4}_{\gamma_{[s,t]}}(r,p) f(p) f(r)$, где

$$K^{V,4}_{\gamma_{[s,t]}}(r,p) = 2U_{t,r}\left(\partial_\mu A_\nu(\gamma_r) T^\mu_r \gamma'^\nu_r + A_\kappa(\gamma_r) T'^\kappa_r\right) \times$$

$$\times U_{r,p}\left(\partial_\mu A_\nu(\gamma_p) T^\mu_p \gamma'^\nu_p + A_\kappa(\gamma_p) T'^\kappa_p\right) U_{p,s}\theta(r-p). \quad (3.60)$$

Используя (3.59), (3.53), (3.51), (3.50), мы получаем для $\frac{d^2}{d\alpha^2}\Big|_{\alpha=0} U_{t,s}(\alpha) = \sum_{i=1}^6 U_i$:

$$\frac{d^2}{d\alpha^2}\Big|_{\alpha=0} U_{t,s}(\alpha) = \int\limits_s^t drK^L_{\gamma_{[s,t]}}(r) f^2(r) +$$

$$+ \int\limits_s^t \int\limits_s^t drdpK^V_{\gamma_{[s,t]}}(r,p) f(r) f(p) + \text{слагаемые, зависящие от } f(s) \text{ и } f(t)$$

$$(3.61)$$

где

$$K^V_{\gamma_{[s,t]}}(r,p) = \sum_i^4 K^{V,i}(r,p) =$$

$$= 2\theta(r-p)U_{t,r}\{(\partial_\nu A_\mu(\gamma_r) + [A_\nu(\gamma_r), A_\mu(\gamma_r)]) - \partial_\mu A_\nu(\gamma_r)\}\gamma_r'^\nu T_r^\mu \times$$

$$\times U_{r,p}\{(\partial_\nu A_\mu(\gamma_p) + [A_\nu(\gamma_p), A_\mu(\gamma_p)]) - \partial_\mu A_\nu(\gamma_p)\}\gamma_p'^\nu T_p^\mu U_{p,s} =$$

$$= 2\theta(r-p)U_{t,r}(-F_{\mu\nu}(\gamma_r)T_r^\mu \gamma_r'^\nu)\times$$

$$\times U_{r,p}(-F_{\mu\nu}(\gamma_p)T_p^\mu \gamma_p'^\nu)U_{p,s} \quad (3.62)$$

и

$$K^L_{\gamma_{[s,t]}}(r) =$$

$$= U_{t,r}\{\{-\partial_\lambda\partial_\mu A_\nu(\gamma_r) + \partial_\kappa A_\nu(\gamma_r)\Gamma^\kappa_{\mu\lambda}(\gamma_r) + 2\partial_\mu A_\kappa(\gamma_r)\Gamma^\kappa_{\lambda\nu}(\gamma_r) -$$

$$- A_\kappa(\gamma_r)(\Gamma^\kappa_{\beta\lambda}(\gamma_r) + \Gamma^\kappa_{\lambda\beta}(\gamma_r))\Gamma^\beta_{\mu\nu}(\gamma_r) + A_\kappa(\gamma_r)\partial_\nu\Gamma^\kappa_{\lambda\mu}(\gamma_r)\} +$$

$$+ \{\partial_\nu\partial_\lambda A_\mu(\gamma_r) + [A_\nu(\gamma_r), \partial_\lambda A_\mu(\gamma_r)] - (\partial_\kappa A_\lambda(\gamma_r) + \partial_\lambda A_\kappa(\gamma_r))\Gamma^\kappa_{\mu\nu}(\gamma_r) -$$

$$- (\partial_\nu A_\kappa(\gamma_r) + [A_\nu(\gamma_r), A_\kappa(\gamma_r)])\Gamma^\kappa_{\mu\lambda}(\gamma_r) + A_\kappa(\gamma_r)(\Gamma^\kappa_{\lambda\beta}(\gamma_r) + \Gamma^\kappa_{\beta\lambda}(\gamma_r))\Gamma^\beta_{\mu\nu}(\gamma_r) -$$

$$- A_\kappa(\gamma_r)\partial_\nu\Gamma^\kappa_{\lambda\mu}(\gamma_r))\} -$$

$$- \{A_\mu(\gamma_r)\partial_\lambda A_\nu(\gamma_r) + A_\lambda(\gamma_r)\partial_\mu A_\nu(\gamma_r) - 2A_\mu(\gamma_r)A_\kappa(\gamma_r)\Gamma^\kappa_{\lambda\nu}(\gamma_r)\} +$$

$$+ \{\partial_\lambda A_\nu(\gamma_r)A_\mu(\gamma_r) + \partial_\mu A_\nu(\gamma_r)A_\lambda(\gamma_r) - 2A_\kappa(\gamma_r)\Gamma^\kappa_{\lambda\nu}(\gamma_r)A_\mu(\gamma_r)\} -$$

$$-\{[\partial_\nu A_\lambda(\gamma_r) + [A_\nu(\gamma_r), A_\lambda(\gamma_r)], A_\mu(\gamma_r)] - [A_\kappa(\gamma_r), A_\mu(\gamma_r)]\Gamma^\kappa_{\lambda\nu}(\gamma_r)\}\}T_r^\mu T_r^\lambda \gamma_r'^\nu U_{r,s} =$$

$$= U_{t,r}\{\{(-\partial_\lambda\partial_\mu A_\nu(\gamma_r) + \partial_\nu\partial_\lambda A_\mu(\gamma_r) + [A_\nu(\gamma_r), \partial_\lambda A_\mu(\gamma_r)] +$$

$$+ (\partial_\lambda A_\kappa(\gamma_r) - \partial_\kappa A_\lambda(\gamma_r))\Gamma^\kappa_{\mu\nu}(\gamma_r) + F_{\kappa\nu}(\gamma_r)\Gamma^\kappa_{\mu\lambda}(\gamma_r))\} +$$

$$+ \{[\partial_\lambda A_\nu(\gamma_r), A_\mu(\gamma_r)] - [A_\lambda(\gamma_r), \partial_\mu A_\nu(\gamma_r)] - 2[A_\kappa(\gamma_r), A_\lambda(\gamma_r)]\Gamma^\kappa_{\mu\nu}\} -$$

$$-\{[\partial_\nu A_\lambda(\gamma_r) + [A_\nu(\gamma_r), A_\lambda(\gamma_r)], A_\mu(\gamma_r)] - [A_\kappa(\gamma_r), A_\lambda(\gamma_r)]\Gamma^\kappa_{\mu\nu}(\gamma_r)\}\}T_r^\mu T_r^\lambda \gamma_r'^\nu U_{r,s} =$$

$$= U_{t,r}(-\nabla_\lambda F_{\mu\nu}(\gamma_r)T_r^\mu T_r^\lambda \gamma_r'^\nu)U_{r,s}. \quad (3.63)$$

В последнем равенстве мы используем, что $\partial_\nu\partial_\lambda A_\mu(\gamma_r) = \partial_\lambda\partial_\nu A_\mu(\gamma_r)$.

Соберем слагаемые, зависящие от $f(s)$ и $f(t)$, в (3.61):

$$
\begin{aligned}
-\{\nabla_\mu A_\nu(\gamma_t)T_t^\mu T_t^\nu + A(\gamma_t)T_t A(\gamma_t)T_t\}U_{t,s}f^2(t)+ \\
+U_{t,s}\{\nabla_\mu A_\nu(\gamma_s)T_s^\mu T_s^\nu - A(\gamma_s)T_s A(\gamma_s)T_s\}f^2(s)- \\
-2A(\gamma_t)T_t f(t)\{B_{t,s} - A(\gamma_t)T_t f(t)U_{t,s} + U_{t,s}A(\gamma_s)T_s f(s)\}+ \\
+2\{-A(\gamma_t)T_t f(t)U_{t,s} + U_{t,s}A(\gamma_s)T_s f(s) + B_{t,s}\}A(\gamma_s)T_s f(s)+ \\
+2A(\gamma_t)T_t f(t)U_{t,s}A(\gamma_s)T_s f(s), \quad (3.64)
\end{aligned}
$$

где символом $B_{t,s}$ обозначается

$$
\int\limits_s^t drU_{t,r}(-F_{\mu\nu}(\gamma_r)T_r^\mu \gamma_r'^\nu)f(r)U_{r,s}.
$$

(Ниже символом $B_{t,s}^{d,c}$, если $\gamma_t \in W_d$ и $\gamma_s \in W_c$, будет обозначаться $\int_s^t drU_{t,r}^d(-F_{\mu\nu}(\gamma_r)T_r^\mu \gamma_r'^\nu)f(r)U_{r,s}^c$.) Слагаемые, зависящие от $f(s)$ и $f(t)$ исчезают, если $f(s) = f(t) = 0$. Тогда мы получим (3.33), если докажем, что $\frac{d^2}{d\alpha^2}\Big|_{\alpha=0} U_{1,0}^{a,a_x}(\gamma_\alpha^{T,f})$ может быть представлена в виде (3.61).

Заметим, из (3.40) следует следующее выражение для $\frac{d}{d\alpha}\big|_{\alpha=0} U_{t,s}(\alpha)$ при $s = t_i$ и $t = t_{i+1}$ для всех $i = \{0, \ldots, m-1\}$:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{d\alpha}\Big|_{\alpha=0} U_{t,s}(\alpha) = \int\limits_s^t drU_{t,r}\{-\partial_\mu A_\nu(\gamma_r)T_r^\mu \gamma_r'^\nu - A_\mu(\gamma_r)(T_r^\mu f(r))'\}U_{r,s} = \\
= B_{t,s} - A_\mu(\gamma_t)T_t^\mu f(t)U_{t,s} + U_{t,s}A_\mu(\gamma_s)T_s^\mu f(s). \quad (3.65)
\end{aligned}
$$

Пусть $0 \le s < r < t \le 1$, такие, что $\gamma_t \in W_d$, $\gamma_s \in W_c$, $\gamma_r \in W_{a'} \cap W_b$. Мы докажем, что, если $\frac{d}{d\alpha}\big|_{\alpha=0} U_{t,r}^{d,a'}(\alpha)$, $\frac{d}{d\alpha}\big|_{\alpha=0} U_{t,r}^{d,a'}(\alpha)$ и $\frac{d^2}{d\alpha^2}\Big|_{\alpha=0} U_{r,s}^{b,c}(\alpha)$, $\frac{d^2}{d\alpha^2}\Big|_{\alpha=0} U_{r,s}^{b,c}(\alpha)$ могут быть представлены в виде (3.65) и в виде (3.61), тогда $\frac{d}{d\alpha}\big|_{\alpha=0} U_{t,s}^{d,c}(\alpha)$ и $\frac{d^2}{d\alpha^2}\Big|_{\alpha=0} U_{t,s}^{d,c}(\alpha)$ могут быть представлены как (3.65) и как (3.61) соответственно. Тогда по индукции мы получим (3.33).

Используя формулу Лейбница для $U^{d,c}_{t,s}(\alpha) = U^{d,a'}_{t,r}(\alpha)\psi_{a'b}(\gamma^{T,f}_\alpha(r))U^{b,c}_{r,s}(\alpha)$, мы получаем:

$$\frac{d}{d\alpha}U^{d,c}_{t,s}(\alpha) = \\ = \frac{d}{d\alpha}U^{d,a'}_{t,r}(\alpha)\psi_{a'b}(\gamma^{T,f}_\alpha(r))U^{b,c}_{r,s}(\alpha) + U^{d,a'}_{t,r}(\alpha)\frac{d}{d\alpha}(\psi_{a'b}(\gamma^{T,f}_\alpha(r)))U^{b,c}_{r,s}(\alpha) + \\ + U^{d,a'}_{t,r}(\alpha)\psi_{a'b}(\gamma^{T,f}_\alpha(r))\frac{d}{d\alpha}U^{b,c}_{r,s}(\alpha), \quad (3.66)$$

$$\frac{d^2}{d\alpha^2}U^{d,c}_{t,s}(\alpha) = \frac{d^2}{d\alpha^2}U^{d,a'}_{t,r}(\alpha)\psi_{a'b}(\gamma^{T,f}_\alpha(r))U^{b,c}_{r,s}(\alpha) + \\ + 2\frac{d}{d\alpha}U^{d,a'}_{t,r}(\alpha)\psi_{a'b}(\gamma^{T,f}_\alpha(r))\frac{d}{d\alpha}U^{b,c}_{r,s}(\alpha) + U^{d,a'}_{t,r}(\alpha)\psi_{a'b}(\gamma^{T,f}_\alpha(r))\frac{d^2}{d\alpha^2}U^{b,c}_{r,s}(\alpha) + \\ + 2\frac{d}{d\alpha}U^{d,a'}_{t,r}(\alpha)\frac{d}{d\alpha}(\psi_{a'b}(\gamma^{T,f}_\alpha(r)))U^{b,c}_{r,s}(\alpha) + \\ + 2U^{d,a'}_{t,r}(\alpha)\frac{d}{d\alpha}(\psi_{a'b}(\gamma^{T,f}_\alpha(r)))\frac{d}{d\alpha}U^{b,c}_{r,s}(\alpha) + U^{d,a'}_{t,r}(\alpha)\frac{d^2}{d\alpha^2}(\psi_{a'b}(\gamma^{T,f}_\alpha(r)))U^{b,c}_{r,s}(\alpha). \quad (3.67)$$

В силу (3.66) и равенства $A^{a'}_\mu(\gamma_r) = \psi_{a'b}(\gamma_r)A^b_\mu(\gamma_r)\psi^{-1}_{a'b}(\gamma_r) - \partial_\mu\psi_{a'b}(\gamma_r)\psi^{-1}_{a'b}(\gamma_r)$ мы получаем, что

$$\left.\frac{d}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} U^{d,c}_{t,s}(\alpha) = \{B^{d,a'}_{t,r} - A^d_\mu(\gamma_t)T^\mu_t f(t)U^{d,a'}_{t,r} + U^{d,a'}_{t,r}A^{a'}_\mu(\gamma_r)T^\mu_r f(r)\}\psi_{a'b}(\gamma_r)U^{b,c}_{r,s} + \\ + U^{d,a'}_{t,r}\psi_{a'b}(\gamma_r)\{B^{b,c}_{r,s} - A^b_\mu(\gamma_r)T^\mu_r f(r)U^{b,c}_{r,s} + U^{b,c}_{r,s}A^c_\mu(\gamma_s)T^\mu_s f(s)\} + \\ + U^{d,a'}_{t,r}\partial_\mu\psi_{a'b}(\gamma_r)T^\mu_r f(r)U^{b,c}_{r,p} = B^{d,c}_{t,s} - A^d_\mu(\gamma_t)T^\mu_t f(t)U^{d,c}_{t,s} + \\ + U^{d,c}_{t,s}A_\mu(\gamma_s)T^\mu_s f(s). \quad (3.68)$$

Выделим слагаемые, зависящие от $f(s)$, $f(t)$ и $f(r)$, в $\left.\frac{d^2}{d\alpha^2}\right|_{\alpha=0} U^{d,c}_{t,s}(\alpha)$ ниже в формулах в (3.73) и (3.69) и покажем, что слагаемые, зависящие от $f(r)$

сокращаются. Используя (3.65), мы получаем равенство

$$
\begin{aligned}
&2\{B_{t,r}^{d,a'} - A^d(\gamma_t)T_t f(t)U_{t,r}^{d,a'} + U_{t,r}^{d,a'}A^{a'}(\gamma_r)T_r f(r)\}\psi_{ab}(\gamma_r)\times \\
&\qquad \times\{B_{r,s}^{b,c} - A^b(\gamma_r)T_r f(r)U_{r,s}^{b,c} + U_{r,s}^{b,c}A^c(\gamma_s)T_s f(s)\}+ \\
&\qquad + 2\{B_{t,r}^{d,a'} - A^d(\gamma_t)T_t f(t)U_{t,r}^{d,a'} + U_{t,r}^{d,a'}A^{a'}(\gamma_r)T_r f(r)\}\times \\
&\qquad \times\{\partial_\mu\psi_{a'b}(\gamma_r)T_r^\mu f(r) + A^{a'}(\gamma_r)T_r f(r)\psi_{a'b}(\gamma_r)\}U_{r,s}^{b,c} \\
&\qquad + 2U_{t,r}^{d,a'}\{\partial_\mu\psi_{a'b}(\gamma_r)T_r^\mu f(r) - \psi_{a'b}(\gamma_r)A^b(\gamma_r)T_r f(r)\}\times \\
&\qquad \times\{B_{r,s}^{b,c} - A^b(\gamma_r)T_r f(r)U_{r,s}^{b,c} + U_{r,s}^{b,c}A^c(\gamma_s)T_s f(s)\}- \\
&- 2A^d(\gamma_t)T_t f(t)\{B_{t,r}^{d,a'} - A^d(\gamma_t)T_t f(t)U_{t,r}^{d,a'} + U_{t,r}^{d,a'}A^{a'}(\gamma_r)T_r f(r)\}\psi_{a'b}(\gamma_r)U_{r,s}^{b,c}+ \\
&+ 2U_{t,r}^{d,a'}\psi_{a'b}(\gamma_r)\{B_{r,s}^{b,c} - A^b(\gamma_r)T_r f(r)U_{r,s}^{b,c} + U_{r,s}^{b,c}A^c(\gamma_s)T_s f(s)\}A^c(\gamma_s)T_s f(s)+ \\
&\qquad + 2A_\lambda^d(\gamma_t)T_t^\lambda f(t)U_{t,r}^{d,a'}A_\lambda^{a'}(\gamma_r)T_r^\lambda f(r)\psi_{a'b}(\gamma_r)U_{t,r}^{d,a'}+ \\
&\qquad + 2U_{t,r}^{d,a'}\psi_{a'b}(\gamma_r)A_\lambda^b(\gamma_r)T_r^\lambda f_r U_{r,s}^{b,c}A_\lambda^c(\gamma_s)T_s^\lambda f(s) = \\
&= 2B_{t,r}^{d,a'}\psi_{a'b}(\gamma_r)B_{r,s}^{b,c} + 2U_{t,r}^{d,a'}A^{a'}(\gamma_r)T_r\psi_{a'b}(\gamma_r)A^b(\gamma_r)T_r f^2(r)U_{r,s}^{b,c}- \\
&\qquad - 2A^d(\gamma_t)T_t f(t)\{U_{t,r}^{d,a'}\psi_{a'b}(\gamma_r)B_{r,s}^{b,c} + B_{t,r}^{d,a'}\psi_{a'b}(\gamma_r)U_{r,s}^{b,c}- \\
&- A^d(\gamma_t)T_t f(t)U_{t,r}^{d,a'}\psi_{a'b}(\gamma_r)U_{r,s}^{b,c} + U_{t,r}^{d,a'}\psi_{a'b}(\gamma_r)U_{r,s}^{b,c}A^c(\gamma_s)T_s f(s)\}+ \\
&+ 2\{U_{t,r}^{d,a'}\psi_{ab}(\gamma_r)B_{r,s}^{d,a'} + B_{t,r}^{d,a'}\psi_{a'b}(\gamma_r)U_{t,r}^{d,a'} - A^d(\gamma_t)T_t f(t)U_{t,r}^{d,a'}\psi_{a'b}(\gamma_r)U_{r,s}^{b,c}+ \\
&\qquad + U_{t,r}^{d,a'}\psi_{a'b}(\gamma_r)U_{r,s}^{b,c}A^c(\gamma_s)T_s f(s)\}A^c(\gamma_s)T_s f(s). \qquad (3.69)
\end{aligned}
$$

Т.к. $A_\mu^{a'}(\gamma_r) = \psi_{a'b}(\gamma_r)A_\mu^b(\gamma_r)\psi_{a'b}^{-1}(\gamma_r) - \partial_\mu\psi_{a'b}(\gamma_r)\psi_{a'b}^{-1}(\gamma_r)$, выполняются равенства

$$
\begin{aligned}
&- A^{a'}(\gamma_r)T_r A^{a'}(\gamma_r)T_r\psi_{a'b}(\gamma_r) - \psi_{a'b}(\gamma_r)A^b(\gamma_r)T_r A^b(\gamma_r)T_r \\
&\qquad + (\partial_\mu\psi_{a'b}(\gamma_r)A_\nu^b(\gamma_r) - A_\nu^{a'}(\gamma_r)\partial_\mu\psi_{a'b}(\gamma_r))T_r^\mu T_r^\nu = \\
&\qquad\qquad = -2A^{a'}(\gamma_r)T_r\psi_{a'b}(\gamma_r)A^b(\gamma_r)T_r. \qquad (3.70)
\end{aligned}
$$

и

$$\nabla_\mu A^{a'}_\nu(\gamma_r)T^\mu_r T^\nu_r \psi_{a'b}(\gamma_r) = \{\partial_\mu(\psi_{a'b}(\gamma_r)A^b_\nu(\gamma_r)\psi^{-1}_{a'b}(\gamma_r))\psi_{a'b}(\gamma_r)-$$

$$-\partial_\mu(\partial_\nu\psi_{a'b}(\gamma_r)\psi^{-1}_{a'b}(\gamma_r))\psi_{a'b}(\gamma_r) - \Gamma^\kappa_{\mu\nu}(\gamma_r)(\psi_{a'b}(\gamma_r)A^b_\kappa(\gamma_r) - \partial_\kappa\psi_{a'b}(\gamma_r))\}T^\mu_r T^\nu_r =$$

$$= \{\psi_{a'b}(\gamma_r)\partial_\mu A^b_\nu(\gamma_r) - \psi_{a'b}(\gamma_r)\Gamma^\kappa_{\mu\nu}(\gamma_r)A^b_\kappa(\gamma_r) - \partial_\mu\partial_\nu\psi_{a'b}(\gamma_r)+$$

$$+\partial_\kappa\psi_{a'b}(\gamma_r)\Gamma^\kappa_{\mu\nu}(\gamma_r) + \partial_\mu\psi_{a'b}(\gamma_r)A^b_\nu(\gamma_r) - \psi_{a'b}(\gamma_r)A^b_\nu(\gamma_r)\psi^{-1}_{a'b}(\gamma_r)\partial_\mu\psi_{a'b}(\gamma_r)-$$

$$-\partial_\nu\psi_{a'b}(\gamma_r)\psi^{-1}_{a'b}(\gamma_r)\partial_\mu\psi_{a'b}(\gamma_r)\}T^\mu_r T^\nu_r = \psi_{a'b}(\gamma_r)\nabla_\mu A^b_\nu(\gamma_r)T^\mu_r T^\nu_r-$$

$$-\partial_\mu\partial_\nu\psi_{a'b}(\gamma_r)T^\mu_r T^\nu_r + \partial_\kappa\psi_{a'b}(\gamma_r)\Gamma^\kappa_{\mu\nu}(\gamma_r))T^\mu_r T^\nu_r+$$

$$+(\partial_\mu\psi_{a'b}(\gamma_r)A^b_\nu(\gamma_r) - A^{a'}_\nu(\gamma_r)\partial_\mu\psi_{a'b}(\gamma_r))T^\mu_r T^\nu_r. \quad (3.71)$$

Отсюда следует

$$(\nabla_\nu A^{a'}_\mu(\gamma_r)T^\mu_r T^\nu_r - A^{a'}(\gamma_r)T_r A^{a'}(\gamma_r)T_r)\psi_{ab}(\gamma_r)+$$

$$+\psi_{ab}(\gamma_r)(-\nabla_\mu A^b_\nu(\gamma_r)T^\mu_r T^\nu_r - A^b(\gamma_r)T_r A^b(\gamma_r)T_r)+$$

$$+\partial_\nu\partial_\mu\psi_{ab}(\gamma_r)T^\mu_r T^\nu_r - \partial_\kappa\psi_{ab}(\gamma_r)\Gamma^\kappa_{\mu\nu}(\gamma_r))T^\mu_r T^\nu_r =$$

$$= -2A^{a'}(\gamma_r)T_r\psi_{ab}(\gamma_r)A^b(\gamma_r)T_r. \quad (3.72)$$

Тогда мы получаем

$$\{(-\nabla_\nu A^d_\mu(\gamma_t)T^\nu_t T^\mu_t - A^d(\gamma_t)T_t A^d(\gamma_t)T_t)U^{d,a'}_{t,r}f^2(t) + U^{d,a'}_{t,r}f^2(r)(\nabla_\nu A^{a'}_\mu(\gamma_r)T^\mu_r T^\nu_r-$$

$$-A^{a'}(\gamma_r)T_r A^{a'}(\gamma_r)T_r\}\psi_{a'b}(\gamma_r)U^{b,c}_{r,s} + U^{d,c}_{t,s}\psi_{a'b}(\gamma_r)\{(-\nabla_\mu A^b_\nu(\gamma_r)T^\mu_r T^\nu_r-$$

$$-A^b(\gamma_r)T_r A^b(\gamma_r)T_r)U^{b,c}_{r,s}f^2(r) + U^{b,c}_{r,s}(\nabla_\mu A^c_\nu(\gamma_s)T^\mu_s T^\nu_s - A^c(\gamma_s)T_s A^c(\gamma_s)T_s)f^2(s)\}+$$

$$+U^{d,a'}_{t,r}(\partial_\nu\partial_\mu\psi_{a'b}(\gamma_r)T^\mu_r T^\nu_r - \partial_\kappa\psi_{a'b}(\gamma_r)\Gamma^\kappa_{\mu\nu}(\gamma_r))T^\mu_r T^\nu_r f^2(r)U^{b,c}_{r,s} =$$

$$= (-\nabla_\nu A^d_\mu(\gamma_t)T^\nu_t T^\mu_t - A^d(\gamma_t)T_t A^d(\gamma_t)T_t)U^{d,a'}_{t,r}f^2(t)\psi_{a'b}(\gamma_r)U^{b,c}_{r,s}+$$

$$+U^{d,a'}_{t,r}\psi_{a'b}(\gamma_r)U^{b,c}_{r,s}(\nabla_\mu A^c_\nu(\gamma_s)T^\mu_s T^\nu_s - A^c(\gamma_s)T_s A^c(\gamma_s)T_s)f^2(s)\}-$$

$$-2U^{d,a'}_{t,r}A^{a'}(\gamma_r)T_r\psi_{a'b}(\gamma_r)A^b(\gamma_r)T_r f^2(r)U^{b,c}_{r,s}. \quad (3.73)$$

Из равенств (3.73) и (3.69) следует, что $\frac{d^2}{d\alpha^2}\Big|_{\alpha=0} U^{d,c}_{t,s}(\alpha)$ можно представить в виде (3.61), где слагаемые, зависящие от $f(s)$ и от $f(t)$ имеют вид (3.64), а также выполняется

$$\begin{aligned} K^V_{\gamma_{[s,t]}}(p_1,p_2) = 2U^d_{t,p_1}(-F_{\mu\nu}(\gamma_{p_1})T^\mu_{p_1}\gamma'^\nu_{p_1})U_{p_1,r}\theta(p_1-r)\times \\ \times\,\theta(r-p_2)U_{r,p_2}(-F_{\mu\nu}(\gamma_{p_2})T^\mu_{p_2}\gamma'^\nu_{p_2})U^c_{p_2,s}+ \\ +\,K^V_{\gamma_{[r,t]}}(p_1,p_2)\psi_{a'b}(\gamma_p)U^{b,c}_{r,s}\theta(p_2-r)+\theta(r-p_1)U^{d,a'}_{t,r}\psi_{a'b}(\gamma_r)K^V_{\gamma_{[s,r]}}(p_1,p_2) = \\ = 2U^d_{t,p_1}(-F_{\mu\nu}(\gamma_{p_1})T^\mu_{p_1}\gamma'^\nu_{p_1})U_{p_1,p_2}(-F_{\mu\nu}(\gamma_{p_2})T^\mu_{p_2}\gamma'^\nu_{p_2})U^c_{p_2,s}\theta(p_1-p_2). \quad (3.74) \end{aligned}$$

и выполняется

$$\begin{aligned} K^L_{\gamma_{[s,t]}}(p) = K^L_{\gamma_{[r,t]}}(p)\theta(p-r)\psi_{a'b}(\gamma_r)U^{b,c}_{r,s}+ \\ +\,U^{d,a'}_{t,r}\psi_{a'b}(\gamma_r)K^L_{\gamma_{[s,r]}}(p)\theta(r-p) = U^d_{t,p}(-\nabla_\lambda F_{\mu\nu}(\gamma_p))T^\mu_p T^\lambda_p \gamma'^\nu_p U^c_{p,s}. \quad (3.75) \end{aligned}$$

Тогда по индукции мы получаем представление (3.33) для $\frac{d^2}{d\alpha^2}\Big|_{\alpha=0} U^{a,a_x}_{1,0}(\gamma^{T,f}_\alpha)$. Т.к $K^V_\gamma \in L_2([0,1]\times[0,1], M_N)$, а $\{e_n\}$ — ортонормальный базис в $L_2[0,1]$, то выполняется

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^1\int\limits_0^1 drdpK^V_\gamma(r,p)e_n(r)e_n(p) = 0.$$

Т.к. $\{e_n\}$ — слабо равномерно плотный, мы получаем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \frac{d^2}{d\alpha^2}\Big|_{\alpha=0} U^{a,a_x}_{1,0}(\gamma^{T,f}_\alpha)(\alpha) = \int\limits_0^1 drK^L_\gamma(r).$$

Таким образом мы доказали лемму. □

Лемма 8. *Пусть в касательном пространстве* T_yM *задан некоторый ортонормированный базис* $Z_1(y),\ldots,Z_d(y)$, *тогда*

$$\sum_{i=1}^d \nabla_\lambda F_{\mu\nu}(y)Z^\mu_i(y)Z^\lambda_i(y) = \nabla_\mu F^\mu_\nu(y).$$

Доказательство. Чтобы убедиться в этом достаточно перейти в такую локальную систему координат $(z^1, \ldots, z^d)$, что в точке y для всех $i \in \{1, \ldots, d\}$ выполняется $\frac{\partial}{\partial z^i} = Z_i(y)$. $\square$

Теорема 6 — прямое следствие лемм 7 и 8.

Теорема 7. *Пусть все предположения теоремы 6 выполняются. Пусть $J^a_\nu(y)dy^\nu$ — семейство $Lie(G)$-значных 1-форм таких, что $J^a_\nu(y)dy^\nu$ определены на W_a и для $y \in W_a \cap W_b$ выполняется*

$$J^a_\nu(y) = \psi_{ab}(y) J^b_\nu(y) \psi^{-1}_{ab}(y). \tag{3.76}$$

Тогда следующие два утверждения равносильны:

1. *связность A на M является решением уравнений Янга-Миллса с источником:*
$$\nabla_\mu F^\mu_\nu = J_\nu; \tag{3.77}$$

2. *параллельный перенос $U^{a,a_x}_{1,0}$ на $PC^1_{x,W_a}([0,1], M)$ для каждого $a \in \Lambda$ является решением уравнения:*
$$\Delta_L U^{a,a_x}_{1,0}(\gamma) = -\int\limits_0^1 U^a_{1,r}(\gamma) J_\nu(\gamma_r) \gamma'^\nu_r U^{a_x}_{r,0}(\gamma) dr. \tag{3.78}$$

Доказательство. Из теоремы 6 очевидно следует, что, если выполняется $\nabla_\mu F^\mu_\nu = J_\nu$, то параллельный перенос является решением уравнения (3.78). Докажем обратное утверждение. Для каждой $\gamma \in PC^1_x([0,1], M)$ введем функцию R_γ на отрезке $[0,1]$ следующим образом:

$$R_\gamma(r) = \int\limits_0^r dp U^a_{1,p}(-\nabla_\mu F^\mu_\nu(\gamma_p) + J_\nu(\gamma_p)) \gamma'^\nu_p U^{a_x}_{p,0} dp.$$

Т.к. параллельный перенос не зависит от параметризации, то

$$R_\gamma(r) = U^{a,a_r}_{1,r}(\Delta_L U^{a_r,a_x}_{1,0}(\gamma^r) + \int\limits_0^r dp U^{a_r}_{1,p}(\gamma^r) J_\nu(\gamma^r_p)\gamma^{r\prime\nu}_p U^{a_x}_{p,0}(\gamma^r)) \equiv 0$$

где $a_r \in \Lambda$ такой, что $\gamma(r) \in W_{a_r}$, и кривая $\gamma^r \in PC^1_x([0,1], M)$ $(r \in [0,1])$ определяется так: $\gamma^r(t) = \gamma(rt)$. Тогда

$$R'_\gamma(r) = \frac{1}{d}\sum_{i=1}^d U^a_{1,r}(-\nabla_\mu F^\mu_\nu(\gamma_r)\gamma'^\nu_r + J_\nu(\gamma_r)\gamma'^\nu_r)U^{a_x}_{r,0} \equiv 0.$$

Т.к. $U_{1,r}, U_{r,0} \in G$, мы получаем $\nabla_\mu F^\mu_\nu(\gamma_r)\gamma'^\nu_r = J_\nu(\gamma_r)\gamma'^\nu_r$ для всех $\gamma \in PC^1_x([0,1], M)$ и для всех $t \in [0,1]$. Тогда $\nabla_\mu F^\mu_\nu = J_\nu$. □

Прямым следствием является теорема о связи между уравнениями Янга-Миллса и уравнением Леви-Лапласа.

Теорема 8. *Пусть все A_μ — C^2-гладкие функции. Пусть $\{e_n\}$ — слабо равномерно плотный базис в $L_2(0,1)$ такой, что все элементы $\{e_n\}$ принадлежат пространству $PC^1[0,1]$, причем для каждого $n \in \mathbb{N}$ выполняется $e_n(0) = e_n(1) = 0$. Следующие два утверждения равносильны:*

1. *связность A на M является решением уравнений Янга-Миллса:*

$$\nabla_\mu F^\mu_\nu = 0; \tag{3.79}$$

2. *для каждого $a \in \Lambda$ функция $PC^1_{x,W_a}([0,1], M) \ni \gamma \mapsto U^{a,a_x}_{1,0}(\gamma)$ (параллельный перенос вдоль кривых из $PC^1_{x,W_a}([0,1], M)$) является решением уравнения Лапласа-Леви:*

$$\Delta_L U^{a,a_x}_{1,0} = 0. \tag{3.80}$$

Замечание 6. *В случае псевдориманова многообразия M для каждого $a \in \Lambda$ функция $PC^1_{x,W_a}([0,1], M) \ni \gamma \mapsto U^{a,a_x}_{1,0}(\gamma)$ лежит в области* *определения даламбертиана Леви, и выполняется следующее равенство:*

$$\Box_L U_{1,0}^{a,a_x}(\gamma) = \frac{1}{d}\int\limits_0^1 dr U_{1,r}^{a}(\gamma)(-\nabla_\mu F_\nu^\mu(\gamma_r)\gamma_r'^\nu) U_{r,0}^{a_x}(\gamma). \tag{3.81}$$

3.3 Неклассический лапласиан Леви и уравнения Янга-Миллса

Пусть $W_2^1([0,1],\mathbb{R}^d)$ — пространство абсолютно непрерывных функций, принимающих значение в $\mathbb{R}^d$ и обладающих квадратично интегрируемой производной. Пусть

$$H = \{\gamma \in W_2^1([0,1],\mathbb{R}^d)\colon \gamma(0) = 0\}$$

— гильбертово пространство со скалярным произведением:

$$(g_1, g_2)_H = \int\limits_0^1 (g_1'(r), g_2'(r))_{\mathbb{R}^d} dr$$

и соответствующей гильбертовой нормой $\|\cdot\|_H$. Пусть $\{p_i\}_{i=1}^d$ — ортонормированный базис в $\mathbb{R}^d$. Выберем в H следующий ортонормированный базис:

$$e_n(r) = p_{n-d\lfloor\frac{n-1}{d}\rfloor} f_{\lfloor\frac{n-1}{d}\rfloor}(r), \tag{3.82}$$

где

$$f_0(r) = r,\ f_j(r) = \frac{\sqrt{2}}{\pi j}\sin(\pi j r) \tag{3.83}$$

для $j \in \mathbb{N}$.

В этом параграфе мы считаем, что связность задана на $\mathbb{R}^d$ как $gl(N)$-значная C^2-гладкая 1-форма $A_\mu(x)dx^\mu$, определенная на всем $\mathbb{R}^d$. Тензор кривизны — это $gl(N)$-значная 2-форма $\sum_{\mu<\nu} F_{\mu\nu}(x)dx^\mu \wedge dx^\nu$, где $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]$, определенная на всем $\mathbb{R}^d$. Ковариантная производная тензора кривизны имеет вид $\nabla_\lambda F_{\mu\nu} = \partial_\lambda F_{\mu\nu} + [A_\lambda, F_{\mu\nu}]$. Определим для $\gamma \in H$ параллельный перенос вдоль $\gamma_{[s,t]}$ как элемент $GL(N)$, определенный следующим образом:

$$U_{t,s}(\gamma) = \sum_{k=0}^{\infty} U_{t,s}(\gamma, k), \tag{3.84}$$

где, как и в предыдущем параграфе, $U_{t,s}(\gamma,0)=I_N$ и

$$U_{t,s}(\gamma,k)=\int\limits_{\Delta^k_{s,t}} d\tau_1\dots d\tau_k\left(-A_\mu(\gamma_{\tau_k})\gamma'^\mu_{\tau_k}\right)\dots\left(-A_\mu(\gamma_{\tau_1})\gamma'^\mu_{\tau_1}\right).$$

Заметим, что выполняется равенство

$$U^{-1}_{t,s}(\gamma)=I_N+\sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_{\Delta^k_{s,t}} d\tau_1\dots d\tau_k\left(A_\mu(\gamma_{\tau_1}))\gamma'^\mu_{\tau_1}\right)\dots\left(A_\mu(\gamma_{\tau_k})\gamma'^\mu_{\tau_k}\right). \tag{3.85}$$

Для каждого $s\in[0,1]$ функция $[s,1]\ni t\mapsto U_{t,s}(\gamma)$ — абсолютно непрерывная, причем почти всюду выполняется

$$\frac{d}{dt}U_{t,s}(\gamma)=-A_\mu(\gamma_t)\gamma'^\mu_t U_{t,s}(\gamma). \tag{3.86}$$

Для каждого $t\in[0,1]$ функция $[0,t]\ni s\mapsto U_{t,s}(\gamma)$ — абсолютно непрерывная, причем почти всюду выполняется

$$\frac{d}{ds}U_{t,s}(\gamma)=U_{t,s}(\gamma)A_\mu(\gamma_s)\gamma'^\mu_s. \tag{3.87}$$

Лемма 9. *Пусть* $A_1,\dots,A_n\in M_N$ *и* $B_1,\dots,B_n\in M_N$, *тогда*

$$\|A_1\dots A_n-B_1\dots B_n\|\le\sum_{k=1}^{n}\|A_k-B_k\|\prod_{i=1,i\neq k}^{n}\max\left(\|A_i\|,\|B_i\|\right)$$

Доказательство. Утверждение леммы следует из равенства:

$$A_1\dots A_n-B_1\dots B_n=\sum_{k=1}^{n}A_1\dots A_{k-1}(A_k-B_k)B_{k+1}\dots B_n.$$

□

Предложение 11. *Функции* $U_{1,0}\colon H\to M_N$ *и* $U^{-1}_{1,0}\colon H\to M_N$ *дифференцируемы по Фреше на* H, *причем выполняются равенства:*

$$d_uU_{1,0}(\gamma)=\int\limits_0^1 drU_{1,r}(\gamma)(-F_{\nu\mu}(\gamma_r)\gamma'^\mu_r u^\nu_r)U_{r,0}(\gamma)-A_\mu(\gamma)u^\mu_1U_{1,0}(\gamma_1),$$

$$d_uU^{-1}_{1,0}(\gamma)=\int\limits_0^1 drU^{-1}_{r,0}(\gamma)(F_{\nu\mu}(\gamma_r)\gamma'^\mu_r u^\nu_r)U^{-1}_{1,r}(\gamma)+U^{-1}_{1,0}(\gamma)A_\mu(\gamma_1)u^\mu_1.$$

Доказательство. Пусть $\gamma, u \in H$. Пусть в точке $t \in [0,1]$ существуют производные γ'_t и u'_t. Введем функцию вещественного аргумента $H_{\gamma,u,t}(\varepsilon)$ следующим образом:

$$H_{\gamma,u,t}(\varepsilon) = -A_\mu(\gamma_t + \varepsilon u_t)(\gamma_t'^\mu + \varepsilon u_t'^\mu).$$

Тогда

$$\frac{d}{d\varepsilon} H_{\gamma,u,t}(\varepsilon) = -\partial_\nu A_\mu(\gamma_t + \varepsilon u_t) u_t^\nu (\gamma_t'^\mu + \varepsilon u_t'^\mu) - A_\mu(\gamma_t + \varepsilon u_t) u_t'^\mu.$$

Т.к. для $u \in H$ выполняется

$$\sup_{t \in [0,1]} \|u_t\|_{\mathbb{R}^d} \leq \int_0^1 \|u'_t\|_{\mathbb{R}^d} dt \leq \|u\|_H, \tag{3.88}$$

для каждого $C_1 > 0$ существует такой компакт K в $\mathbb{R}^d$, что для всех $\|u\|_H \leq C_1$, $|\varepsilon| \leq 1$ и $t \in [0,1]$ выполняется $\gamma_t + \varepsilon u_t \in K$. Т.к. все A_μ и $\partial_\nu A_\mu$ равномерно непрерывны на K, для каждого $C_1 > 0$ существует такая $D > 0$, что для всех $\|u\|_H \leq C_1$ и $0 \leq \varepsilon_2 \leq 1$ верны следующие оценки для $h^1_{\gamma,u,\varepsilon_2}(t) = \sup_{|\varepsilon| \leq \varepsilon_2} \|H_{\gamma,u,t}(\varepsilon)\|$ и $h^2_{\gamma,u,\varepsilon_2}(t) = \sup_{|\varepsilon| \leq \varepsilon_2} \|\frac{d}{d\varepsilon} H_{\gamma,u,t}(\varepsilon)\|$ в любой точке $t \in [0,1]$:

$$h^1_{\gamma,u,\varepsilon_2}(t) \leq D(\|\gamma'_t\|_{\mathbb{R}^d} + \varepsilon_2 \|u'_t\|_{\mathbb{R}^d}), \tag{3.89}$$

$$h^2_{\gamma,u,\varepsilon_2}(t) \leq D\|u_t\|_{\mathbb{R}^d}(\|\gamma'_t\|_{\mathbb{R}^d} + \varepsilon_2 \|u'_t\|_{\mathbb{R}^d}) + D\|u'_t\|_{\mathbb{R}^d}. \tag{3.90}$$

Тогда, учитывая (3.88), мы получаем для всех $\|u\|_H \leq C_1$ и $\varepsilon_2 \leq 1$ следующие оценки

$$\int_0^1 h^1_{\gamma,u,\varepsilon_2}(t) dt \leq D(\|\gamma\|_H + \varepsilon_2 \|u\|_H), \tag{3.91}$$

$$\int_0^1 h^2_{\gamma,u,\varepsilon_2}(t) dt \leq D\|u\|_H(\|\gamma\|_H + \varepsilon_2 \|u\|_H) + D\|u\|_H. \tag{3.92}$$

Т.к. все A_μ и $\partial_\nu A_\mu$ равномерно непрерывны на K, для любого $\varepsilon_1 > 0$, существует такое $\varepsilon_2 > 0$, что для всех $\|u\|_H \leq C_1$ выполняются следующие оценки для $h^3_{\gamma,u,\varepsilon_2}(t) = \sup_{|\varepsilon|\leq\varepsilon_2} \|H_{\gamma,u,t}(\varepsilon) - H_{\gamma,u,t}(0)\|$ и $h^4_{\gamma,u,\varepsilon_2}(t) = \sup_{|\varepsilon|\leq\varepsilon_2} \|\frac{d}{d\varepsilon}H_{\gamma,u,t}(\varepsilon) - \frac{d}{d\varepsilon}H_{\gamma,u,t}(0)\|$ в любой точке $t \in [0,1]$:

$$h^3_{\gamma,u,\varepsilon_2}(t) \leq \varepsilon_1 \|\gamma'_t\|_{\mathbb{R}^d} + \varepsilon_2 D \|u'_t\|_{\mathbb{R}^d}, \tag{3.93}$$

$$h^4_{\gamma,u,\varepsilon_2}(t) \leq \varepsilon_1 \|u_t\|_{\mathbb{R}^d} \|\gamma'_t\|_{\mathbb{R}^d} + \varepsilon_1 \|u'_t\|_{\mathbb{R}^d} + \varepsilon_2 D \|u_t\|_{\mathbb{R}^d} \|u'_t\|_{\mathbb{R}^d}. \tag{3.94}$$

Тогда, учитывая (3.88), мы получаем для всех $\|u\|_H \leq C_1$ следующие оценки

$$\int_0^1 h^3_{\gamma,u,\varepsilon_2}(t)dt \leq \varepsilon_1 \|\gamma\|_H + \varepsilon_2 D \|u\|_H), \tag{3.95}$$

$$\int_0^1 h^4_{\gamma,u,\varepsilon_2}(t)dt \leq \varepsilon_1 \|u\|_H \|\gamma\|_H + \varepsilon_1 \|u\|_H + \varepsilon_2 D \|u\|^2_H. \tag{3.96}$$

Пусть в точках $\tau_1, \ldots, \tau_n$ из $[0,1]$ существуют производные $\gamma'_{\tau_1}, \ldots, \gamma'_{\tau_n}$ и $u'_{\tau_1}, \ldots, u'_{\tau_n}$. Введем функцию

$$H_{\tau_n,\ldots,\tau_1}(\gamma, u, \varepsilon) = H_{\gamma,u,\tau_n}(\varepsilon) \ldots H_{\gamma,u,\tau_1}(\varepsilon).$$

Из леммы 9 следует неравенство

$$\begin{aligned}\sup_{|\varepsilon|\leq\varepsilon_2} \|\frac{d}{d\varepsilon} H_{\tau_n,\ldots,\tau_1}(\gamma, u, \varepsilon) - \frac{d}{d\varepsilon} H_{\tau_n,\ldots,\tau_1}(\gamma, u, 0)\| \leq \\ \leq \sum_{i=1}^n \prod_{k=1,k\neq i}^n h^1_{\gamma,u,\varepsilon_2}(\tau_i)) h^4_{\gamma,u,\varepsilon_2}(\tau_k) + \\ + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1,j\neq i}^n \prod_{k=1,k\neq i,k\neq j}^n h^1_{\gamma,u,\varepsilon_2}(\tau_k)) h^2_{\gamma,u,\varepsilon_2}(\tau_j) h^3_{\gamma,u,\varepsilon_2}(\tau_i).\end{aligned} \tag{3.97}$$

Заметим, что выполняются следующая оценка для всех $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^k \|U_{1,r}(\gamma, k-j)(\frac{d}{d\varepsilon} H_{\gamma,u,r}(0)) U_{r,0}(\gamma, j-1))\| \leq e^{D\int_0^1 \|\gamma'_t\|_{\mathbb{R}^d} dt} h^2_{\gamma,u,0}(r).$$

Тогда из теорем Фату и Лебега следует, что

$$\frac{1}{\varepsilon}(U_{1,0}(\gamma+\varepsilon u)-U_{1,0}(\gamma))-\int\limits_0^1 U_{1,r}(\gamma)(-\partial_\nu A_\mu(\gamma_t)u_t^\nu\gamma_t'^\mu - A_\mu(\gamma_t)u_t'^\mu)U_{r,0}(\gamma))=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{\Delta_{0,1}^n}\frac{1}{\varepsilon}(H_{\tau_n,\dots,\tau_1}(\gamma,u,\varepsilon)-H_{\tau_n,\dots,\tau_1}(\gamma,u,0))-\frac{d}{d\varepsilon}H_{\tau_n,\dots,\tau_1}(\gamma,u,0)d\tau_1\dots d\tau_n$$

Тогда

$$\sup_{|\varepsilon|\le\varepsilon_2}\|\frac{1}{\varepsilon}(U_{1,0}(\gamma+\varepsilon u)-U_{1,0}(\gamma))-\int\limits_0^1 U_{1,r}(-\partial_\nu A_\mu(\gamma_t)u_t^\nu\gamma_t'^\mu - A_\mu(\gamma_t)u_t'^\mu)U_{r,0}(\gamma))\|\le$$

$$\le\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{\Delta_{0,1}^n}\sup_{|\varepsilon|\le\varepsilon_2}\|\frac{1}{\varepsilon}(H_{\tau_n,\dots,\tau_1}(\gamma,u,\varepsilon)-H_{\tau_n,\dots,\tau_1}(\gamma,u,0))-\frac{d}{d\varepsilon}H_{\tau_n,\dots,\tau_1}(\gamma,u,0)\|d\tau_1\dots d\tau_n\le$$

$$\le\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{\Delta_{0,1}^n}\sup_{|\varepsilon|\le\varepsilon_2}\|\frac{d}{d\varepsilon}H_{\tau_n,\dots,\tau_1}(\gamma,u,\varepsilon)-\frac{d}{d\varepsilon}H_{\tau_n,\dots,\tau_1}(\gamma,u,0)\|d\tau_1\dots d\tau_n.$$

В силу оценок (3.91), (3.92), (3.95), (3.96) для любого $\varepsilon_1>0$, существует такое $\varepsilon_2>0$, что для всех $\|u\|_H\le C_1$ выполняется

$$\sup_{|\varepsilon|\le\varepsilon_2}\|\frac{1}{\varepsilon}(U_{1,0}(\gamma+\varepsilon u)-U_{1,0}(\gamma))-\int\limits_0^1 U_{1,r}(\gamma)(-\partial_\nu A_\mu(\gamma_t)u_t^\nu\gamma_t'^\mu - A_\mu(\gamma_t)u_t'^\mu)U_{r,0}(\gamma))\|\le$$

$$\le\{\int\limits_0^1 h^4_{\gamma,u,\varepsilon_2}(t)dt+\int\limits_0^1 h^2_{\gamma,u,\varepsilon_2}(t)dt\int\limits_0^1 h^3_{\gamma,u,\varepsilon_2}(t)dt\}e^{\int_0^1 h^1_{\gamma,u,\varepsilon_2}(t)dt}\le$$

$$\le\{\varepsilon_1\|u\|_H\|\gamma\|_H+\varepsilon_1\|u\|_H+\varepsilon_2 D\|u\|_H^2+$$

$$+(D\|u\|_H(\|\gamma\|_H+\varepsilon_2\|u\|_H)+D\|u\|_H)(\varepsilon_1\|\gamma\|_H+\varepsilon_2 D\|u\|_H)\}e^{D(\|\gamma\|_H+\varepsilon_2\|u\|_H)}.$$

Отсюда мы получаем, что $U_{1,0}$ дифференцируема по Фреше и

$$d_uU_{1,0}(\gamma)=\int\limits_0^1 drU_{1,r}(\gamma)(-\partial_\nu A_\mu(\gamma_r)\gamma_r'^\mu u_r^\nu - A_\mu(\gamma_r)u_r'^\mu))U_{r,0}(\gamma)$$

Интегрируя по частям, мы получаем

$$d_u U_{1,0}(\gamma) = \int\limits_0^1 dr U_{1,r}(\gamma)(-F_{\nu\mu}(\gamma_r)\gamma_r'^{\mu} u_r^{\nu}) U_{r,0}(\gamma) - A_\mu(\gamma_1) u_1^\mu U_{1,0}(\gamma)$$

Аналогично доказывается, что

$$d_u U_{1,0}^{-1}(\gamma) = \int\limits_0^1 dr U_{r,0}^{-1}(\gamma)(F_{\nu\mu}(\gamma_r)\gamma_r'^{\mu} u_r^{\nu}) U_{1,r}^{-1}(\gamma) + U_{1,0}^{-1}(\gamma) A_\mu(\gamma_1) u_1^\mu$$

□

Пусть оператор $N_1 \colon span\{e_n \colon n \in \mathbb{N}\} \to H$ определен следующим образом: $N_1 e_n = \pi \lfloor \frac{n-1}{d} \rfloor e_n$.

Предложение 12. *Верно равенство* $\frac{\pi^2}{d^2}\Delta_{N^1} = \Delta_{N_1}$.

Доказательство. Чтобы доказать утверждение леммы достаточно доказать, что, для $(a_n) \in \mathbb{C}^\infty$ выполняется

$$\frac{1}{d^2} C_1((n^2 a_n)) = C_1(((\lfloor (n-1)/d \rfloor)^2 a_n)), \tag{3.98}$$

если одна из частей равенства существует. Действительно, пусть существует $C_1((n^2 a_n))$. Т.к. $n a_n = \frac{1}{n}(\sum_{k=1}^n k^2 a_k) - \frac{(n-1)}{n}\frac{1}{(n-1)}(\sum_{k=1}^{n-1} k^2 a_k)$, выполняется $\lim_{n\to\infty} n a_n = 0$. Тогда $\lim_{n\to\infty}((\lfloor (n-1)/d \rfloor)^2 a_n - \frac{1}{d^2} n^2 a_n = 0$, т.к.

$$|(\lfloor (n-1)/d \rfloor)^2 a_n - \frac{1}{d^2}(n^2 a_n)| \le \frac{2}{d^2} n |a_n|.$$

Тогда выполняется (3.98). Если существует $C_1(((\lfloor (n-1)/d \rfloor)^2 a_n))$, равенство (3.98) доказывается аналогично. □

Теорема 9. *Функция* $H \ni \gamma \mapsto U_{1,0}(\gamma)$ *(параллельный перенос вдоль кривых из* H*) лежит в области определения оператора* $\Delta_{N^1}^L$*. При этом выполняется:*

$$d\Delta_{N_1}^L U_{1,0}(\gamma) = \frac{\pi^2}{d}\Delta_{N^1}^L U_{1,0}(\gamma) = \int\limits_0^1 U_{1,r}(\gamma)(-\nabla_\mu F_\nu^\mu(\gamma_r)\gamma_r'^{\nu}) U_{r,0}(\gamma) dr$$

Доказательство. Сначала мы докажем, что $U_{1,0}$ дважды дифференцируема по Фреше, причем

$$d_v d_u U_{1,0} = \sum_{i=1}^{6} U_{i,u,v},$$

где

$$U_{1,u,v} := \int_0^1 dr U_{1,r}\{-\partial_\lambda \partial_\mu A_\nu(\gamma_r)\} u_r^\lambda u_r^\mu \gamma_r'^\nu) U_{r,0}, \tag{3.99}$$

$$U_{2,u,v} := \int_0^1 dr U_{1,r}(-\partial_\mu A_\nu(\gamma_r)(u_r'^\nu u_r^\mu + u_r^\nu u_r'^\mu) U_{r,0}, \tag{3.100}$$

$$U_{3,u,v} := 2\int_0^1 dr U_{1,r}\left(\partial_\lambda A_\nu(\gamma_r) u_r^\lambda \gamma_r'^\nu\right) \int_0^r dp U_{r,p}\left(\partial_\lambda A_\nu(\gamma_p) u_p^\lambda \gamma_p'^\nu\right) U_{p,0}, \tag{3.101}$$

$$U_{4,u,v} := 2\int_0^1 dr U_{1,r} A_\mu(\gamma_r) u_r'^\mu \int_0^r dp U_{r,p}\left(\partial_\lambda A_\nu(\gamma_p) u_p^\lambda \gamma_p'^\nu\right) U_{p,0}, \tag{3.102}$$

$$U_{5,u,v} := 2\int_0^1 dr \int_r^1 dp U_{1,p}\left(\partial_\lambda A_\nu(\gamma_p) u_p'^\lambda \gamma_p'^\nu\right) U_{p,r} dr A_\mu(\gamma_r) u_r'^\mu U_{r,0}, \tag{3.103}$$

$$U_{6,u,v} := 2\int_0^1 dr \{\int_r^1 dp U_{1,p} A_\nu(\gamma_p) u_p'^\nu U_{p,r}\} A_\mu(\gamma_r) u_r'^\mu U_{r,0}. \tag{3.104}$$

Пусть $\gamma, v, u \in H$. Пусть в точке $t \in [0,1]$ существуют производные γ_t', u_t', v_t'. Введем функцию вещественного аргумента $H_{\gamma,u,t}(\varepsilon)$ следующим образом:

$$H^1_{\gamma,v,u,t}(\varepsilon) = (-\partial_\nu A_\mu(\gamma_t + \varepsilon v_t) u_t^\nu (\gamma_t'^\mu + \varepsilon v_t'^\mu) - A_\mu(\gamma_t + \varepsilon v_t) u_t'^\mu$$

Тогда

$$\frac{d}{d\varepsilon} H^1_{\gamma,v,u,t}(\varepsilon) = -\partial_\lambda \partial_\nu A_\mu(\gamma_t + \varepsilon v_t) v_t^\lambda u_t^\nu (\gamma_t'^\mu + \varepsilon v_t'^\mu) -$$
$$- \partial_\nu A_\mu(\gamma_t + \varepsilon v_t) u_t^\nu v_t'^\mu - \partial_\nu A_\mu(\gamma_t + \varepsilon v_t) v_t^\nu u_t'^\mu.$$

Для всех $C_1 > 0$ существует такой компакт K в $\mathbb{R}^d$, что для всех $\|v\|_H \leq C_1$, $|\varepsilon| \leq 1$ и $t \in [0,1]$ выполняется $\gamma_t + \varepsilon v_t \in K$. Т.к. все $A_\mu, \partial_\nu A_\mu$ и $\partial_\lambda \partial_\nu A_\mu$ равномерно непрерывны на K, для всех $C_1 > 0$ существует такая $D_1 > 0$, что для всех $\|v\|_H \leq C_1$ и $0 \leq \varepsilon_2 \leq 1$ верны следующие оценки для $h^5_{\gamma,v,u,\varepsilon_2}(t) = \sup_{|\varepsilon| \leq \varepsilon_2} \|H^1_{\gamma,v,u,t}(\varepsilon)\|$ и $h^6_{\gamma,v,u,\varepsilon_2}(t) = \sup_{|\varepsilon| \leq \varepsilon_2} \|\frac{d}{d\varepsilon} H^1_{\gamma,v,u,t}(\varepsilon)\|$ в любой точке $t \in [0,1]$:

$$h^5_{\gamma,v,u,\varepsilon_2}(t) \leq D_1 \|u_t\|_{\mathbb{R}^d} (\|\gamma'_t\|_{\mathbb{R}^d} + \varepsilon_2 \|v'_t\|_{\mathbb{R}^d}) + D_1 \|u'_t\|_{\mathbb{R}^d}, \tag{3.105}$$

$$h^6_{\gamma,v,u,\varepsilon_2}(t) \leq D_1 \|u_t\|_{\mathbb{R}^d} \|v_t\|_{\mathbb{R}^d} (\|\gamma'_t\|_{\mathbb{R}^d} + \varepsilon_2 \|u'_t\|_{\mathbb{R}^d}) + \\ + D_1 \|u'_t\|_{\mathbb{R}^d} \|v_t\|_{\mathbb{R}^d} + D_1 \|u_t\|_{\mathbb{R}^d} \|v'_t\|_{\mathbb{R}^d}. \tag{3.106}$$

Тогда, учитывая (3.88), мы получаем для всех $\|v\|_H \leq C_1$ и $0 \leq \varepsilon_2 \leq 1$ следующие оценки

$$\int_0^1 h^5_{\gamma,v,u,\varepsilon_2}(t) \leq D_1 \|u\|_H (\|\gamma\|_H + \varepsilon_2 \|v\|_H) + D_1 \|u\|_H, \tag{3.107}$$

$$\int_0^1 h^6_{\gamma,v,u,\varepsilon_2}(t) \leq D_1 \|u\|_H \|v\|_H (\|\gamma\|_H + \varepsilon_2 \|u\|_H) + 2D_1 \|u\|_H \|v\|_H. \tag{3.108}$$

Для любого $\varepsilon_1 > 0$, существует такое $\varepsilon_2 > 0$, что для всех $\|v\|_H \leq C_1$ верны оценки для $h^7_{\gamma,v,u,\varepsilon_2}(t) = \sup_{|\varepsilon| \leq \varepsilon_2} \|H^1_{\gamma,v,u,t}(\varepsilon) - H^1_{\gamma,v,u,t}(0)\|$ и $h^8_{\gamma,v,u,\varepsilon_2}(t) = \sup_{|\varepsilon| \leq \varepsilon_2} \|\frac{d}{d\varepsilon} H^1_{\gamma,v,u,t}(\varepsilon) - \frac{d}{d\varepsilon} H^1_{\gamma,v,u,t}(0)\|$ в любой точке $t \in [0,1]$:

$$h^7_{\gamma,v,u,\varepsilon_2}(t) \leq \varepsilon_1 \|u_t\|_{\mathbb{R}^d} \|\gamma'_t\|_{\mathbb{R}^d} + \varepsilon_1 \|u'_t\|_{\mathbb{R}^d} + \varepsilon_2 D_1 \|u_t\|_{\mathbb{R}^d} \|v'_t\|_{\mathbb{R}^d}, \tag{3.109}$$

$$h^8_{\gamma,v,u,\varepsilon_2}(t) \leq \varepsilon_1 \|u_t\|_{\mathbb{R}^d} \|v_t\|_{\mathbb{R}^d} \|\gamma'_t\|_{\mathbb{R}^d} + \varepsilon_2 D_1 \|u_t\|_{\mathbb{R}^d} \|v_t\|_{\mathbb{R}^d} \|u'_t\|_{\mathbb{R}^d} + \\ + \varepsilon_1 \|u'_t\|_{\mathbb{R}^d} \|v_t\|_{\mathbb{R}^d} + \varepsilon_1 \|u_t\|_{\mathbb{R}^d} \|v'_t\|_{\mathbb{R}^d}. \tag{3.110}$$

Тогда, учитывая (3.88), мы получаем для всех $\|v\|_H \le C_1$ следующие оценки

$$\int\limits_0^1 h^7_{\gamma,v,u,\varepsilon_2}(t)dt \le \varepsilon_1\|u\|_H\|\gamma\|_H + \varepsilon_1\|u\|_H + \varepsilon_2 D_1\|u\|_H\|v\|_H, \qquad (3.111)$$

$$\int\limits_0^1 h^8_{\gamma,v,u,\varepsilon_2}(t)dt \le \varepsilon_1\|u\|_H\|v\|_H\|\gamma\|_H + \varepsilon_2 D_1\|u\|^2_H\|v\|_H + 2\varepsilon_1\|u\|_H\|v\|_H. \quad (3.112)$$

Пусть в точках $\tau_1,\ldots,\tau_n$ из $[0,1]$ существуют производные $\gamma'_{\tau_1},\ldots,\gamma'_{\tau_n}, u'_{\tau_1},\ldots,u'_{\tau_n}$ и $v'_{\tau_1},\ldots,v'_{\tau_n}$. Введем функцию

$$H^1_{\tau_n,\ldots,\tau_1}(\gamma,u,v,\varepsilon) = \sum_{i=1}^n H_{\gamma,v,\tau_n}(\varepsilon)\ldots H_{\gamma,v,t_{i+1}}(\varepsilon)H^1_{\gamma,v,u,\tau_i}(\varepsilon)H_{\gamma,v,t_{i-1}}(\varepsilon)\ldots H_{\gamma,v,\tau_1}(\varepsilon).$$

Из леммы 9 следует неравенство

$$\begin{aligned}
&\sup_{|\varepsilon|\le\varepsilon_2}\|\frac{d}{d\varepsilon}H^1_{\tau_n,\ldots,\tau_1}(\gamma,u,v,\varepsilon) - \frac{d}{d\varepsilon}H^1_{\tau_n,\ldots,\tau_1}(\gamma,u,v,0)\| \le \\
&\le \sum_{i=1}^n \prod_{k=1,k\ne i}^n h^1_{\gamma,v,\varepsilon_2}(\tau_k))h^8_{\gamma,v,u,\varepsilon_2}(\tau_i) + \\
&+ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1,j\ne i}^n \prod_{k=1,k\ne i,k\ne j}^n h^1_{\gamma,v,\varepsilon_2}(\tau_k))h^3_{\gamma,v,\varepsilon_2}(\tau_j)h^6_{\gamma,v,u,\varepsilon_2}(\tau_i) + \\
&+ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1,j\ne i}^n \prod_{k=1,k\ne i,k\ne j}^n h^1_{\gamma,v,\varepsilon_2}(\tau_k))h^2_{\gamma,v,\varepsilon_2}(\tau_j)h^7_{\gamma,v,u,\varepsilon_2}(\tau_i) + \\
&+ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1,j\ne i}^n \prod_{k=1,k\ne i,k\ne j}^n h^1_{\gamma,v,\varepsilon_2}(\tau_k))h^4_{\gamma,v,\varepsilon_2}(\tau_j)h^5_{\gamma,v,u,\varepsilon_2}(\tau_i) + \\
&+ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1,j\ne i}^n \sum_{l=1,l\ne i,l\ne j}^n \prod_{k=1,k\ne i,k\ne j,k\ne l}^n h^1_{\gamma,v,\varepsilon_2}(\tau_k))h^2_{\gamma,v,\varepsilon_2}(\tau_j)h^5_{\gamma,v,u,\varepsilon_2}(\tau_i)h^3_{\gamma,v,\varepsilon_2}(\tau_j).
\end{aligned} \qquad (3.113)$$

Заметим, что выполняются следующие оценки для всех $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^k \|U_{1,r}(\gamma,k-j)(\frac{d}{d\varepsilon}H^1_{\gamma,v,u,r}(0))U_{r,0}(\gamma,j-1))\| \le e^{D\int_0^1 \|\gamma'_t\|_{\mathbb{R}^d}dt}h^6_{\gamma,v,u,0}(r),$$

$$\sum_{k=2}^{n}\sum_{j=2}^{k}\sum_{i=2}^{j}\|U_{1,p_2}(\gamma,k-j)(H^1_{\gamma,v,u,p_2}(0))U_{p_2,p_1}(\gamma,j-i)\frac{d}{d\varepsilon}H_{\gamma,v,p_1}(0))U_{p_1,0}(\gamma,i-1))\|\leq$$

$$\leq e^{D\int_0^1\|\gamma_t'\|_{\mathbb{R}^d}dt}h^5_{\gamma,v,u,0}(p_2)h^2_{\gamma,v,0}(p_1).$$

Из теорем Фату и Лебега следует, что

$$\frac{1}{\varepsilon}(d_uU_{1,0}(\gamma+\varepsilon v)-d_uU_{1,0}(\gamma))-\sum_{i=1}^{6}U_{i,u,v}=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{\Delta^n_{0,1}}(\frac{1}{\varepsilon}(H^1_{\tau_n,\dots,\tau_1}(\gamma,u,v,\varepsilon)-H^1_{\tau_n,\dots,\tau_1}(\gamma,u,v,0))-\frac{d}{d\varepsilon}H^1_{\tau_n,\dots,\tau_1}(\gamma,u,v,0))d\tau_1\dots d\tau_n.$$

Тогда

$$\|\frac{1}{\varepsilon}(d_uU_{1,0}(\gamma+\varepsilon v)-d_uU_{1,0}(\gamma))-\sum_{i=1}^{6}U_{i,u,v}\|\leq$$

$$\leq\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{\Delta^n_{0,1}}\sup_{|\varepsilon|\leq\varepsilon_2}\|\frac{1}{\varepsilon}(H^1_{\tau_n,\dots,\tau_1}(\gamma,u,v,\varepsilon)-H^1_{\tau_n,\dots,\tau_1}(\gamma,u,v,0))-$$

$$-\frac{d}{d\varepsilon}H^1_{\tau_n,\dots,\tau_1}(\gamma,u,v,0)\|d\tau_1\dots d\tau_n\leq$$

$$\leq\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{\Delta^n_{0,1}}\sup_{|\varepsilon|\leq\varepsilon_2}\|\frac{d}{d\varepsilon}H^1_{\tau_n,\dots,\tau_1}(\gamma,u,v,\varepsilon)-\frac{d}{d\varepsilon}H^1_{\tau_n,\dots,\tau_1}(\gamma,u,v,0)\|d\tau_1\dots d\tau_n.$$

Тогда для любого $\varepsilon_1>0$ существует такое $\varepsilon_2>0$, что для всех $\|v\|_H\leq C_1$

$$\sup_{|\varepsilon|\leq\varepsilon_2}\|\frac{1}{\varepsilon}(d_uU_{1,0}(\gamma+\varepsilon v)-d_uU_{1,0}(\gamma))-\sum_{i=1}^{6}U_{i,u,v}\|\leq$$

$$\leq\{\int\limits_0^1 h^8_{\gamma,v,u,\varepsilon_2}(t)dt+\int\limits_0^1 h^3_{\gamma,v,\varepsilon_2}(t)dt\int\limits_0^1 h^6_{\gamma,v,u,\varepsilon_2}(t)dt+$$

$$+\int\limits_0^1 h^2_{\gamma,v,\varepsilon_2}(t)dt\int\limits_0^1 h^7_{\gamma,v,u,\varepsilon_2}(t)dt+\int\limits_0^1 h^4_{\gamma,v,\varepsilon_2}(t)dt\int\limits_0^1 h^5_{\gamma,v,u,\varepsilon_2}(t)dt+$$

$$+\int\limits_0^1 h^2_{\gamma,v,\varepsilon_2}(t)dt\int\limits_0^1 h^5_{\gamma,v,u,\varepsilon_2}(t)dt\int\limits_0^1 h^3_{\gamma,v,\varepsilon_2}(t)dt\}e^{\int_0^1 h^1_{\gamma,v,\varepsilon_2}(t)dt}.$$

Тогда для любого $\varepsilon_1 > 0$ существует такое $\varepsilon_2 > 0$, что для всех $\|v\|_H \leq C_1$

$$\sup_{|\varepsilon|\leq\varepsilon_2} \|\frac{1}{\varepsilon}(d_u U_{1,0}(\gamma+\varepsilon v) - d_u U_{1,0}(\gamma)) - \sum_{i=1}^{6} U_{i,u,v}\| \leq$$

$$\leq \{\varepsilon_1\|u\|_H\|v\|_H\|\gamma\|_H + \varepsilon_2 D_1\|u\|_H^2\|v\|_H + 2\varepsilon_1\|u\|_H\|v\|_H +$$

$$+ (\varepsilon_1\|\gamma\|_H + \varepsilon_2 D\|u\|_H)(D_1\|u\|_H\|v\|_H(\|\gamma\|_H + \varepsilon_2\|u\|_H) + 2D_1\|u\|_H\|v\|_H) +$$

$$+(D\|v\|_H(\|\gamma\|_H+\varepsilon_2\|v\|_H)+D\|v\|_H)(\varepsilon_1\|u\|_H\|\gamma\|_H+\varepsilon_1\|u\|_H+\varepsilon_2 D_1\|u\|_H\|v\|_H)+$$

$$+ (\varepsilon_1\|v\|_H\|\gamma\|_H + \varepsilon_1\|v\|_H + \varepsilon_2 D\|v\|_H^2)(D_1\|u\|_H(\|\gamma\|_H + \varepsilon_2\|v\|_H) + D_1\|u\|_H) +$$

$$+ (D\|v\|_H(\|\gamma\|_H + \varepsilon_2\|v\|_H) + D\|v\|_H)(\varepsilon_1\|\gamma\|_H + \varepsilon_2 D\|v\|_H) \times$$

$$\times (D_1\|u\|_H(\|\gamma\|_H + \varepsilon_2\|v\|_H) + D_1\|u\|_H)\} e^{D(\|\gamma\|_H + \varepsilon_2\|v\|_H)}.$$

Тогда $U_{1,0}$ дважды дифференцируема по Фреше всюду на H.

Пусть теперь $u_1 = 0$. Как и в доказательстве леммы 7 при интегрировании по частям при $u_1 = 0$, мы получаем, что

$$d_u d_u U_{1,0}(\gamma) = \int_0^1 U_{1,r}(-\nabla_\lambda F_{\mu\nu}(\gamma_r) u_r^\mu u_r^\lambda \gamma_r'^\nu) U_{r,0} dr +$$

$$+ 2\int_0^1\int_0^1 U_{1,p_1}(-F_{\mu\nu}(\gamma_{p_1}) u_{p_1}^\mu \gamma_{p_1}'^\nu) U_{p_1,p_2}(-F_{\mu\nu}(\gamma_{p_2}) u_{p_2}^\mu \gamma_{p_2}'^\nu) U_{p_2,0}\theta(p_1 - p_2) dp_1 dp_2.$$

Тогда, т.к. $\{\pi n f_n\}_{n=1}^\infty$ — слабо равномерно плотный базис в $L_2(0,1)$,

$$\frac{1}{d}\Delta_{N^1}^L U_{1,0}(\gamma) = \frac{d}{\pi^2}\Delta_{N_1} U_{1,0}(\gamma) =$$

$$= \sum_{\mu=1}^d \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n d_{(nf_n p_\mu)} d_{(nf_n p_\mu)} U_{1,0}(\gamma) = \frac{1}{\pi^2}\int_0^1 U_{t,r}(-\nabla_\mu F_\nu^\mu(\gamma_r)\gamma_r'^\nu) U_{r,s} dr.$$

□

Следствие 1. *Следующие два утверждения равносильны:*

1. связность A на $\mathbb{R}^d$ является решением уравнений Янга-Миллса:

$$\nabla_\mu F_\nu^\mu = 0;$$

2. *параллельный перенос $U_{1,0}$ на H является решением уравнения Лапласа для лапласиана $\Delta^L_{N^1}$:*

$$\Delta^L_{N^1} U_{1,0} = 0.$$

3.4 Неклассический даламбертиан Леви и уравнения квантовой хромодинамики

Пусть $p_0, \ldots, p_3$ — базис в пространстве Минковского $\mathbb{R}^{1,3} = \{x_0, \ldots, x_3\}$. Пусть греческие индексы пробегают $\{0, \ldots, 3\}$, если не оговорено иное. Метрика η в этом базисе имеет диагональный вид с диагональю: $\{1, -1, -1, -1\}$. Пусть

$$H = \{\sigma \in W^1_2([0,1], \mathbb{R}^{1,3})\colon \sigma(0) = 0\}$$

— псевдогильбертово пространство со скалярным произведением: $(g_1, g_2)_H = \int_0^1 (g_1'(r), g_2'(r))_{\mathbb{R}^{1,3}} dr$. Выберем следующий псевдоортонормированный базис в H:

$$e_n(r) = p_{n-1-4\lfloor\frac{n-1}{4}\rfloor} f_{\lfloor\frac{n-1}{4}\rfloor}(r),$$

где, как и в предыдущем параграфе, $f_0(r) = r$ и $f_j(r) = \frac{\sqrt{2}}{\pi j}\sin(\pi j r)$ для $j \in \mathbb{N}$.

Определение 10. *Неклассический даламбертиан Леви, — это линейное отображение из $dom\Box_{L_1}$ в пространство всех M_N -значных функций на H, определенное следующим образом:*

$$\Box_{L_1} F(\sigma) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} d_{\pi k p_0 f_k} d_{\pi k p_0 f_k} F(\sigma) - \sum_{i=1}^{3} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} d_{\pi k p_i f_k} d_{\pi k p_i f_k} F(\sigma), \tag{3.114}$$

где $dom\Box_{L_1}$ пространство дважды дифференцируемых по Гато M_N-значных функций на H, для которых правая часть (3.114) существует для всех $\sigma \in H$.

Определение 11. *Пусть $F : H \to V_1$, где V_1 — конечномерное векторное пространство, дифференцируема всюду на H в смысле Гато, причем производная F представляется в виде:*

$$d_u F(\sigma) = \int_0^1 \langle u(t), \nu_\sigma(dt)\rangle, \tag{3.115}$$

где для каждого $\sigma \in H$ ν_σ — это $V_1 \times (\mathbb{R}^{1,3})^*$ -значная борелевская мера. Тогда производная функции F в конечной точке по направлению $h \in \mathbb{R}^{1,3}$ (endpoint derivation) — это V_1-значная функция на H, определенная так:

$$D_h F(\sigma) = \langle h, \nu_\sigma(\{1\})\rangle, \sigma \in H.$$

Будем обозначать $D_\mu = D_{p_\mu}$.

Следующее предложение можно использовать как определение производной в конечной точке по направлению:

Предложение 13. *Если у функции $F \in C^1(H, V_1)$ существует производная в конечной точке по направлению $h \in \mathbb{R}^{1,3}$, то*

$$D_h F(\sigma) = d_{(hf_0)} F(\sigma) + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2}(-1)^n d_{(hf_n)} F(\sigma).$$

Доказательство. Предложение следует из теоремы Лебега, т.к. ряд

$$f_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sqrt{2} f_n(t) = t + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{\pi n} \sin \pi n t,$$

сходится поточечно к $\mathbf{1}_{\{1\}}(t)$, причем его частичные суммы равномерно ограниченны на $[0, 1]$. □

В этом параграфе связность задана на $\mathbb{R}^{1,3}$ как $u(N)$-значная C^2-гладкая 1-форма $A_\mu(x)dx^\mu$, определенная на всем $\mathbb{R}^{1,3}$. Функция $U_{t,s}(\sigma)$ для $\sigma \in H$, тензор кривизны и его ковариантная производная определяются как и в предыдущем параграфе. Заметим, что предложение 11 переносится без изменений на случай пространства Минковского. Совершенно аналогично теореме 9 доказывается, что

$$\Box_{L_1} U_{1,0}(\sigma) = \int_0^1 U_{1,r}(\sigma)(-\nabla_\mu F^\mu_\nu(\sigma_r)\sigma_r'^\nu)U_{r,0}(\sigma)dr.$$

Если $\alpha, \beta \in \mathbb{C}^N$, то $\alpha \otimes \beta^*$ является оператором на $\mathbb{C}^N$, действующим так:

$$\alpha \otimes \beta^* \xi = \alpha(\xi, \beta)_{\mathbb{C}^N}, \xi \in \mathbb{C}^N.$$

Пусть $\{g_\alpha\}_{\alpha=1}^4$ — ортонормированный базис в $\mathbb{C}^4$. Если $\varphi = \sum_{\alpha=1}^4 \varphi_\alpha \otimes g_\alpha \in \mathbb{C}^N \otimes \mathbb{C}^4$, то символ $\overline{\varphi}\gamma_\mu\varphi$ обозначает следующий оператор на $\mathbb{C}^N$

$$\overline{\varphi}\gamma_\mu\varphi = \sum_{\alpha=1}^4 ((I_N \otimes \gamma_0\gamma_\mu)\varphi)_\alpha \otimes \varphi_\alpha^*,$$

где γ^μ — матрицы Дирака:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Предложение 14. *Если $\varphi \in \mathbb{C}^N$, то $i\overline{\varphi}\gamma_\mu\varphi \in u(N)$.*

Доказательство. Пусть $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{C}^N$, тогда

$$(\overline{\varphi}\gamma_\mu\varphi\xi_1, \xi_2)_{\mathbb{C}^N} = (\sum_{\alpha=1}^4((I_N \otimes \gamma_0\gamma_\mu)(\sum_{\beta=1}^4 \varphi_\beta \otimes g_\beta))_\alpha(\xi_1, \varphi_\alpha)_{\mathbb{C}^N}, \xi_2)_{\mathbb{C}^N} =$$

$$= ((\sum_{\alpha=1}^4(\sum_{\beta=1}^4 \varphi_\beta \otimes (\gamma_0\gamma_\mu g_\beta))_\alpha(\xi_1, \varphi_\alpha)_{\mathbb{C}^N}, \xi_2)_{\mathbb{C}^N} =$$

$$= \sum_{\alpha=1}^4\sum_{\beta=1}^4(\xi_1, \varphi_\alpha)_{\mathbb{C}^N}(\gamma_0\gamma_\mu g_\beta, g_\alpha)_{\mathbb{C}^4}(\varphi_\beta, \xi_2)_{\mathbb{C}^N}.$$

Аналогично доказывается, что

$$(\xi_1, \overline{\varphi}\gamma_\mu\varphi\xi_2)_{\mathbb{C}^N} = \sum_{\alpha=1}^{4}\sum_{\beta=1}^{4}(\xi_1, \varphi_\alpha)_{\mathbb{C}^N}(g_\beta, \gamma_0\gamma_\mu g_\alpha)_{\mathbb{C}^4}(\varphi_\beta, \xi_2)_{\mathbb{C}^N}.$$

Т.к. $\gamma_0\gamma_\mu$ — симметричный оператор на $\mathbb{C}^4$ для каждого $\mu \in \{0, \dots, 3\}$, то $(\overline{\varphi}\gamma_\mu\varphi\xi_1, \xi_2)_{\mathbb{C}^N} = (\xi_1, \overline{\varphi}\gamma_\mu\varphi\xi_2)_{\mathbb{C}^N}$. Тогда $(i\overline{\varphi}\gamma_\mu\varphi)^* = -i\overline{\varphi}\gamma_\mu\varphi$. □

Предложение 15. *Если $g \in U(N)$ и $\varphi \in \mathbb{C}^N$, то*

$$\overline{(g \otimes I_4)\varphi}\gamma_\mu(g \otimes I_4)\varphi = g\overline{\varphi}\gamma_\mu\varphi g^{-1}.$$

Доказательство. Т.к. операторы $(g \otimes I_4)$ и $(I_N \otimes \gamma_0\gamma_\mu)$ коммутируют, то верна цепочка равенств:

$$\begin{aligned}\overline{(g \otimes I_4)\varphi}\gamma_\mu(g \otimes I_4)\varphi &= \sum_{\alpha=1}^{4}((g \otimes I_4)(I_N \otimes \gamma_0\gamma_\mu)\varphi)_\alpha \otimes ((g \otimes I_4)\varphi)^*_\alpha = \\ &= \sum_{\alpha=1}^{4}(g((I_N \otimes \gamma_0\gamma_\mu)\varphi)_\alpha) \otimes (g\varphi_\alpha)^* = \\ &= g\left(\sum_{\alpha=1}^{4}((I_N \otimes \gamma_0\gamma_\mu)\varphi)_\alpha \otimes (\varphi_\alpha)^*\right)g^{-1} = g\overline{\varphi}\gamma_\mu\varphi g^{-1}.\end{aligned}$$

Предпоследнее равенство выполняется, т.к для $\alpha, \beta \in \mathbb{C}^N$ и $g \in U(N)$ верно равенство

$$g(\alpha \otimes \beta^*)g^{-1} = ((g\alpha) \otimes (g\beta)^*).$$

Действительно, пусть $\xi \in \mathbb{C}^N$, тогда

$$g(\alpha \otimes \beta^*)g^{-1}\xi = g\alpha(g^{-1}\xi, \beta)_{\mathbb{C}^N} = g\alpha(\xi, g\beta)_{\mathbb{C}^N} = ((g\alpha) \otimes (g\beta)^*)\xi.$$

□

Рассмотрим систему уравнений на (A, ψ), где $\psi \in C^1(\mathbb{R}^{1,3}, \mathbb{C}^N \otimes \mathbb{C}^4)$:

$$\begin{cases} (I_N \otimes \gamma^\mu)(\partial_\mu + A_\mu \otimes I_4)\psi + im\psi = 0 \\ \nabla_\mu F^\mu_\nu = -i(\overline{\psi}\gamma_\nu\psi). \end{cases} \tag{3.116}$$

Замечание 7. *Система уравнений (3.116) являются системой уравнений квантовой хромодинамики. Такой вид имеют уравнения Эйлера-Лагранжа для лагранжиана:*

$$L(A_\nu, \partial_\mu A_\nu, \psi, \partial_\mu \psi) = -\frac{1}{4} trace(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) + \overline{\psi}(i(I_N \otimes \gamma^\mu)((\partial_\mu + A_\mu \otimes I_4) - m)\psi,$$

где $\overline{\psi} = \psi^*(I_N \otimes \gamma_0)$.

Рассмотрим функцию $\Psi\colon H \to \mathbb{C}^N \otimes \mathbb{C}^4$, определенную так:

$$\Psi(\sigma) = (U_{1,0}^{-1}(\sigma) \otimes I_4)\psi(\sigma_1), \sigma \in H.$$

Теорема 10. (A, ψ) *удовлетворяют системе (3.116), тогда и только тогда, когда параллельный перенос* $U_{1,0}$ *и функция* Ψ, *определенная выше, удовлетворяют:*

$$\begin{cases} (I_N \otimes \gamma^\mu) D_\mu \Psi + im\Psi = 0 \\ \Box_{L_1} U_{1,0}(\sigma) = iU_{1,0}(\sigma) \int\limits_0^1 dr \overline{\Psi(\sigma^r)} \gamma_\nu \Psi(\sigma^r) \sigma_r'^\nu, \end{cases} \tag{3.117}$$

где для каждого $r \in [0,1]$ *кривая* $\sigma^r \in H$ *определена так:* $\sigma^r(t) = \sigma(rt)$.

Доказательство. Для любого $u \in H$ выполняется

$$d_u \Psi(\sigma) = (d_u U_{1,0}^{-1}(\sigma))\psi(\sigma_1) + U_{1,0}^{-1}(\sigma)\partial_{u_1}\psi(\sigma_1) =$$
$$= \int\limits_0^1 U_{r,0}^{-1}(\sigma)(F_{\mu\nu}(\sigma_r)u_r^\mu \sigma_r'^\nu U_{r,1}^{-1}(\sigma) dr \psi(\sigma_1) + U_{1,0}^{-1}(\sigma) A_\mu(\sigma_1) u_1^\mu + U_{1,0}^{-1}(\sigma)\partial_{u_1}\psi(\sigma_1).$$

Тогда производная по Гато функции Ψ имеет вид (3.115), причем

$$D_\mu \Psi(\sigma) = (U_{1,0}^{-1}(\sigma) \otimes I_4) \nabla_\mu \psi(\sigma_1).$$

Отсюда следует, что (A, ψ) удовлетворяют первому уравнению системы (3.116), тогда и только тогда, когда $(U_{1,0}, \Psi)$ удовлетворяют первому уравнению системы (3.119).

(A,ψ) являются решением второго уравнения системы (3.116) тогда и только тогда, когда для всех $\sigma \in H$

$$\Box_{L_1} U_{1,0}(\sigma) = \int\limits_0^1 U_{1,r}(\sigma))(i\overline{\varphi}\gamma_\nu\varphi(\sigma_r)\sigma_r'^{\nu})U_{r,0}(\sigma)dr.$$

Из предложения 15 для $g = U_{r,0}^{-1}(\sigma)$ следует, что

$$U_{1,0}(\sigma)\int\limits_0^1 U_{r,0}^{-1}(\sigma)\overline{\varphi}(\sigma_r)\gamma_\nu\varphi(\sigma_r)\sigma_r'^{\nu}U_{r,0}(\sigma)dr = U_{1,0}(\sigma)\int\limits_0^1 dr\overline{\Psi(\sigma^r)}\gamma_\nu\Psi(\sigma^r)\sigma_r'^{\nu}.$$

Отсюда следует, что (A,ψ) удовлетворяют второму уравнению системы (3.116) тогда и только тогда, когда $(U_{1,0},\Psi)$ удовлетворяют второму уравнению системы (3.119). $\Box$

Замечание 8. *Эквивалентность первых уравнений систем (3.116) и (3.117) была доказана в [27].*

3.5 Неклассический даламбертиан Леви и уравнения Янга-Миллса-Хиггса

В этом параграфе связность задана на $\mathbb{R}^{1,3}$ как $su(N)$-значная C^2-гладкая 1-форма $A_\mu(x)dx^\mu$, определенная на всем $\mathbb{R}^{1,3}$.

Рассмотрим систему уравнений на (A,ϕ), где $\phi \in C^2(\mathbb{R}^{1,3}, su(N))$:

$$\begin{cases} \nabla^\mu\nabla_\mu\phi(x) - (m^2 - \lambda\mathrm{trace}(\phi^*(x)\phi(x))\phi(x) = 0 \\ \qquad\qquad \nabla_\mu F^\mu_\nu(x) - [\phi(x), \nabla_\nu\phi(x)] = 0, \end{cases} \tag{3.118}$$

где $m,\lambda \geq 0$, $\nabla_\nu\phi = \partial_\nu\phi + [A_\nu,\phi]$, $\nabla_\mu\nabla_\nu\phi = \partial_\mu\nabla_\nu\phi + [A_\mu,\nabla_\nu\phi]$.

Замечание 9. *Система уравнений (3.118) называются уравнениями Янга-Миллса-Хиггса. Такой вид имеют уравнения Эйлера-Лагранжа для лагранжиана:*

$$L(A_\nu, \partial_\mu A_\nu, \phi, \partial_\mu \phi) = -\frac{1}{4} trace(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) + \frac{1}{2} trace((\nabla_\mu \phi)^* \nabla^\mu \phi) + \\ + \frac{m^2}{2} trace(\phi^* \phi) - \frac{\lambda}{4} (trace(\phi^* \phi))^2.$$

Рассмотрим функцию $\Phi\colon H \to su(N)$, определенную так:

$$\Phi(\sigma) = U_{1,0}(\sigma)^{-1} \phi(\sigma_1) U_{1,0}(\sigma), \sigma \in H.$$

Выполняется следующая теорема:

Теорема 11. (A, ϕ) *удовлетворяют системе (3.118), тогда и только тогда, когда параллельный перенос* $U_{1,0}$ *и функция* Φ*, определенная выше, удовлетворяют:*

$$\begin{cases} \eta^{\mu\nu} D_\mu D_\nu \Phi(\sigma) - (m^2 - \lambda trace(\Phi^*(\sigma)\Phi(\sigma))\Phi(\sigma) = 0 \\ \Box_{L_1} U_{1,0}(\sigma) + U_{1,0}(\sigma) \int\limits_0^1 dr [\Phi(\sigma^r), D_\nu \Phi(\sigma^r)] \sigma_r'^\nu = 0, \end{cases} \tag{3.119}$$

Доказательство. Т.к.

$$d_u \Phi(\sigma) = (d_u U_{1,0}^{-1}(\sigma)) \phi(\sigma_1) U_{1,0}(\sigma) + U_{1,0}^{-1}(\sigma) \partial_{u_1} \psi(\sigma_1) U_{1,0}(\sigma) + \\ + U_{1,0}^{-1}(\sigma) \psi(\sigma_1)(d_u U_{1,0}(\sigma)) =$$

$$= \int\limits_0^1 dr U_{r,0}^{-1}(\sigma)(F_{\mu\nu}(\sigma_r) u_r^\mu \sigma_r'^\nu) U_{1,r}^{-1}(\sigma) \psi(\sigma_1) U_{1,0}(\sigma) +$$

$$+ U_{1,0}^{-1}(\sigma) A_\mu(\sigma_1) u_1^\mu \phi(\sigma_1) U_{1,0}(\sigma) + U_{1,0}^{-1}(\sigma) \partial_{u_1} \phi(\sigma_1) U_{1,0}(\sigma) -$$

$$- U_{1,0}^{-1}(\sigma) \psi(\sigma_1) \int\limits_0^1 U_{1,r}(\sigma)(F_{\mu\nu}(\sigma_r) u_r^\mu \sigma_r'^\nu U_{r,0}(\sigma) dr - U_{1,0}^{-1}(\sigma) \phi(\sigma_1) A_\mu(\sigma_1) u_1^\mu U_{1,0}(\sigma),$$

то

$$D_\nu \Phi(\sigma) = U_{1,0}^{-1}(\sigma)\nabla_\nu \phi(\sigma_1) U_{1,0}(\sigma). \tag{3.120}$$

Аналогично доказывается, что

$$D_\mu D_\nu \Phi(\sigma) = U_{1,0}^{-1}(\sigma)\nabla_\mu \nabla_\nu \phi(\sigma_1) U_{1,0}(\sigma). \tag{3.121}$$

Из равенств (3.120) и (3.121) и из равенства

$$(m^2 - \lambda \mathrm{trace}(\Phi^*(\sigma)\Phi(\sigma))\Phi(\sigma) = \\ = U_{1,0}^{-1}(\sigma)(m^2 - \lambda \mathrm{trace}(\phi^*(\sigma_1)\phi(\sigma_1))\phi(\sigma_1)) U_{1,0}(\sigma)$$

следует, что (A, ϕ) удовлетворяют первому уравнению системы (3.118), тогда и только тогда, когда $(U_{1,0}, \Phi)$ удовлетворяют первому уравнению системы (3.119). Т.к. выполняется

$$\int_0^1 U_{1,r}(\sigma)[\phi(\sigma_r), \nabla_\nu \phi(\sigma_r)]\sigma_r'^\nu U_{r,0}(\sigma) dr = \\ = U_{1,0}(\sigma) \int_0^1 U_{r,0}^{-1}(\sigma)[\phi(\sigma_r), \nabla_\nu \phi(\sigma_r)]\sigma_r'^\nu U_{r,0}(\sigma) dr = \\ = U_{1,0}(\sigma) \int_0^1 [U_{r,0}^{-1}(\sigma)\phi(\sigma_r)U_{r,0}(\sigma), U_{r,0}^{-1}(\sigma)\nabla_\nu \phi(\sigma_r)U_{r,0}(\sigma)]\sigma_r'^\nu dr = \\ = U_{1,0}(\sigma) \int_0^1 dr[\Phi(\sigma^r), D_\nu \Phi(\sigma^r)]\sigma_r'^\nu,$$

(A, ϕ) удовлетворяют второму уравнению системы (3.118), тогда и только тогда, когда $(U_{1,0}, \Phi)$ удовлетворяют второму уравнению системы (3.119). $\square$

Замечание 10. *Эквивалентность первых уравнений систем (3.118) и (3.119) была доказана в [27].*

Литература

[1] В. И. Авербух, О. Г. Смолянов, С. В. Фомин, *Обобщенные функции и дифференциальные уравнения в линейных пространствах. II. Дифференциальные операторы и их преобразования Фурье*, Труды Моск. Мат. Общества, 1972, **27**, с. 249–262.

[2] В. И. Авербух, О. Г. Смолянов, *Различные определения производной в линейных топологических пространствах*, Успехи математических наук, 1968, **23**, №4, с. 67–116.

[3] Л. Аккарди, П. Розелли, О. Г. Смолянов, *Броуновское движение, порождаемое лапласианом Леви*, Математические заметки, 1993, **54**, № 5, с. 144–148.

[4] Л. Аккарди, О. Г. Смолянов, *Расширения пространств с цилиндрическими мерами и носители мер, порождаемых лапласианом Леви*, Математические заметки, 1998, **64**, № 4, с. 483–492.

[5] Л. Аккарди, О. Г. Смолянов, *Операторы Лапласа-Леви в пространствах функций на оснащенных гильбертовых пространствах*, Математические заметки, 2002, **72**, № 1, с. 145–150.

[6] Л. Аккарди, О. Г. Смолянов, *Представления лапласианов Леви и связанных с ними полугрупп и гармонических функций* , Доклады Академии наук, 2002, **384**, № 3, с. 295-301.

[7] Л. Аккарди, О. Г. Смолянов, *Формулы Фейнмана для эволюционных уравнений с лапласианом Леви на бесконечномерных многообразиях*, Доклады Академии наук, 2006, **407**, № 5, с. 583–588.

[8] Л. Аккарди, О. Г. Смолянов, *Классические и неклассические лапласианы Леви*, Доклады Академии наук, 2007, **417**, № 1, с. 7–11.

[9] Л. Аккарди, О. Г. Смолянов, *Обобщенные лапласианы Леви и чезаровские средние*, Доклады Академии наук, 2009, **424**, № 5, с. 583–587.

[10] И. Я. Арефьева, И. В. Волович, *Функциональные высшие законы сохранения в калибровочных теориях*, в сб.: Тр. Междунар. конф. "Обобщенные функции и их применения в математической физике М.: ВЦ АН СССР, 1981.

[11] В. И. Богачев, *Основы теории меры*, Москва-Ижевск, 2006.

[12] Ш. Кобаяси, К. Номидзу, *Основы дифференциальной геометрии* (в 2х томах), М.: Наука, 1981.

[13] А. П. Робертсон, В. Дж. Робертсон, *Топологические векторные пространства* Мир М., 1967.

[14] В. М. Алексеев, В. М. Тихомиров, С. В. Фомин, *Оптимальное управление*, М.:Наука, 1979.

[15] Ю. Л. Далецкий, С. В. Фомин, *Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространствах*, М.: Наука, 1983.

[16] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко, *Современная геометрия. Методы и приложения* (в 3х томах), Москва, 1998.

[17] О. Г. Смолянов, *Анализ на топологических линейных пространствах и его приложения*, М.: МГУ, 1979.

[18] L. Accardi, P. Gibilisco, I. V. Volovich, *The Lévy Laplacian and the Yang-Mills equations*, Rendiconti Lincei, 1993, **4**, № 3, pp. 201–206.

[19] L. Accardi, P. Gibilisco, I. V. Volovich, *Yang-Mills gauge fields as harmonic functions for the Levy-Laplacians*, Russ. J. Math. Phys., 1994, **2**, № 2, pp. 235–250.

[20] L. Accardi, Y.-G. Lu, I. V. Volovich, *Nonlinear extensions of classical and quantum stochastic calculus and essentialy infinite dimensional analysis*, in: Probability Towards 2000, Ed by L.Accardi, C.C. Heyde, Lecture Notes in Statistics **128**, pp. 1–33 (1998).

[21] L. Accardi, U. C. Ji, K. Saitô, *Exotic Laplacians and Associated Stochastic Processes*, Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics, 2009, **12**, № 1, pp. 1–19.

[22] L. Accardi, U. C. Ji, K. Saitô, *Exotic Laplacians and Derivatives of White Noise*, Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics, 2011, **14**, № 1, pp. 1–14.

[23] L. Accardi, U. C. Ji, K. Saitô, *The Exotic (Higher Order Lévy) Laplacians Generate the Markov Processes Given by Distribution Derivatives of White Noise*, Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics, 2013, **16**, № 3, 1350020–1/26.

[24] L. Accardi, O. G. Smolyanov, *On Laplacians and traces*, Conf. Semin. Univ. Bari, 1993, **250**, 1–25.

[25] M. N. Feller, *The Lévy Laplacian*, Cambridge Tracts in Mathematics, 2005.

[26] F. Gomez, O. G. Smolyanov, *Modified Lévy Laplacians*, Russian Journal of Mathematical Physics, 2008, **15**, № 1, pp. 45–50.

[27] L. Gross, *A Poincarè lemma for connection forms*, Journal of Functional Analysis, 1985, **63**, 1–46.

[28] T. Hida, *Analysis of Brownian Functionals*, Carleton Math. Lecture Notes 13, Carleton University, Ottawa, 1975.

[29] T. Hida, Si Si, *Lectures On White Noise Functionals*, World Scientific, 2008.

[30] I. Kubo, S. Takenaka, *Calculus on Gaussian white noise, I-IV*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci., 1980, **56**, № 8, 376–380, 1980, **56**, № 9, 411–416, 1981, **57**, № 9 (1981), 433–437, 1982, **58**, № 5, 186–189.

[31] H.-H. Kuo, *White Noise Distribution Theory*, CRC Press, 1996.

[32] H.-H. Kuo, N. Obata, K. Saitô, *Lévy-Laplacian of Generalized Functions on a Nuclear Space*, Journal of Functional Analysis, 1990, **94**, pp. 74–92.

[33] R. Leandre, I. V. Volovich, *The Stochastic Levy Laplacian and Yang-Mills equation on manifolds*, Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics, 2001, **4**, № 2, pp. 151–172.

[34] Y. J. Lee, *Analytic version of test functionals, Fourier transform, and a characterization of measures in white noise calculus*, Journal of Functional Analysis, 1991, **100**, № 2, pp. 359–380.

[35] P. Lévy, *Problèmes concrets d'analyse fonctionnelle*, Paris, Gautier-Villars, 1951, [Москва, Наука, 1967].

[36] P. A. Meyer, *Quantum Probability for Probabilists*, Lect. Notes in Math. Vol. 1538, Springer(Verlag), 1995.

[37] N. Obata, *White Noise Calculus and Fock Space*, Lect. Notes in Math. Vol. 1577, Springer(Verlag), 1994.

[38] N. Obata, *Generalized Quantum Stochastic Processes on Fock Space*, Publ. RIMS, 1995, **31**, pp. 667–702.

[39] N. Obata, *Integral Kernel Operators on Fock Space- Generalizations and Applications to Quantum Dynamics*, Acta Applicandae Mathematicae, 1997, **47**, pp. 49–77.

[40] N. Obata, *Quadratic Quantum White Noises and Lévy Laplacian*, Nonlinear Analysis-Theory Methods and Applications, 2001, **47**, № 4, pp. 2437–2448.

[41] O. O. Obrezkov, *Non-Self-Adjoint extensions of the Lévy-Laplacian and the Lévy-Laplacian Equation*, Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics, 2006, **9**, № 1, pp. 67–76.

[42] K. R. Parthasarathy, *An introduction to quantum stochastic calculus*, Birkhäuser, 1992.

[43] J. Potthoff, L. Streit, *A characterization of Hida distributions*, Journal of Functional Analysis, 1991, **101**, № 1, pp. 212–229.

[44] K. Saitô, *Infinite Dimensional Laplacians Associated with Derivatives of White Noise*, Quantum Probability and Related Topics, 2013, pp. 233-248.

Работы автора по теме диссертации

[45] B. O. Volkov, *Lévy-Laplacian and the Gauge Fields*, Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics, 2012, **15**, № 4, 1250027-1/19.

[46] B. O. Volkov, *Quantum Probability and Lévy-Laplacians*, Russian Journal of Mathematical Physics, 2013, **20**, № 2, pp. 254–256.

[47] B. O. Volkov, *Hierarchy of Lévy-Laplacians and Quantum Stochastic Processes*, Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics, 2013, **16**, № 4, 1350027-1/20.

[48] Б. О. Волков, *Лапласианы Леви и калибровочные поля*, XVII Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов», Тезисы докладов, 1–4, МАКС Пресс, Москва, 2010.

[49] Б. О. Волков, *Квантовая вероятность и иерархия лапласианов Леви*, XIX Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов», Тезисы докладов, 1, МАКС Пресс, Москва, 2012.

[50] Б. О. Волков, *Неклассический лапласиан Леви и калибровочные поля*, XX Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов», Тезисы докладов, 1, МАКС Пресс, Москва, 2013.